

O zobrazování rovinným zrcadlem

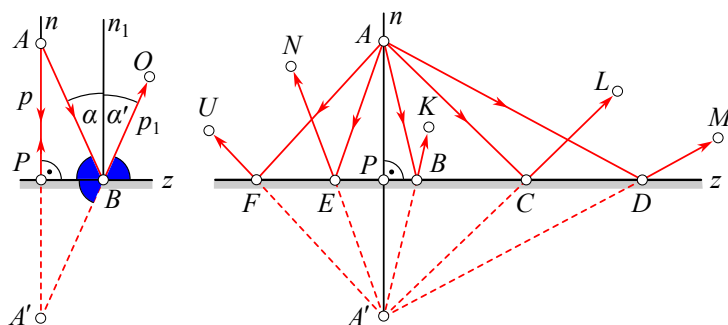
PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

S rovinným zrcadlem se žáci seznamují v 7. ročníku ZŠ a později i na střední škole. Při výuce se občas může objevit zdánlivý nesoulad mezi teorií a praxí. Uvedeme, jak se téma pravděpodobně vyučuje a co lze k lepšímu porozumění doplnit.

1. Konstrukce obrazu bodu umístěného před zrcadlem

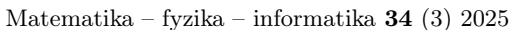
Obvykle vycházíme ze zákona odrazu a situace na obr. 1 vlevo. Kolmý paprsek p z bodu A , se v bodě P roviny zrcadla odráží do protisměru. Jiný paprsek p_1 dopadá na zrcadlo pod úhlem α a odráží se v bodě $B \in z$ pod úhlem $\alpha' = \alpha$. Oba úhly měříme od normály k rovině zrcadla v místě dopadu a odražený paprsek zůstává v rovině dopadu dané normálou a bodem A .



Obr. 1 Zobrazení bodu A zrcadlem, náčrsek v rovině dopadu

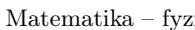
Odražené paprsky p_1 a p se rozbíhají. Zdánlivý obraz A' bodu A se nachází v průsečíku jejich prodloužení. Snadno lze ověřit, že $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle A'BP|$. Ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků ABP a $A'BP$ podle věty *usu* pak plyne, že jsou body A' , A souměrně sdružené podle průsečnice z roviny dopadu s reflexní rovinou σ .

204

Matematika – fizyka – informatika **34** (3) 2025

Ma

Matematika – fyz



Matematika – fizika – informatika

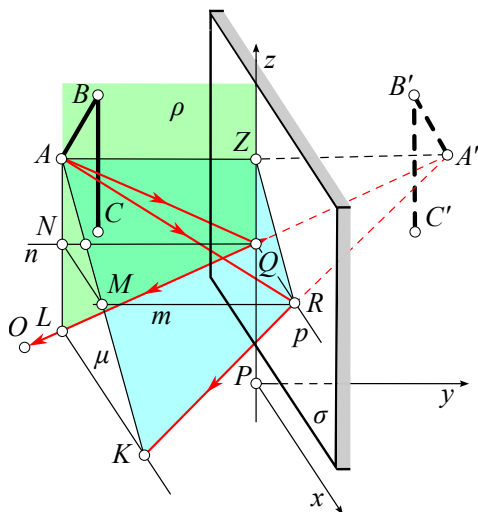
Matematika – fizyka – informatika **34** (3) 2025

mené čáry¹⁾ jež má tvar číslice 1. Na internetu jej nalezneme v různých provedeních. Jedno z nich je překresleno na obr. 3 vlevo. Co asi odpoví učitel, když se žák zeptá, zda paprsky AUA a AQO procházejí neprůhlednou vrstvou BC ? Jejich zakreslení lze považovat za chybné, ale můžeme je i korektně zdůvodnit.

Jedná-li se o situaci v rovině $\rho = ABC$ včetně polohy oka, neprojde světlo vrstvou BC a oko $O \in \rho$ vidí z „jedničky“ jen úsečku $B'C'$ (obr. 3 vpravo). Víme již, že obraz je s předmětem souměrně sdružený podle z , a tak umíme do obrázku dokreslit i to, co paprsky roviny ρ nezobrazí.

Rozumnější interpretace levé části obr. 3 spočívá v tom, že rozšíříme představu do prostoru a obrázek pokládáme za „pohled z boku“. Přesněji řečeno, zakreslení paprsků lze považovat za správné, chápeme-li je jako kolmé průměty paprsků z předmětového prostoru do roviny ρ .

Žákům asi postačí, když si takový pohled ve směru kolmém na rovinu ρ dokážou představit. Přesné zdůvodnění požaduje ukázat, že pro čáru AQO na obr. 4, která je kolmým průmětem kteréhokoliv paprsku ARK s bodem odrazu $R \neq Q$ na přímce $p \perp ABC$ sestrojené v bodě Q , platí zákon odrazu.



Obr. 4 Prostorový pohled na zobrazení číslice 1 rovinným zrcadlem

¹⁾Termíny *lomená čára*, *bod*, *úsečka*, *rovina* apod. v takovýchto situacích neoznačují ideální matematické objekty, ale jejich modely, trojrozměrná tělesa s potřebnými fyzikálními vlastnostmi.

Na obr. 4 je kvůli lepší orientaci zakreslena kartézská soustava souřadnic $Pxyz$. Předmět ABC i jeho obraz $A'B'C'$ leží v rovině $\rho = yz$ kolmé na reflexní rovinu $\sigma = xz$, rovina $\mu \parallel \sigma$ prochází bodem A . Je stejně vzdálena od σ jako bod A' . Paprsek AR protne po odrazu rovinu μ v bodě K , jehož kolmý průmět do roviny ρ je označen L . Přímkou $m = RM$ a $n = QN$ jsou normály k rovině σ , a tedy i k μ .

Tvrzení, že kolmý průmět AQL paprsku ARK splňuje zákon odrazu, je zřejmé z faktu, že bod Q je středem přepony LA' pravoúhlého trojúhelníku $A'LA$. Je tudíž i středem mu opsané kružnice a z rovnosti $|QA| = |QL|$ plyne, že normála n půlí úhel AQL .

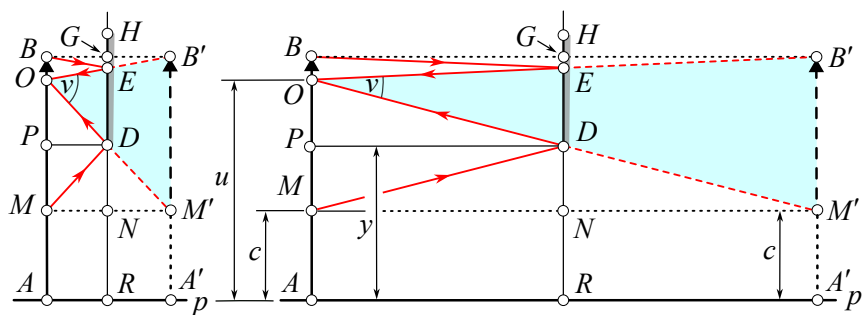
Následující příklad bývá často v různých variantách uváděn. Podrobně jej vyřešíme, protože je úvodem k níže popsanému paradoxu.

Příklad 1

Jana má výšku $v = 166$ cm, šířku $d = 44$ cm, oči 156 cm nad zemí a stojí před svisle umístěným zrcadlem ve vzdálenosti $a = 0,5$ m. Zrcadlo tvaru obdélníku je (bez rámu) vysoké 40 cm, široké 30 cm, dolní okraj se nachází 134 cm nad podlahou.

- Co ze své postavy vidí?
- Jak se změní předchozí výsledky, nachází-li se Jana 2 m před zrcadlem?
- Jaké budou minimální rozměry zrcadla a jak vysoko bude umístěno, má-li se v něm vidět celá?

Řešení. Na obr. 5 představuje úsečka AB Janu, bod O její oko, H a D po řadě horní a dolní okraj zrcadla. Položme ještě $u = |AO| = 156$ cm $y = |RD| = 134$ cm a $c = |A'M'| = |AM|$. Červeně jsou vyznačeny paprsky ohraničující obraz Jany v zrcadle.



Obr. 5 Zobrazení úsečky AB pro dvě různé vzdálenosti od zrcadla

- Zrcadlo má výšku $n = |DH| = 40$ cm a šířku $m = 30$ cm. Zřejmé

platí $|RH| = y + n = 174 \text{ cm} > v$, a proto zrcadlo Janě zobrazí i část prostoru nad ní. Určíme navíc výšku $|EH|$ nevyužité plochy zrcadla nad její hlavou. Paprsek z bodu B se odráží v místě E , stejně vzdáleném od podlahy jako střed základny OB rovnoramenného trojúhelníku BOE . Je tedy

$$|RE| = \frac{u + v}{2} = 161 \text{ cm}$$

a

$$|EH| = |RH| - |RE| = 13 \text{ cm}.$$

Délku c nezobrazené části Janiny postavy nalezneme analogicky s využitím trojúhelníku OMD :

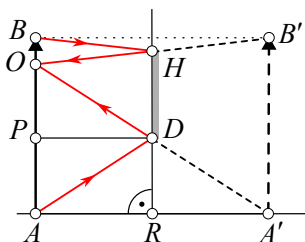
$$y = \frac{u + c}{2} \Rightarrow c = 2y - u. \quad (1)$$

Jana se v zrcadle vidí od výšky $c = 2 \cdot 134 - 156 = 112 \text{ cm}$, tzn. přibližně od pasu nahoru. Patrně se zobrazí v celé své šířce. Než to ověříme, povšimněme si trojúhelníku $OM'B'$ na obr. 5. Délka jeho střední příčky DE , je polovinou výšky obrazu: $|M'B'| = 2|DE|$.

Ve vodorovném směru je situace analogická. Má-li se Jana v zrcadle vidět do šířky celá, musí platit $d \leq 2m$, což je pro zadané hodnoty splněno.

b) Z předchozích výpočtů i situací nakreslených na obr. 5 je zřejmé, že rozměry obrazu nezávisí na vzdálenosti předmětu od zrcadla. Je sice pravda, že Jana uvidí z větší vzdálenosti svůj obraz menší, to je však jen důsledek perspektivy. Zmenšuje se zorný úhel ν , ale pozorovaný objekt velikost nemění.

c) Pomocí dosavadních úvah, resp. z obr. 6, snadno zjistíme, že minimální výška a šířka zrcadla jsou $n_{\min} = \frac{v}{2} = 83 \text{ cm}$ a $m_{\min} = \frac{d}{2} = 22 \text{ cm}$.



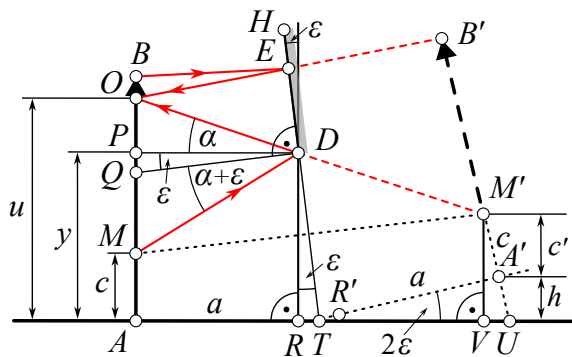
Obr. 6 Zobrazení celé úsečky AB v zrcadle minimálních rozměrů

Poloha dolního konce zrcadla je dána hodnotou $y = |RD| = \frac{u}{2} = 78 \text{ cm}$, jak plyne z trojúhelníku $AA'O$.

3. Paradox zrcadlového obrazu vzdalující se osoby

Pro situaci z příkladu (1) nezávisí poměr $|B'M'| : |B'A'|$ na vzdálenosti předmětu AB od zrcadla. Kdysi mi při výuce studentka tvrdila, že to není pravda. Když doma od zrcadla poodstoupí, vidí ze své postavy více.

Nezbylo, než problém podrobněji prozkoumat. Ukázalo se, že zrcadla na stěnách většinou nevisí svisle, neboť jejich horní okraj má díky závěsné skobě určitý odstup od stěny. Proto se vertikální úsečka nezobrazí svisle a obrazem vodorovné podlahy AR je nakloněná rovina, jejíž povrch je na obr. 7 znázorněn polopřímkou TA' , kde bod T znázorňuje průsečnici reflexní roviny s rovinou podlahy. Když se Jana reprezentovaná úsečkou AB od zrcadla vzdaluje, vzdaluje se od něj i její obraz $A'B'$ a přitom se posouvá po nakloněné rovině TA' nahoru. Díky tomu pak Jana může vidět z větší vzdálenosti větší část své své postavy.



Obr. 7 Zobrazení úsečky AB v nakloněném zrcadle

Příklad 2

Zrcadlo o šířce $m = 35$ cm a výšce $n = 50$ cm visí na svislé stěně. Dolním okrajem se o stěnu opírá ve výšce $y = 150$ cm, horní má od stěny vzdálenost $b = 2,5$ cm. Šířka rámu zrcadla je zanedbatelná. Jana má výšku 166 cm a oči 156 cm nad zemí.

a) Od jaké výšky se Jana v zrcadle vidí, stojí-li ve vzdálenosti a od něj?

Řešte obecně a pak vyčíslete pro hodnoty $a_1 = 0,5$ m a $a_2 = 3$ m.

b) Z jaké vzdálenosti od zrcadla se v něm Jana uvidí od výšky 90 cm?

Řešení. Použijeme označení na obr. 7. Pro úhlovou odchylku ε zrcadla od svislé roviny zjistíme, že $\sin \varepsilon = b/n = 0,05000$, $\varepsilon = 2,8660^\circ = 0,05002$ a

$\tan \varepsilon = 0,050\,06$. S přesností na tři platné číslice tedy platí

$$\sin \varepsilon = \tan \varepsilon = \varepsilon \quad \text{a} \quad \sin 2\varepsilon = \tan 2\varepsilon = 2\varepsilon. \quad (2)$$

a) Délku $c = |A'M'| = |AM|$ určíme nejprve přibližnou metodou. Hodnota ε je dostatečně malá, a proto se nedopustíme velké chyby když zanedbáme odklon obrazu $A'B'$ od svislého směru a při označení podle obr. 7 položíme $|TR'| = |TR| = y\varepsilon$, $|A'U| = h = 2\varepsilon|TA'| = 2\varepsilon(|TR'| + |R'A'|) = 2\varepsilon(y\varepsilon + a)$ a $c' = c$.

Z postřehu, že úsečka RD je při zanedbání vzdálenosti RT střední příčkou lichoběžníku $OAVM'$, plyne $2|RD| = |AO| + |VM'|$ neboli

$$2y = u + 2\varepsilon(y\varepsilon + a) + c. \quad (3)$$

Odtud určíme

$$c = 2y(1 - \varepsilon^2) - 2\varepsilon a - u \quad (4)$$

nebo při zanedbání hodnoty ε^2 (malé veličiny druhého řádu)

$$c = 2y - u - 2\varepsilon a. \quad (5)$$

Povšimněme si souvislost s (1). Hodnotu c ze vztahu pro svislé zrcadlo pouze zmenšíme o výšku místa, v němž se nachází obraz A' bodu A . Kdybychom vzali toto tvrzení jako výchozí předpoklad, nemuseli jsme vztah (5) tak složitě odvozovat.

Vyčíslením zjistíme $c_1 = 139$ cm pro $a_1 = 0,5$ m, $c_2 = 114$ cm pro $a_2 = 3$ m. Závislost je lineární, zvětší-li Jana svou vzdálenost o 1 m, posune se její obraz o 10 cm výše.

K přesnějšímu výpočtu délky c vyjdeme z chodu paprsků na obr. 7. Pomocí pravoúhlých trojúhelníků MDP a DOP zjistíme

$$c = y - |PM|, \quad |PM| = a \tan(\alpha + 2\varepsilon) \quad \text{a} \quad \alpha = \arctan \frac{u - y}{a}. \quad (6)$$

Po dosazení daných hodnot vypočteme $c_1 = 138,9$ cm a $c_2 = 113,9$ cm. Výsledky zjištěné podle přibližného vztahu (5) jsou s přesností na tři platné číslice stejné.

b) Vzdálenost a , z níž se Jana v zrcadle uvidí od výšky $c = 90$ cm je obtížné vypočítat z přesných vztahů (6). Pomocí (5) však snadno nalezneme

$$a = \frac{1}{2\varepsilon}(2y - u - c) = 540 \text{ cm}.$$

Je to hodnota většinou již těžko dosažitelná v běžných obytných místnostech. Navíc by Jana viděla svůj obraz ve vzdálenosti 11,8 m, což by jí znesnadnilo pozorování detailů.

Zpětně můžeme pro $a = 540$ cm vyčíst c užitím rovností (6). Vyjde $c = 89,7$ cm, což se od původně zadané hodnoty liší jen o 3 mm.

Závěr

Zobrazování zrcadlem je zajímavé a didakticky dobře zpracované téma, viz například [1] a [2]. Proto nebylo cílem článku učivo rozšiřovat nebo jeho metodiku měnit. Spíše šlo o to poskytnout čtenáři několik námětů k zamyšlení nebo příležitostnému využití při výuce.

Literatura

- [1] Němec, P.: Zobrazení rovinným zrcadlem Fyzika 7 ZŠ, video, dostupné na <https://www.bing.com/videos/riverview/relatedvideo?q=rovinn%C3%A9+zrcadlo+youtube&mid=4D4E2CEF6A66A6A9606C4D4E2CEF6A66A6A9606C&FORM=VIRE>.
- [2] Lepil, O.: Fyzika pro gymnázia. Optika. 7. vydání, Prometheus, Praha, 2023.

Studium mionů pomocí mionového teleskopu

SAMUEL SOJKA – MIROSLAV MAŠLÁŇ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Kosmické záření je nedílnou součástí našich životů, jelikož každý okamžik skrze nás s největší pravděpodobností zrovna prochází některá z částic, která má prvopočátek hluboko ve vesmíru. Ačkoliv to naše životy nijak neovlivní, je možné vsudypřítomnost těchto částic využít k řadě vědeckých účelů. Přestože od prvního objevení těchto částic uplynulo již přes 100 let, stále objevujeme nové vlastnosti a způsoby využití těchto částic. Ať už se jedná o studium vesmíru, rozmanité aplikace v astrofyzice, či pro různé metody tomografie, kosmické záření je nedílnou součástí rozvoje fyziky v posledním století.