

ZPRÁVY

66. mezinárodní matematická olympiáda



Již 66. ročník Mezinárodní matematické olympiády (IMO) se konal ve dnech 10.–20. července v Austrálii v letovisku Sunshine Coast nedaleko Brisbane. Soutěže se zúčastnilo rekordních 630 soutěžících ze 110 států. Český tým přivezli jednu stříbrnou medaili a tři bronzové.

Jako první do Austrálie přiletěli vedoucí národních delegací. Jejich hlavním úkolem bylo vybrat šest soutěžních úloh z takzvaného shortlistu, který na základě 235 úloh navržených jednotlivými státy připravila Problem Selection Committee. Mezi 31 úlohami v tomto shortlistu, které byly tradičně rozděleny do čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie, teorie čísel), byly i dva české návrhy od *Patrika Baka* a *Michala Janíka*, ale ani jeden z nich se nakonec pro soutěž nepoužil.

Zadání šesti soutěžních úloh najdete na konci této zprávy. Kromě výběru úloh a schvalování bodovacích schémat letos vedoucí strávili notnou dobu i debatováním o dlouhodobém směřování IMO. Mimo jiné bylo odhlasováno, že od příštího ročníku se mohou v shortlistu objevovat i úlohy o komplexních číslech – nepředpokládá se ovšem, že by vedoucí takové úlohy hned příští rok vybrali pro ostrou soutěž.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí dorazili do Austrálie o tři dny později. Po krátké prohlídce Brisbane se přesunuli na ubytování, které bylo zajištěno v příjemném resortu Novotel. Resort kromě kajakování na laguně a kopání tunelu do Evropy na přilehlé pláži nabízel i interakci s volně se pohybujícími klokany. Vlastní soutěž proběhla 15. a 16. července. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tři obtížných úloh. Za každou z nich mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že zhruba polovina soutěžících si z olympiády přiveze medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Soutěžící, kteří zcela správně vyřeší alespoň jednu úlohu, obdrží čestná uznání (HM).

Českou republiku reprezentoval šestičlenný tým ve složení: *Erik Ježek* (Smíchovská SPŠ a G, Praha), *Jakub Trčka* (G J. Keplera, Praha), *David Hromádka* (G Nad Alejí, Praha), *Pa-vel Hyánek* (G Brno, třída Kapitána Jaroše), *Mikuláš Jandík* (G Christiana

Dopplera, Praha) a *Veronika Menšíková* (Arcibiskupské G, Praha). Vedoucím týmu byl *Josef Tkadlec* z Informatického ústavu MFF UK v Praze a pedagogickým vedoucím byl *Pavel Calábek* z PrF UP v Olomouci.



České reprezentační družstvo, zleva: Josef Tkadlec (vedoucí), Pavel Hyánek (bronz), Mikuláš Jandík (čestné uznání), Erik Ježek (stříbro), David Hromádka (bronz), Pavel Calábek (pedagogický vedoucí), Veronika Menšíková (čestné uznání), Jakub Trčka (bronz)

Výsledky našich soutěžících v jednotlivých úlohách:

Umístění	Úloha	1	2	3	4	5	6
81.–87. Erik Ježek		7	7	5	7	7	0
187.–202. Jakub Trčka		6	7	0	7	6	0
272.–290. David Hromádka		7	7	0	7	0	0
272.–290. Pavel Hyánek		7	1	0	6	7	0
334.–345. Mikuláš Jandík		7	0	1	5	4	0
346.–365. Veronika Menšíková		7	1	0	7	1	0

Zlato se letos udělovalo za zisk alespoň 35 bodů, stříbro za 28 bodů a bronz za 19 bodů. Tyto hranice byly nezvykle vysoké – v 9 z předchozích 10 ročníků by Erik za 33 bodů bral zlato a Kuba by za 26 bodů bral stříbro.

V neoficiálním pořadí týmů obsadila Česká republika se ziskem 134 bodů 41. příčku hned za Slovenskem, které se s spolu s Jihoafrickou republikou a Novým Zélandem podělilo o 38.–40. místo. Zvítězila jako obvykle Čína, jejíž reprezentanti všichni bezchybně vyřešili každou z prvních pěti úloh (totéž se mimo jiné podařilo i některým jazykovým modelům). Šestá úloha se ukázala výrazně obtížnější. Celkem ji vyřešilo jen 6 soutěžících, z toho 5 vyřešilo všechny úlohy a dosáhlo tak maximálního možného počtu 42 bodů. Jediným dalším úspěšným řešitelem šesté úlohy byl Slovák Matej Bachníček. Kompletní výsledky jsou dostupné na adrese imo-official.org.

Organizátoři soutěže si dali záležet na tom, aby byl tento ročník opravdu australský. V anglických zadáních se tak hra s nerovnostmi v páté soutěžní úloze jmenovala „inekoalaty game“ a funkcím ze třetí úlohy se říkalo „bonza“ (australský slang pro „prvotřídní“). Ve volnočasovém programu po soutěži se pak vyskytovaly položky jako exkurze do zábavního parku „Aussie World“, návštěva zoo s klokany, koalami a krokodýly nebo vyslechnutí přednášek Terence Taa (rodáka z Adelaide a držitele Fieldsovy medaile) a Burckharda Polstera (profesora na univerzitě v Melbourne a YouTubera z kanálu Mathologer).

Následující ročníky Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnily v Číně (2026), v Maďarsku (2027) a v Saudské Arábii (2028).

Na závěr uvádíme *texty soutěžních úloh* (v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla).

1. Řekneme, že přímka v rovině je *slunečná*, pokud není rovnoběžná ani s osou x , ani s osou y , ani s přímkou $x + y = 0$. Je dáno celé číslo $n \geq 3$. Určete všechna nezáporná celá čísla k , pro něž existuje n navzájem různých přímek v rovině takových, že:

- pro každá dvě kladná celá čísla a a b splňující $a + b \leq n + 1$ platí, že bod (a, b) leží na aspoň jedné z těchto n přímek; a
- přesně k z těchto n přímek je slunečných. (USA)

2. Jsou dány kružnice Ω a Γ se středy po řadě M a N takové, že poloměr kružnice Ω je menší než poloměr kružnice Γ . Předpokládejme, že kružnice Ω a Γ se protínají ve dvou bodech A a B . Přímka MN protíná kružnici Ω v bodě C a kružnici Γ v bodě D tak, že body C, M, N, D leží na přímce v tomto pořadí. Označme P střed kružnice opsané trojúhelníku ACD . Přímka AP protíná kružnici Ω podruhé v bodě $E \neq A$ a kružnici Γ podruhé v bodě $F \neq A$. Označme H průsečík výšek trojúhelníku PMN . Dokažte, že rovnoběžka s AP vedená bodem H se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BEF .

(Vietnam)

3. Označme $\mathbb{N}$ množinu kladných celých čísel. Řekneme, že funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je *senza*, jestliže pro všechna kladná celá čísla a a b platí, že

$$f(a) \text{ je dělitelem } b^a - f(b)^{f(a)}.$$

Určete nejmenší reálnou konstantu c takovou, že pro každou senza funkci f a každé kladné celé číslo n platí $f(n) \leq cn$. (Kolumbie)

4. Řekneme, že kladný dělitel kladného celého čísla m je *ostrý*, pokud je různý od m . Uvažujme nekonečnou posloupnost $(a_1, a_2, \dots)$ kladných celých čísel, z nichž každé má alespoň tři ostré dělitele. Pro každé $n \geq 1$ platí, že číslo a_{n+1} je součtem tří největších ostrých dělitelů čísla a_n . Určete všechny možné hodnoty a_1 . (Litva)

5. Alice a Bob hrají hru, jejíž pravidla závisí na kladném reálném čísle λ , známém oběma hráčům. V n -tém kole hry (počínaje $n = 1$) se stane toto:

- Je-li n liché, Alice vybere nezáporné reálné číslo x_n takové, že $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n$.
- Je-li n sudé, Bob vybere nezáporné reálné číslo x_n takové, že $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n$.

Pokud hráč nemůže vybrat takové číslo x_n , hra končí a vyhrává jeho soupeř. Pokud hra pokračuje donekonečna, nevyhrává žádný z hráčů. Všechna vybraná čísla jsou známa oběma hráčům. Určete všechny hodnoty λ , pro které má Alice vítěznou strategii, a také všechny hodnoty λ , pro které má vítěznou strategii Bob. (Itálie)

6. Matylda chce do čtvercové tabulky 2025×2025 rozmístit několik dlaždic tak, že každá dlaždice je obdélník nebo čtverec, každá dlaždice přesně zakrývá několik políček tabulky a dlaždice se navzájem nepřekrývají. Určete nejmenší počet dlaždic, které Matylda musí rozmístit, aby v každém řádku a každém sloupci zůstalo přesně jedno políčko nezakryté. (Singapur)

Josef Tkadlec