MATEMATIKA

Abeceda řešení funkcionálních rovnic

PAVEL CALÁBEK – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Tento příspěvek lze považovat za volné pokračování článku [1] obou autorů, který byl zveřejněn v našem časopise v roce 2000. V tomto navazujícím příspěvku se čtenář seznámí s některými důležitými poznatky z oblasti řešení tzv. *funkcionálních rovnic*. Přestože uvedená problematika výrazně překračuje rámec vzdělávacích plánů pro výuku matematiky na střední škole, naši žáci (a potažmo i jejich učitelé) se s řešením funkcionálních rovnic setkávají stále častěji v nejrůznějších středoškolských matematických soutěží (Matematická olympiáda, Matematický klokan, matematické korespondenční semináře atd.). Ukazuje se tak, že je velmi důležité a současně prospěšné kultivovat matematické znalosti a dovednosti našich matematicky nadaných středoškoláků také v této (nadstandardní) oblasti školské matematiky. Náš článek si klade za cíl objasnit čtenářům některé postupy a metody řešení matematických úloh výše uvedeného typu. Předpokládáme pouze, že čtenář je dostatečně obeznámen s pojmem a základními vlastnostmi funkce reálné proměnné v rozsahu učebnic pro střední školy. Symbolem $\mathbb{R}$ budeme značit množinu všech reálných čísel, symbolem $\mathbb{R}^+$ množinu všech kladných reálných čísel, tj. interval $(0; +\infty)$ a symbolem $\mathbb{R}_0^+$ množinu všech nezáporných reálných čísel, tj. interval $\langle 0; +\infty)$. Platí tedy $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Připomínáme dále, že *funkcionální rovnicí* budeme rozumět takovou rovnici, kde neznámou je hledaná *funkce* s daným *definičním oborem* $D \subset \mathbb{R}$ a daným *oborem hodnot* $H \subset \mathbb{R}$. Jejím *řešením* je každá funkce, která je zobrazením D do H a současně vyhovuje dané funkcionální rovnici, viz např. [1].

Popis funkcionální rovnice

Při vlastním řešení funkcionálních rovnic je nutno důsledně respektovat zadané podminky, neboť jakákoliv (byť na první pohled velmi malá) změna např. v popisu rovnice nebo v zadání definičního oboru, popř. oboru hodnot hledané funkce, vede k překvapivým změnám v systému řešení zadané funkcionální rovnice. Následující dva příklady jsou toho důkazem.

Příklad 1

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, které pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ splňují podmínku

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Řešení. Vzhledem k tomu, že daný vztah platí pro všechna nezáporná reálná čísla x a y, musí platit speciálně i pro $y = 0$ (specifikace proměnné y). Pro všechna nezáporná reálná x tudíž platí

$$f(0) = f(x \cdot 0) = f(x) + f(0), \qquad \text{tj.} \qquad f(x) = 0.$$

Protože k nalezenému výsledku jsme dospěli na základě důsledkové úpravy[1], je potřeba provést zkoušku, která je součástí řešení úlohy. Pomocí ní se snadno přesvědčíme, že funkce $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}_0^+$ je skutečně za uvedených podmínek jediným řešením dané funkcionální rovnice.

Poznámka 1. Pokud bychom zadání úlohy pozměnili a hledali bychom funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, které vyhovují téže funkcionální rovnici (jejich definiční obor neobsahuje $x = 0$), pak množina jejích řešení obsahuje také např. každou logaritmickou funkci $f(x) = \log_a x$, kde $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a dále celou třídu nespojitých funkcí. Lze však ukázat, že jedinými spojitými funkcemi, které této pozměněné úloze vyhovují, je konstantní nulová funkce a dále všechny výše uvedené logaritmické funkce, viz např. [3].

Z uvedeného příkladu je patrné, že malá změna v zadání definičního oboru může znamenat výrazné změny v množině řešení dané funkcionální

[1] Specifikací proměnných (tj. užitím vhodné substituce) se množina všech řešení dané funkcionální rovnice „rozšiřuje“.

rovnice. Přesněji, jakékoliv zúžení definičního oboru hledané funkce vede vždy k „rozšíření“ systému řešení dané funkcionální rovnice. Tato změna může být výrazná, jak ukazuje předešlý příklad.

Následující příklad je typickou ukázkou analogického tvrzení i pro (malou) změnu oboru hodnot dané funkcionální rovnice.

Příklad 2

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f^2(x) = 1.$$

Řešení. Snadno vidíme, že řešením této funkcionální rovnice je libovolná reálná funkce s oborem hodnot $H = \{-1; 1\}$. Např. tedy funkce $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ nebo $f(x) = -1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, popř. funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro všechna } x \text{ racionální} \\ -1 & \text{pro všechna } x \text{ iracionální} \end{cases}$$

apod. Vidíme tedy, že daná funkcionální rovnice má nekonečně mnoho řešení.

Poznámka 2. Pokud v zadání této úlohy změníme obor hodnot hledané funkce a budeme hledat např. všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ vyhovující téže funkcionální rovnici, snadno zjistíme, že jejím jediným řešením je funkce $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Uvedený výsledek ilustruje rovněž významnou (avšak očekávatelnou) skutečnost: Zúžení oboru hodnot hledané funkce může vést ve smyslu inkluze ke „zmenšení“ množiny řešení dané funkcionální rovnice.

V další části se zaměříme na popis dvou základních metod řešení funkcionálních rovnic. Žádná z nich však nepředstavuje univerzální prostředek jejich řešení.

Metoda specifikace proměnných (substituční metoda)

Specifikujeme-li některé proměnné, tj. dosadíme-li speciální hodnoty v argumentech proměnné dané funkcionální rovnice, „rozšíříme“ množinu možných řešení, viz řešení příkladu 1. Specifikace proměnných má charakter důsledkové úpravy a při jejím použití je proto zkouška součástí řešení. Dále pak zpravidla najdeme hodnotu funkce v některém bodě definičního oboru a pomocí ní následně určíme vlastnosti a tvar hledané funkce. Pomocí těchto kroků pak určíme další potřebné hodnoty a specifické vlastnosti hledané funkce.

Je zřejmé, že specifikovat při řešení funkcionální rovnice můžeme i několik proměnných (parametrů) současně. Funkcionální rovnice často obsahují jako proměnnou v hledané funkci výraz, který obsahuje několik pomocných proměnných (parametrů), pomocí nichž je hodnota proměnné vytvořena. Cílem specifikace proměnných je snížení jejich počtu. Uvedená metoda je přitom základem celé řady dalších metod, které lze efektivně využít při řešení funkcionálních rovnic.

Celý postup osvětlíme při řešení následujících dvou funkcionálních rovnic.

Příklad 3

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) \cdot f(y) - f(xy) = x + y.$$

Řešení. Položme nejprve $x = y = 0$. Odtud po snadné úpravě dostaneme $f(0)(f(0) - 1) = 0$. Je tedy buď $f(0) = 0$, nebo $f(0) = 1$.

Předpokládejme nejprve, že $f(0) = 0$. Substitucí $y = 0$ dostaneme na levé straně dané rovnice

$$f(x) \cdot f(0) - f(x \cdot 0) = 0,$$

kdežto na straně pravé

$$x + 0 = x,$$

což znamená, že případ $f(0) = 0$ neposkytuje žádné řešení dané funkcionální rovnice.

Nechť tedy $f(0) = 1$. Podobně i zde použijeme substituci $y = 0$ a dostaneme

$$f(x) \cdot f(0) - f(x \cdot 0) = x + 0.$$

Odtud již přímo plyne $f(x) = x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Závěr. Zkouškou se přesvědčíme, že nalezená funkce $f(x) = x + 1$ je jediným řešením dané funkcionální rovnice.

Příklad 4

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2.$$

Řešení. Speciální volbou (specifikací proměnných) $x = 0$ a $y = 0$ dostaneme $-2f(0) = -2$, tedy $f(0) = 1$. Tímto dosazením jsme zjistili, že pro každou funkci f, která je řešením dané funkcionální rovnice, platí $f(0) = 1$.

Opět využijeme metodu specifikace proměnných tak, že v dané funkcionální rovnici položíme $x = 0$. Dostaneme tak

$$f(y) - 2f(-y) + f(0) - 2f(y) = y - 2,$$

což po úpravě dává

$$f(y) + 2f(-y) = y - 3. \tag{1}$$

Uvedený vztah však obsahuje hledanou funkci f s dvěma různými argumenty (y a $-y$), což v tomto okamžiku nedává možnost nalezení explicitního vyjádření pro popis hledané funkce f.

Lze však postupovat následujícím způsobem (opětovné využití metody specifikace proměnných). Nechť t je libovolné reálné číslo. Protože vztah (1) platí pro všechna reálná čísla y, platí i pro $y = t$ a $y = -t$. Těmito dvěma volbami, reprezentujícími obvyklý postup, dospějeme ke vztahům

$$\begin{aligned} f(t) + 2f(-t) &= t - 3, \\ f(-t) + 2f(t) &= -t - 3. \end{aligned}$$

Na oba výše uvedené vztahy můžeme pohlížet jako na soustavu dvou lineárních rovnic s neznámými $f(t)$ a $f(-t)$. Jejím řešením dostaneme $f(t) = t + 1$ pro všechna reálná čísla t.

Provedením zkoušky

$$L = f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) =$$

$$= (x+y+1) - 2(x-y+1) + (x+1) - 2(y+1) = y - 2 = P$$

zjistíme, že $f(x) = x + 1$ (f je definovaná na $\mathbb{R}$).

Závěr. Jediným řešení dané funkcionální rovnice je funkce $f(x)=x+1$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$.

Využití symetrie proměnných

Při řešení funkcionálních rovnic lze poměrně často efektivně využít také symetrie některých dvou proměnných, a to *právě v jedné ze stran* zadané rovnice (nebo některé její části). V podobných úlohách je potřeba mnohdy předpokládat (nebo dokázat), že hledaná funkce je na daném definičním oboru *prostá*.[2]

Všimněme si, že v předešlém příkladu jsou symetrické vzhledem k oběma použitým proměnným x a y dokonce obě strany dané rovnice. Tato situace však neodpovídá (jak vzápětí uvidíme) možnosti využití následujícího postupu, který si objasníme přímo při řešení následujících dvou příkladů.

Příklad 5

Určete všechny prosté funkce $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x,y\in\mathbb{R}$ platí

$$f\bigl(f(x)+y\bigr)=f(x+y)+1.$$

Řešení. Snadno se vidí, že záměnou proměnných x a y, se nezmění levá strana dané rovnice (její pravá strana je *symetrická* v proměnných x a y). Vzhledem k tomu, že hledaná funkce je prostá (tj. nemůže nabývat ve dvou různých bodech svého definičního oboru téže hodnoty), musí být rovny i argumenty odpovídajících levých stran dané rovnice pro dvojice proměnných (x,y) a (y,x), platí

$$f(x)+y=f(y)+x \tag{2}$$

pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$.

Pro určení funkční hodnoty v bodě $x=0$ definičního oboru hledané funkce položme $f(0)=c$, kde $c\in\mathbb{R}$. Užitím metody specifikace proměnných, tj. použitím substituce $y=0$ ve vztahu (2), dostaneme $f(x)=x+c$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$ (c je reálný parametr).

[2] Řekneme, že funkce f je na daném definičním oboru D *prostá*, právě když platí: Pokud pro určitá $x,y\in D$ je splněna rovnost $f(x)=f(y)$, pak $x=y$.

Provedením zkoušky zjistíme, že levá strana L dané funkcionální rovnice má tvar

$$L = f(f(x) + y) = f((x + c) + y) = x + y + 2c$$

a její pravá strana P je ve tvaru

$$P = f(x + y) + 1 = (x + y + c) + 1 = x + y + c + 1.$$

Porovnáním obou stran zjistíme, že $L = P$, právě když $c = 1$ (pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$).

Závěr. Jediným řešení dané funkcionální rovnice je funkce $f(x) = x+1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 6

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f\big(f(x) + f(y) + f(xy)\big) = x + f(y).$$

Řešení. Argument funkce f na levé straně dané funkcionální rovnice je symetrickým výrazem vzhledem k oběma použitým proměnným x, y. Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ tudíž platí $x + f(y) = y + f(x)$. Využitím stejného postupu jako v předešlém příkladě dostaneme $f(x) = x + c$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Dosazením nalezené funkce do výrazů na obou stranách dané funkcionální rovnice (tj. provedením zkoušky) zjistíme, že

$$L = f\big(f(x) + f(y) + f(xy)\big) = x + y + xy + 4c$$

a

$$P = x + f(y) = x + y + c,$$

což však znamená, že neexistuje reálný parametr c takový, aby pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platilo $L = P$.

Závěr. Daná funkcionionální rovnice *nemá* řešení.

V současné době se naši středoškoláci s problematikou řešení funkcionální rovnic setkávají poměrně hojně, o čemž svědčí vysoká frekvence zařazení úloh podobného typu v finálových částech národních matematických soutěží (MO) a rovněž ve všech mezinárodních středoškolských matematických soutěží, viz např. [6].

Čtenářům, které tato problematika zaujala, lze k rozšíření jejich obzoru znalostí doporučit především publikace [2], [5], případně oficiální stránky naší MO [6]. Dále pak lze využít veškerou českou literaturu staršího data uvedenou v [1], která je zaměřena na problematiku funkcionálních rovnic.

K procvičení uvedené tematiky uvádíme pro zájemce několik dalších neřešených úloh.

Příklad 7

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) + 2f(x-y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2.$$

[Návod: Neprve určete $f(0)$. Jediným řešením je funkce $f(x) = x^2$.]

Příklad 8

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f^2(x)f(y) = f(x-y).$$

[Úplné řešení této úlohy lze najít v publikaci [4], str. 59.]

Příklad 9

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) + y = f(f(x) + f(y)) - 1.$$

[Návod: Využijte symetrie pravé strany. Jediným řešením je $f(x) = x + 1$.]

Příklad 10

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ splňují rovnici

$$f\bigl(xf(y)\bigr) = f(xy) + x.$$

[Úplné řešení lze najít např. v [6] — 51. ročník MO, úloha A–III–6.]

Literatura

[1] *Calábek, P. – Švrček, J.*: Úvod do řešení funkcionálních rovnic. MFI, roč. 10 (2000/01), č. 3.

[2] *Engel, A.*: Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag, New York, Inc., 1998.

[3] *Kuczma, M.*: An introduction to the theory of functional equations and inequalities (Cauchy equation and Jensen inequality). PWN, Uniwersytet Ślcaski, Warszawa–Krakow–Katowice, 1985.

[4] *Švrček, J. – Calábek, P.*: Sbírka netradičních matematických úloh. Prometheus, Praha, 2007.

[5] *Tabov, J. – Kolev, E. – Taylor, P.*: Methods of Problem Solving. Australian Mathematics Trust, 2012.

[6] http://www.math.muni.cz/mo

Číselné posloupnosti a věšení záclon

KAREL PAZOUREK

Gymnázium Třeboň

V tomto článku popíšeme zajímavou úlohu (inspirovanou reálnou situací), kterou vyřešíme využitím některých známých faktů týkajících se číselných posloupností a dále znalosti součtu několika prvních členů geometrické posloupnosti.

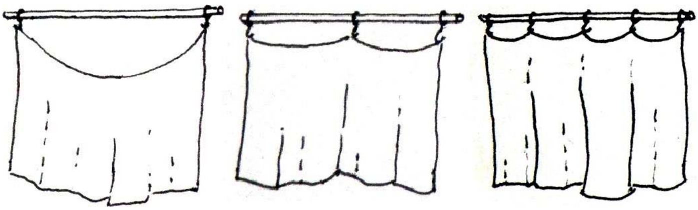
Zadání úlohy je následující: *Chceme pověsit záclonu tak, aby háčky, na nichž záclona visí, byly rozmístěny v pravidelných rozestupech. Kolik háčků můžeme použít?*

1. Jak věšíme záclony

Přirozený způsob věšení záclon je následující:

V prvním kroku pověsíme záclonu v obou krajních cípech (obr. 1, vlevo), potřebujeme k tomu 2 háčky. Ve druhém kroku přidáme jeden háček uprostřed (obr. 1, uprostřed), použili jsme tak celkově 3 háčky.

V dalších krocích vždy každý oblouk záclony přidáním jednoho háčku rozpůlíme, dostaneme tak z každého oblouku vždy dva shodné menší oblouky. Kolik háčků je potřeba?



Obr. 1

Označme h_n počet háčků použitých v n-tém kroku. Každý oblouk záclony má vždy jeden háček vlevo, navíc jeden háček musíme započítat za pravý krajní cíp záclony. Počet „levých" háčků uvažovaných oblouků se v každém kroku zdvojnásobí. Jestliže v n-tém kroku bylo použitých „levých" háčků $h_n - 1$, v $(n+1)$-ním kroku jich bude $2(h_n - 1) = 2h_n - 2$. Pro počet háčků h_{n+1} použitých v $(n+1)$-ním kroku tak dostáváme rekurentní vztah

$$h_{n+1} = (2h_n - 2) + 1 = 2h_n - 1. \tag{1}$$

Posloupnost $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ je tedy definována rekurentně vztahy

$$h_1 = 2, \quad h_{n+1} = 2h_n - 1 \text{ pro každé } n \text{ přirozené.}$$

Prvních devět členů této posloupnosti je uvedeno v následující tabulce:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h_k	2	3	5	9	17	33	65	129	257

2. Odvození vzorce pro n-tý člen pomocí rekurentního vztahu

Vypišme si vztahy pro členy h_n, h_{n-1}, h_{n-2}, …, h_3, h_2 a h_1 uvažované posloupnosti

$$\begin{aligned} h_n &= 2h_{n-1} - 1, \\ h_{n-1} &= 2h_{n-2} - 1, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h_{n-2} &= 2h_{n-3} - 1,\\
&\vdots\\
h_3 &= 2h_2 - 1,\\
h_2 &= 2h_1 - 1,\\
h_1 &= 2.
\end{aligned}
$$

Sečtením výše uvedených rovností dostaneme

$$
h_n + h_{n-1} + h_{n-2} + \ldots + h_3 + h_2 + h_1 =
$$

$$
= 2\,(h_{n-1} + h_{n-2} + h_{n-3} + \ldots + h_2 + h_1) + 2 - (n-1),
$$

tedy

$$
h_n + \sum_{k=1}^{n-1} h_k = 2\sum_{k=1}^{n-1} h_k - n + 3,
$$

a po snadné úpravě pak

$$
h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k - n + 3. \tag{2}
$$

Ke stanovení hodnoty h_n lze však použít také následující postup: Druhou rovnost uvažovaného systému výše uvedených rovností vynásobíme číslem 2, třetí 2^2, čtvrtou 2^3, atd., až předposlední rovnost vynásobíme 2^{n-2} a poslední z nich číslem 2^{n-1}. Dostaneme tak

$$
\begin{aligned}
h_n &= 2h_{n-1} - 1,\\
2 \cdot h_{n-1} &= 2^2 \cdot h_{n-2} - 2,\\
2^2 \cdot h_{n-2} &= 2^3 \cdot h_{n-3} - 2^2,\\
&\vdots\\
2^{n-3} \cdot h_3 &= 2^{n-2} \cdot h_2 - 2^{n-3},\\
2^{n-2} \cdot h_2 &= 2^{n-1} \cdot h_1 - 2^{n-2},\\
2^{n-1} \cdot h_1 &= 2^n.
\end{aligned}
$$

Sečtením všech těchto rovností dostaneme po snadné úpravě

$$
h_n = 2^n - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-3} + 2^{n-2}). \tag{3}
$$

Výraz v závorce na pravé straně ve vztahu (3) představuje součet $n-1$ členů geometrické posloupnosti s kvocientem 2 a prvním členem 1. Užitím známého vzorce pro součet prvních $n-1$ členů geometrické posloupnosti tak obdržíme

$$h_n = 2^n - \frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^n - 2^{n-1} + 1 = 2^{n-1} + 1.$$

Explicitní vyjádření (předpis) pro n-tý člen zkoumané číselné posloupnosti $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ je tedy $h_n = 2^{n-1} + 1$.

3. Přímý výpočet vzorce pro n-tý člen

V této části odvodíme formuli pro počet háčků v n-tém kroku přímým výpočtem, tj. bez použití rekurentního vztahu. Zaměřme se na počet oblouků, které tvoří záclona mezi dvěma sousedními háčky v jednotlivých krocích. V prvním kroku je oblouk jediný, v dalších krocích se jejich počet vždy zvojnásobuje. Jedná se tedy o posloupnost $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots$, která je tvořena mocninami dvojky. Její n-tý člen je tedy 2^{n-1}. Přitom v každém kroku je počet háčků o 1 větší než počet oblouků. Tudíž počet háčků v n-tém kroku je

$$h_n = 2^{n-1} + 1.$$

Tento postup je výrazně kratší a současně technicky méně náročný. Zjednodušení spočívá v přechodu k výpočtu (vyjádření) kvalitativně jiné hodnoty, jež je s hledaným počtem h_n spjata jednoduchým vztahem. Dokázali jsme tak dvěma odlišnými způsoby následující tvrzení.

Věta

Pro libovolné přirozené číslo n platí: Počet h_n použitých háčků při věšení záclony popsaným (běžným) způsobem v n-tém kroku je dán vztahem

$$h_n = 2^{n-1} + 1, \tag{4}$$

4. Užití principu matematické indukce

Tvrzení předešlé věty lze dokázat také užitím principu matematické indukce vzhledem k n.

(i) Pro $n = 1$ dané tvrzení platí, neboť evidentně $h_1 = 2 = 2^{1-1} + 1$.

(ii) Předpokládejme, že dané tvrzení platí pro určité $n = k$ přirozené, kde $k \geq 1$. Ukážeme, že platí i pro $n = k+1$. Předpokládejme, že hledaný počet háčků v k-tém kroku je $h_k = 2^{k-1} + 1$. Vzhledem k tomu, že se v každém kroku počet háčků zdvojnásobí a současně se tato hodnota zmenší o 1 (jedná se v podstatě o využití rekurentního vztahu (1)), platí pro počet háčků v $(k+1)$-tém kroku

$$h_{k+1} = 2h_k - 1 = 2\left(2^{k-1} + 1\right) - 1 = 2^k + 1.$$

Tím jsme ověřili, že uvedený vztah platí i pro $n = k + 1$.

Současným využitím kroků (i) a (ii) jsme tak dokázali (užitím principu matematické indukce) platnost vztahu (4).

5. Výpočet součtu $\sum_{k=1}^{n} h_k$

Ze vztahu (2) bezprostředně plyne

$$\sum_{k=1}^{n-1} h_k = h_n + n - 3 = (2^{n-1} + 1) + n - 3 = 2^{n-1} + n - 2\,.$$

Ke stejnému výsledku dospějeme i bez použití vztahu (2). Postačí nám k tomu znalost odvozeného vzorce pro n-tý člen posloupnosti $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ a dále znalost součtu několika prvních členů geometrické posloupnosti. Platí tak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} h_k &= h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_{n-1} = \\
&= (2^0 + 1) + (2^1 + 1) + (2^2 + 1) + \ldots + (2^{n-2} + 1) = \\
&= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2}) + n - 1 = \\
&= \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + n - 1 = 2^{n-1} + n - 2.
\end{aligned}$$

Chceme-li stanovit součet prvních n členů posloupnosti $(h_n)_{n=1}^{\infty}$, přejdeme v odvozené rovnosti od $n-1$ k n. Dostaneme tak přímo formuli pro součet prvních n členů uvažované posloupnosti, kde

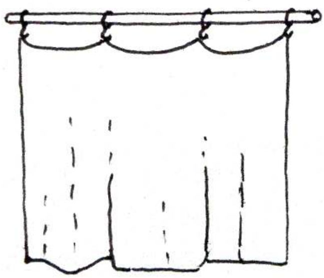
$$\sum_{k=1}^{n} h_k = 2^n + n - 1.$$

Na závěr uvádíme pro zájemce následující úlohu, která je zobecněním úlohy vyřešené v tomto příspěvku. Vyjděme ze situace, kdy záclona je už v prvním kroku zavěšena na několika háčcích, z nichž každé dva sousední jsou od sebe stejně vzdáleny.

Příklad

Najděte rekurentní zadání a vzorec pro n-tý člen posloupnosti $(h'_n)_{n=1}^{\infty}$ počtu háčků, jestliže

a) $h'_1 = 4$ (viz obr. 2),



Obr. 2

b) $h'_1 = p$, kde p je libovolné přirozené číslo.

Ověřte dále, že pokud za p zvolíme tzv. *Fermatovo číslo*, tj. přirozené číslo tvaru $2^{2^n} + 1$, viz např.[1], obdržíme podposloupnost zkoumané posloupnosti $(h_n)_{n=1}^{\infty}$.

Literatura

[1] *Křížek, M. – Somer, L. – Šolcová, A.*: Kouzlo čísel (2. upravené vydání). Academia, Praha, 2011.

Několik nerovností pro číslo $n!$

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

O čísle $n!$ (n-faktoriál) je středoškolákům známo, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$ je rovno součinu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ a že pro $n = 1$ a $n = 0$ se definuje $1! = 0! = 1$. Vědí rovněž, že toto číslo určuje počet všech permutací z n prvků.

V následujícím textu dokážeme čtyři zajímavé nerovnosti, v nichž číslo $n!$ figuruje. Jsme současně přesvědčeni o tom, že pro některé středoškoláky by tyto důkazy mohly být užitečným cvičením.

Věta 1

Pro všechna přirozená čísla n platí

$$\sqrt{n^n} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Důkaz. K důkazu nerovnosti $\sqrt{n^n} \leq n!$ vyjádříme druhou mocninu čísla $n!$ jako součin n činitelů tvaru $k \cdot (n-k+1)$, kde přirozené číslo k se mění od 1 do n. Je tedy

$$(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdot \ldots \cdot (n \cdot 1).$$

Snadnou úpravou zjistíme, že

$$k(n-k+1) - n = (n-k)(k-1).$$

Vzhledem k tomu, že pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $(n-k)(k-1) \geq 0$, platí

$$k \cdot (n-k+1) \geq n.$$

Dosadíme-li do této nerovnosti postupně $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ dostaneme

$$1 \cdot n \geq n, \;\; 2 \cdot (n-1) \geq n, \;\; 3 \cdot (n-2) \geq n, \; \ldots, n \cdot 1 \geq n.$$

Odtud plyne

$$(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdot \ldots \cdot (n \cdot 1) \geq n^n,$$

neboli

$$\sqrt{n^n} \leq n!.$$

Důkaz nerovnosti

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

je velmi jednoduchý, známe-li vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem libovolných nezáporných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, přesněji nerovnost mezi oběma uvedenými průměry (tzv. AG-nerovnost). Platí totiž

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Dokazovaná nerovnost je pro $n = 1$ splněna triviálně a pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ je ekvivalentní s nerovností

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2},$$

která je však splněna na základě využití AG-nerovnosti pro čísla $1, 2, 3, \ldots, n$. Platí tedy

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

Tím je důkaz obou nerovností uzavřen.

Věta 2

Pro všechna přirozená čísla n platí

$$2^{n-1} \leq n! \leq \frac{n^n}{2^{n-1}}.$$

Důkaz. Platnost nerovnosti $2^{n-1} \leq n!$ je zřejmá téměř bezprostředně. Pro $n = 1$ a $n = 2$ platí a k jejímu ověření pro libovolné přirozené číslo $n > 2$ stačí mocninu 2^{n-1} i číslo $n!$ reprezentovat jako součin $n-1$ činitelů. Platí

$$2^{n-1} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \leq 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Nerovnost $n! \leq n^n/2^{n-1}$ platí pro $n = 1$ i pro $n = 2$. Pro libovolné $n > 2$ přirozené odhadneme výraz $(n-1)!$ užitím AG-nerovnosti pro dvojice čísel $(1, n-1)$, $(2, n-2)$, atd., až $(n-1, 1)$ následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
(n-1)! &= \sqrt{(n-1)!} \cdot \sqrt{(n-1)!} = \\
&= \sqrt{1 \cdot (n-1)} \cdot \sqrt{2 \cdot (n-2)} \cdot \sqrt{3 \cdot (n-3)} \cdot \ldots \cdot \sqrt{(n-1) \cdot 1} \leq \\
&\leq \frac{1 + (n-1)}{2} \cdot \frac{2 + (n-2)}{2} \cdot \frac{3 + (n-3)}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1) + 1}{2} = \\
&= \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Vynásobíme-li obě strany odvozené nerovnosti $(n-1)! \leq n^{n-1}/2^{n-1}$ číslem n, obdržíme bezprostředně dokazovanou pravou nerovnost.

Věta 3

Pro všechna přirozená čísla k, n, kde $k \leq n$, platí

$$k!(k+1)^{n-k} \leq n! \leq k!\, n^{n-k}.$$

Důkaz. Všimněme si nejprve, že dané nerovnosti jsou splněny pro $k = n$ a pro $k = n - 1$, tj. $n = k + 1$. Dále budeme tedy předpokládat (kromě $k \leq n$) že $k \neq n$ a $k \neq n - 1$. Umožní nám to vyjádřit mocniny $(k+1)^{n-k}$ a n^{n-k} ve tvaru součinu, neboť z uvedených předpokladů plyne $n - k \geq 2$. Dané nerovnosti jsou zřejmě ekvivalentní s nerovnostmi

$$(k+1)^{n-k} \leq \frac{n!}{k!} \leq n^{n-k}.$$

Vyjádříme-li v nich mocniny $(k+1)^{n-k}$ a n^k jako součin $n - k$ činitelů a zlomek $n!/k!$ zkrátíme výrazem $k!$, dostaneme

$$(k+1)(k+1)(k+1)\ldots(k+1) \leq (k+1)(k+2)(k+3)\ldots(n-1)n \leq n^{n-k}.$$

Protože každý činitel v součinu $(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(n-1)n$ je kromě prvního větší než $k+1$ a každý činitel tohoto součinu je kromě posledního menší než n, jsou uvedené nerovnosti splněny a důsledku toho platí také

$$(k+1)^{n-k} \leq \frac{n!}{k!} \leq n^{n-k},$$

neboli

$$k!(k+1)^{n-k} \leq n! \leq k!\, n^{n-k},$$

což jsme chtěli dokázat.

Intervaly, v nichž podle dokázaných nerovností leží číslo $n!$ jsou však poměrně široké. Připomeňme ještě, že lepší odhad dává tzv. *Stirlingův vzorec*, který pro dostatečně velká n určuje číslo $n!$ poměrně přesně.

$$n! \approx \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

kde konstanta e je základ přirozených logaritmů. Vystupuje i v následující větě, v níž ukážeme odhad pro součet převrácených hodnot čísel $n!$.

Věta 4

Pro všechna přirozená čísla n platí

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Důkaz. Vyjdeme z následující nerovnosti, která platí pro všechna přirozená čísla n:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$$

a každý ze zlomků $1/(k-1)k$ vyjádříme jako rozdíl zlomků $1/(k-1) - 1/k$. Dostaneme tak

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq$$

$$\leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n},$$

což jsme chtěli dokázat.

Uveďme pro úplnost, že se součtem převrácených hodnot čísel $n!$ se setkáváme při vyjádření Eulerova čísla e (které je základem přirozených logaritmů) nekonečnou řadou. Platí

$$\mathrm{e} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Všimněme si dále, že pro součet prvních $n+1$ členů (pro její $(n+1)$. částečný součet) podle právě dokázané nerovnosti platí

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leq 3-\frac{1}{n}\,.$$

To znamená, že číslo (konstanta) e je nejvýše rovno 3, což je ve shodě s tím, že jeho hodnota zaokrouhlená na deset desetinných míst je e = = 2,7182818285.

Literatura

[1] *Sivašinskij, I. Ch.*: Něravěnstva v zadačach (rusky). Nauka, Moskva, 1967.

[2] *Krečmar, V. A.*: Zadačnik po algebre (rusky). Nauka, Moskva, 1968.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojice nových úloh završující dvoustovku. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 2. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 199

Největší společný dělitel přirozených čísel a, b, c je 1. Dokažte tvrzení: Jsou-li

$$\frac{ab}{c},\quad \frac{bc}{a},\quad \frac{ca}{b}$$

celá čísla, pak jsou druhými mocninami vhodných přirozených čísel.

Ján Mazák

Úloha 200

Pro komplexní číslo z platí

$$z + \frac{1}{z} = -1.$$

Určete

$$z^{2013} + \frac{1}{z^{2013}}.$$

Stanislav Trávníček

Dále uvádíme řešení úloh 193 a 194, jejichž zadání byla zveřejněna ve druhém čísle tohoto (22.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 193

Dokažte, že soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \end{aligned}$$

s neznámými x, y, z a reálnými parametry a, b má reálné řešení, právě když platí

$$\left|\frac{a}{b}\right| \leq \sqrt{3}.$$

Jaroslav Švrček

Řešení. Z nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem reálných čísel x, y, z plyne

$$\left|\frac{a}{3}\right| = \left|\frac{x+y+z}{3}\right| \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = \left|\frac{b}{\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{b\sqrt{3}}{3}\right|,$$

odkud po úpravě přímo plyne nerovnost

$$\left|\frac{a}{b}\right| \leq \sqrt{3}.$$

Naopak z této nerovnosti plyne $\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{6}a^2 \geq 0$. Pak například trojice reálných čísel

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}a - \sqrt{\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{6}a^2}, \frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{6}a^2}\right)$$

reálným řešením dané soustavy, což ověříme dosazením.

Jiné řešení. Množinou všech bodů prostoru, jejichž souřadnice (x, y, z) vyhovují rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ je kulová plocha se středem $(0; 0; 0)$

a poloměrem $|b|$. Analogicky, množinou všech bodů prostoru, které vyhovují rovnici $x + y + z = a$ je rovina. Tato rovina protíná danou kulovou plochu (a tedy soustava rovnic má řešení), právě když je její vzdálenost od bodu $(0; 0; 0)$ nejvýše rovna poloměru koule $|b|$. Podle známého vzorce z analytické geometrie tedy

$$\left|\frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - a}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}\right| \leq |b|.$$

Snadnou úpravou tohoto vztahu dostaneme požadovanou nerovnost, tj.

$$\left|\frac{a}{b}\right| \leq \sqrt{3}.$$

Poznámka. Rovina $x + y + z = a$ prochází body $A_1 = (a; 0; 0)$, $A_2 = (0; a; 0)$ a $A_3(0; 0; a)$, které spolu s bodem $V = (0; 0; 0)$ tvoří pravidelný trojboký jehlan, jehož stěny u vrcholu V jsou navzájem kolmé. Vzdálenost vrcholu V od roviny $A_1A_2A_3$ pak můžeme také snadno vypočítat dvojím vyjádřením objemu jehlanu $A_1A_2A_3V$.

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Úloha 194

Žáci dostali za domácí úkol zvolit si tři kladná reálná čísla, pak vypočítat podíly libovolných dvou z nich, přičíst k nim třetí číslo a všech šest možných výsledků napsat do sešitu. Petr vypočítal čísla $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{10}{3}$, 4, $\frac{20}{3}$. Pan učitel se podíval na Petrovy výsledky a řekl, že má ve výpočtu chybu. Petr znovu zopakoval výpočty (teď už správně) a zjistil, že v jedné hodnotě opravdu chybu udělal. Jak mohl pan učitel bez znalosti tří Petrových čísel zjistit, že Petr udělal chybu? Se kterými čísly Petr počítal?

Pavel Calábek

Řešení. Označme Petrova zvolená čísla a, b, c a šest vypočtených (správných) výsledků A, B, C, D, E a F. Platí

$$\frac{a}{b} + c = A, \quad \text{neboli} \quad a + bc = Ab,$$

$$\frac{b}{c} + a = B, \quad \text{neboli} \quad b + ca = Bc,$$

$$\frac{c}{a} + b = C, \quad \text{neboli} \quad c + ab = Ca,$$

$$\frac{a}{c} + b = D, \quad \text{neboli} \quad a + cb = Dc,$$

$$\frac{c}{b} + a = E, \quad \text{neboli} \quad c + ba = Eb,$$

$$\frac{b}{a} + c = F, \quad \text{neboli} \quad b + ac = Fa.$$

Vynásobením prvních tří rovnic dostaneme

$$(a + bc)(b + ca)(c + ab) = AbBcCa.$$

Podobně vynásobením posledních tří rovnic dostaneme po úpravě

$$(a + bc)(b + ca)(c + ab) = DcFaEb.$$

Odtud již nutně platí $ABCabc = DEFabc$, tedy $ABC = DEF$. O šesti výsledcích tedy pan učitel ví, že mohou být správně, právě když součin některých tří z nich je roven součinu tří zbývajících. Pro konkrétní Petrovu šestici se může podívat na zlomky, jejichž čitatel či jmenovatel jsou dělitelné 3. Ty jsou tři $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{20}{3}$. Nikdy nemůže rozdělit Petrova čísla do dvou trojic tak, aby součin trojic měl ve jmenovateli stejnou mocninu čísla 3, proto Petr ve výpočtu chybil.

Nyní předpokládejme, že čísla a, b, c jsou označena tak, že Petr udělal chybu v šestém výpočtu. Z první a čtvrté rovnice plyne $Ab = a + bc = Dc$, tedy $\frac{b}{c} = \frac{D}{A}$. Ze druhé a páté rovnice plyne

$$B - \frac{D}{A} = B - \frac{b}{c} = a = E - \frac{c}{b} = E - \frac{A}{D},$$

neboli

$$B - E = \frac{D}{A} - \frac{A}{D}.$$

Vypočítejme všechny rozdíly dvou Petrových výsledků (stačí odečítat pouze menší číslo od většího). Dostaneme tak čísla

$$\frac{1}{6}, 2, \frac{17}{6}, \frac{7}{2}, \frac{37}{6}, \frac{11}{6}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 6, \frac{5}{6}, \frac{3}{2}, \frac{25}{6}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}.$$

Podobně vypočteme všechny možné hodnoty výrazu $\frac{D}{A} - \frac{A}{D}$ pro všechny možné Petrovy výsledky (stačí kladné). Dostaneme tak hodnoty

$$\frac{7}{12}, \frac{24}{5}, \frac{391}{60}, \frac{63}{8}, \frac{1591}{120}, \frac{209}{60}, \frac{24}{5}, \frac{35}{6}, \frac{99}{10}, \frac{7}{12}, \frac{39}{40}, \frac{55}{24}, \frac{11}{30}, \frac{3}{2}, \frac{16}{15}.$$

Zjistili jsme, že v obou řadách se nachází pouze číslo $\frac{3}{2}$. Přitom platí

$$\frac{3}{2} = 4 - \frac{5}{2} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{10}{3}} - \frac{\frac{10}{3}}{\frac{20}{3}}.$$

Pro čtveřice (A, B, D, E) tak mohou nastat dvě možnosti. Buď

$$(A, B, D, E) = \left(\frac{10}{3}, 4, \frac{20}{3}, \frac{5}{2}\right), \quad \text{nebo} \quad (A, B, D, E) = \left(\frac{20}{3}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, 4\right).$$

To znamená, že pro číslo $a = B - \frac{D}{A} = E - \frac{A}{D}$ v obou případech platí $a = 2$. Pro podíl $\frac{b}{c} = \frac{D}{A}$ platí buď $\frac{b}{c} = 2$, nebo $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$.

Třetí rovnici původní soustavy upravíme na tvar

$$b = \frac{Ca}{\frac{c}{b} + a},$$

kde C je jedno z čísel $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$. Pro $C = \frac{1}{2}$ dostaneme dvojice

$$(b, c) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$(b, c) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Pro $C = \frac{2}{3}$ podobně dostaneme dvojice

$$(b, c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

a

$$(b, c) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

První, druhá a čtvrtá dvojice jsou ovšem ve sporu s první rovnicí původní soustavy $\frac{a}{b} + c = A$.

Závěr: Petr zvolil čísla $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$ a chybu udělal ve výpočtu $\frac{b}{a} + c = \frac{5}{6}$, místo něj chybně napsal $\frac{1}{2}$.

Správné řešení zaslal *Jozef Mészáros* z Jelky.

FYZIKA

Experiment v učivu o kmitání elektromagnetického oscilátoru*

OLDŘICH LEPIL – FRANTIŠEK LÁTAL

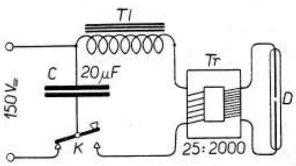
Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Jednou z možností výkladu dějů v elektromagnetickém oscilátoru v podobě jednoduchého obvodu LC je využití analogií mezi kmitáním elektromagnetického oscilátoru a mechanického oscilátoru (pružinového oscilátoru nebo kyvadla). Tato analogie je založena na shodě dějů přeměny energie elektrického pole kondenzátoru a magnetického pole cívky, kterou srovnáváme s přeměnou potenciální a kinetické energie kmitajícího mechanického oscilátoru. Tuto shodu vyjadřujeme matematicky analogickými rovnicemi, což je sice pro pochopení žáky složitější, ale tyto rovnice lze dobře využít při vytváření dynamických modelů kmitání oscilátoru, jak ještě ukážeme. Počítačový model ovšem nikdy plnohodnotně nenahradí reálnou demonstraci tohoto děje. Avšak při realizaci experimentu demonstrujícího kmitání elektromagnetického oscilátoru narazíme na určité problémy, které demonstraci znesnadňují, na rozdíl od demonstrace kmitání mechanického oscilátoru, což je záležitost zcela triviální.

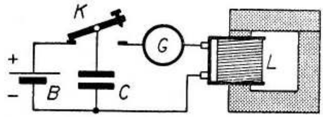
Při demonstraci kmitání elektromagnetického oscilátoru je třeba ukázat, že se kondenzátor obvodu LC periodicky nabíjí a vybíjí a že amplituda kmitání se vlivem odporu oscilačního obvodu postupně zmenšuje, dochází k tlumení kmitů, až kmitání zanikne. O demonstraci tohoto průběhu elektrických kmitů usiloval výklad učiva již v učebnicích vydávaných v 1. polovině 20. století. Např. v učebnici [1] je popsán experiment s tzv. *doutnav-*

* Podpořeno grantem ESF a Olomouckého kraje CZ.1.07/1.3.45/02.0027.

kovým oscilografem (obr. 1), kdy se kondenzátor nabitý na 150 V vybíjel přes tlumivku. Proud vznikajících oscilací byl transformován na napětí, při němž na elektrodách speciální doutnavky střídavě vznikal výboj, který byl pozorován pomocí rotujícího zrcadlového čtyřstěnu. Tento experiment ve variantě, v níž doutnavku nahradí jiskřiště, najdeme ještě v učebnicích vydaných v 50. letech 20. století, popř. je popsán obdobný pokus s nabíjením kondenzátoru, při němž se kmitání indikuje sériově připojeným galvanometrem ([2], obr. 2).

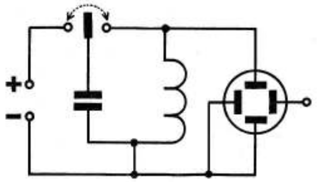


Obr. 1

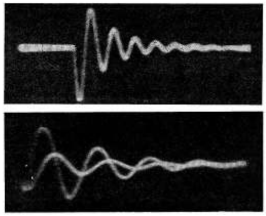


Obr. 2

Teprve v učebnici pro SVVŠ z roku 1965 [3] je poprvé uvedena modernější varianta experimentu, kterým je demonstrován nejen periodický průběh kmitání, ale i tlumení kmitů (obr. 3a). Pro demonstraci je použit osciloskop a v učebnici zobrazené oscilogramy tlumených kmitů, byly získány postupem, který je popsán v časopiseckém příspěvku [4]. Základní problém osciloskopické demonstrace elektrických kmitů spočívá v tom, že oscilační obvod musí tlumeně zakmitat v pravidelných intervalech synchronizovaných s periodou časové základny osciloskopu. K tomu účelu byl použit doutnavkový *relaxační oscilátor*, který pracuje tak, že se kondenzátor přístroje postupně nabíjí přes rezistor na zápalné napětí doutnavky připojené paralelně ke kondenzátoru. Jakmile je dosaženo zápalné napětí, vznikne v doutnavce výboj a kondenzátor se rychle vybije na napětí, při němž výboj zhasne. Děj se periodicky opakuje a napětí na kondenzátoru má přibližně pilový průběh. Toto napětí je přes tzv. *derivační člen* (obvod CR) přivedeno na výstup přístroje, přičemž se působením derivačního členu pilové napětí změní na sled strmých napěťových impulzů. Těmi se periodicky nabíjí kondenzátor oscilačního obvodu a po každém nabití obvod tlumeně zakmitá. Pokud je perioda napěťových impulzů shodná s periodou časové základny osciloskopu, získáme na obrazovce osciloskopu ustálený oscilogram tlumených kmitů, jehož záznam byl pořízen fotograficky (obr. 3b).



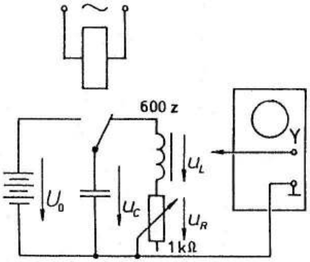
Obr. 3a



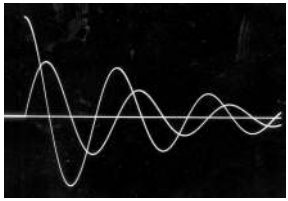
Obr. 3b

I když jde o metodu poměrně jednoduchou, problémem je synchronizace s časovou základnou, která je pro pozorování oscilogramu nezbytná. Tento problém bylo možné u většiny používaných oscilografů řešit využitím pilových kmitů generovaných přímo časovou základnou osciloskopu. Pilové napětí bývá obvykle vyvedeno na čelní panel osciloskopu, takže stačilo jen připojit mezi osciloskop a oscilační obvod derivační člen (v podstatě tuto funkci mohl plnit jen vazební kondenzátor mezi generátorem pilových kmitů a oscilačním obvodem) a relaxační oscilátor nebyl nutný. Toto jednoduché řešení však mělo jeden zásadní nedostatek. Oscilogram vznikal hned na začátku stopy elektronového paprsku, takže bylo poměrně obtížné zaznamenat kvalitně počátek kmitu napětí, popř. proudu a tím názorně ukázat fázový rozdíl mezi napětím a proudem v oscilačním obvodu (podrobněji viz [5], s. 152).

Odlišné řešení demonstrace navrhl *P. Šedivý* použitím citlivého polarizovaného relé, které bývalo součástí telefonních ústředen [6]. Jde o klasické uspořádání experimentu (obr. 4a), při němž se kondenzátor oscilačního obvodu periodicky nabíjí ze zdroje stejnosměrného napětí. Opakované nabíjení kondenzátoru zajišťuje kmitající kotva relé, jehož vinutí je napájeno ze zdroje malého síťového napětí s frekvencí 50 Hz. Kotva relé kmitá mezi dvěma kontakty tak, že při jedné polaritě půlperiody střídavého napětí se kondenzátor spojí se zdrojem stejnosměrného napětí a při opačné polaritě ve druhé půlperiodě se nabitý kondenzátor připojí k cívce a obvod zakmitá. Při frekvenci časové základny 25 Hz tak pozorujeme jeden průběh tlumeného kmitání. Jestliže současně snímáme napětí z celého obvodu (U_C) a napětí z rezistoru (U_R), které má stejnou fázi jako proud v obvodu, pozorujeme fázový posun napětí a proudu v obvodu (obr. 4b). Takto byly získány kvalitní oscilogramy, které byly použity v učebnici [7] a v učební pomůcce [8].



Obr. 4a



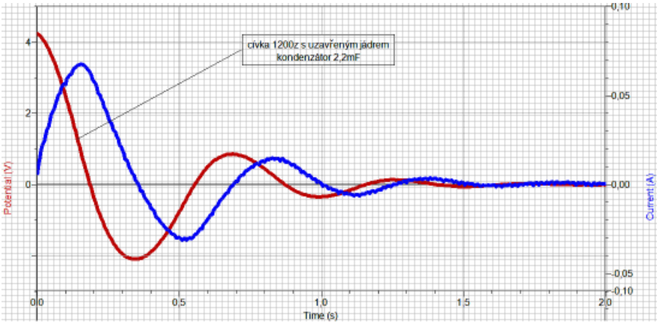
Obr. 4b

Demonstrace tlumených kmitů oscilačního obvodu je ovšem možná i bez použití osciloskopu. Jestliže je perioda kmitů dostatečně velká, je možné kmitání indikovat i citlivým demonstračním ručkovým ampérmetrem. K tomu je ale nutné použít kondenzátor o velké kapacitě a cívku s větším počtem závitů na uzavřeném jádře. Tato varianta s kondenzátorem o kapacitě 50 µF a dvěma cívkami s 12 000 závity je popsána v [9] (s. 347). Je pochopitelné, že cívka s tak velkým počtem závitů má značný odpor a tomu odpovídá i větší tlumení kmitů.

Zcela nové možnosti pro demonstraci kmitání elektromagnetického oscilátoru poskytují moderní systémy pro podporu experimentu počítačem. Většina těchto systémů umožňuje použít počítač jako paměťový osciloskop, takže odpadá potřeba opakovaného nabíjení a vybíjení kondenzátoru. Celý děj tak může proběhnout jen jednou a záznam se spouští automaticky přechodem snímaného napětí přes určitou nastavenou hodnotu (trigger).

Demonstrace klasicky uspořádaného experimentu s použitím systému Vernier je popsána např. v [10] (s. 206). Oscilační obvod tvoří cívka 1 200 závitů z rozkladného transformátoru s uzavřeným jádrem a kondenzátor o kapacitě C = 2,2 mF. Měřením byla zjištěna indukčnost cívky L = = 1,54 H. Odpor cívky není uveden, ale v [9] (s. 314) je pro tento typ cívky uvedena hodnota R = 16 Ω. Získaný oscilogram je na obr. 5 (převzato z [10]).

Znalost parametrů obvodu LC je významná tím, že určují *činitel jakosti* obvodu Q, na němž závisí doba, po kterou bude oscilační obvod kmitat, popř. kolik kmitů vykoná, než se kmitání utlumí. V praxi se obvykle uvažuje, že kmitání zaniklo, jestliže se energie kmitů zmenší 10^2krát a tedy jejich amplituda 10krát. Z teorie vyplývá (viz např. [11]), že činitel



Obr. 5

jakosti oscilačního obvodu s vlastní úhlovou frekvencí ω_0 souvisí s činitelem tlumení δ elektrických kmitů ($\delta = R/2L$)

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{Z_0}{R}, \tag{1}$$

kde Z_0 je tzv. *charakteristická impedance* oscilátoru.

Předpoklad zmenšení amplitudy 10krát bude splněn, když proběhne $n = 0{,}74Q$ kmitů. Poněvadž při demonstraci požadujeme, aby oscilátor kmital co nejdéle, bude nutné s ohledem na hodnotu činitele jakosti volit parametry jednotlivých obvodových prvků. Např. velká hodnota kapacity kondenzátoru má za následek malou hodnotu charakteristické impedance a tím i činitele Q. Podobně nepříznivě ovlivňuje hodnotu Q velikost odporu cívky. Proto je vhodnější použít při demonstraci raději kondenzátor o menší kapacitě. Tím se ovšem zvětší frekvence kmitání, ale při demonstraci podporované počítačem to nehraje roli. Cívka s velkým počtem závitů má obvykle také větší odpor, takže musíme volit kompromis mezi indukčností použité cívky a jejím odporem. Indukčnost cívky samozřejmě zvětšuje použité jádro, přičemž největší je při uzavřeném jádru. To je ale spojeno s určitými ztrátami způsobenými hysterezí, tzn. periodickými změnami magnetického pole v jádře. Těmito ztrátami je asi možné vysvětlit značný rozdíl mezi teoretickou hodnotou periody ($T_{\text{teor.}} = 0{,}366$ s) a experimentální hodnotou ($T_{\text{exp.}} = 0{,}614$ s) ve vzorovém řešení experimentu [10]. Tomu by při daných parametrech L a C odpovídala hodnota odporu obvodu $R \approx 40\ \Omega$.

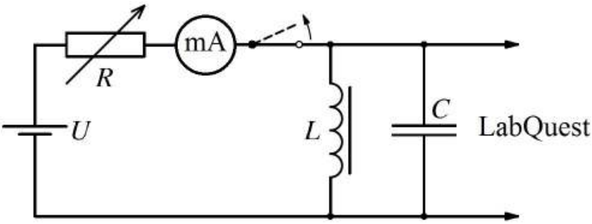
Pokud při experimentu naopak do obvodu zařadíme rezistor s měnitelným odporem, můžeme změnou hodnoty odporu ukázat vliv odporu obvodu na tlumení kmitů až po ukázku kritického tlumení, popř. aperiodického průběhu změn napětí na oscilačním obvodu. Pro případ kritického tlumení, při němž se kondenzátor oscilačního obvodu v nejkratší době vybije a kmitání nenastane, platí, že $\omega_0 = \delta$ a ze vztahu (1) najdeme pro činitel jakosti oscilátoru $Q = 1/2$. Aby tedy oscilátor začal kmitat, musí být $Q > 0{,}5$. U oscilátoru, jehož kmitání je na obr. 5, tak vychází přibližná hodnota činitele jakosti $Q \approx 1$.

Zařazení rezistoru je také nutné, chceme-li současně zobrazit časový průběh napětí i proudu. Tato nutnost však u současných počítačových systémů pro podporu experimentů odpadá, poněvadž můžeme použít přímo snímač proudu. Obecně tedy platí, že při stejném tlumení má oscilátor s vyšší frekvencí vlastního kmitání větší činitel jakosti, což je splněno při použití cívky s menším počtem závitů a tedy nejen s menší indukčností, ale i s menším odporem.

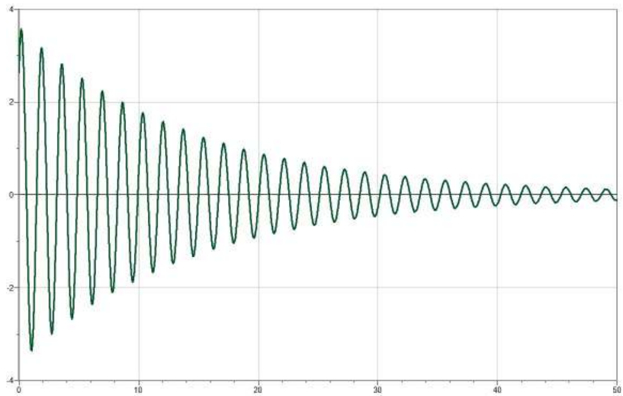
Jaké jsou současné možnosti demonstrace tlumených kmitů elektromagnetického oscilátoru se systémem Vernier (popř. i s jinými obdobnými systémy), ukážeme na poněkud odlišném uspořádání experimentu, než je uvedeno v [10]. Pro experiment použijeme cívku se 600 závity z rozkladného transformátoru s krátkým otevřeným jádrem. Měřením byly zjištěny parametry cívky $L = 57$ mH a $R = 2{,}6\ \Omega$. Kondenzátor oscilačního obvodu má kapacitu $C = 1\ \mu$F. Teoreticky by tedy tlumené kmitání mělo zaniknout přibližně za 0,1 s. Vzhledem k dalším ztrátám je doba tlumeného kmitání přibližně poloviční.

K demonstraci nepoužijeme obvyklý postup s připojením nabitého kondenzátoru k cívce. Toto uspořádání vyžaduje kvalitní přepínač, který ve škole obvykle není k dispozici, a při přepnutí ovlivní počátek oscilogramu také přechodný odpor na kontaktech přepínače. U klasického uspořádání je počáteční energie oscilačního obvodu dána energií nabitého kondenzátoru. V našem uspořádání naopak využijeme energii magnetického pole cívky, kterou prochází malý proud. Uspořádání experimentu je patrné z obr. 6. Vypínač je sepnut a cívkou prochází proud ze zdroje malého stejnosměrného napětí (může to být např. plochá baterie). Proud nastavíme měnitelným odporem na hodnotu cca 30 mA (velikost proudu kontrolujeme ampérmetrem).

K cívce připojíme voltmetr DVP-BTA spojený s dataloggerem LabQuest a přes USB s počítačem. Pro záznam naměřených hodnot nastavíme trigger na napětí 0,1 V a spustíme měření. Při rozpojení vypínače vzniká v cívce indukované napětí cca 5 V (podle velikosti proudu procházejícího cívkou v okamžiku rozpojení vypínače), na které se nabije kondenzátor a oscilátor zakmitá. Na monitoru počítače pozorujeme časový diagram tlumeného kmitání (obr. 7).



Obr. 6



Obr. 7

Zajímavou možností např. pro žákovské práce je srovnání záznamu reálného děje s jeho počítačovým modelem. Východiskem k vytvoření počítačového modelu je 2. Kirchoffův zákon, který v případě oscilačního obvodu vyjadřuje rovnice

$$U_L + U_C + U_R = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} + Ri = 0.$$

Přírůstek proudu v časovém intervalu dt bude

$$\mathrm{d}i = -\left(\frac{q}{LC} + \frac{Ri}{L}\right)\mathrm{d}t.$$

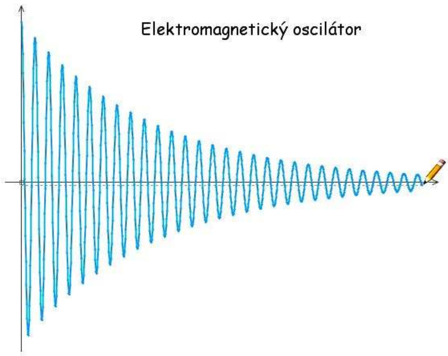
Model kmitání oscilátoru zapíšeme rovnicemi pro náboj q kondenzátoru a proud i v obvodu (viz [13]):

$$\begin{aligned}
\mathtt{q_{i+1}} &= \mathtt{q_i} + \mathtt{i} * \mathtt{dt}\\
\mathtt{i_{i+1}} &= \mathtt{i_i} + \mathtt{dt}\\
\mathtt{di} &= -((\mathtt{q_i}/\mathtt{C}) + \mathtt{R} * \mathtt{i}) * \mathtt{dt}/\mathtt{L}\\
\mathtt{t_{i+1}} &= \mathtt{t_i} + \mathtt{dt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q &= \mathrm{last}(q) + i \times \Delta t\\
i &= \mathrm{last}(i) + di\\
di &= \frac{-(uC + uR)}{L} \times \Delta t\\
uC &= \frac{q}{C}\\
uR &= R \times i
\end{aligned}$$

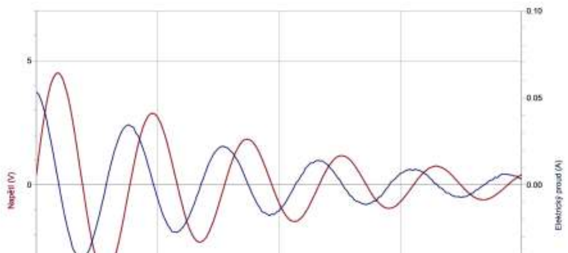
Obr. 8

Pro vytvoření počítačového modelu byl využit volně šiřitelný program Modellus 4.01 [14], v němž je časový krok Δt definován v samostatné položce menu, takže příslušný model je velmi jednoduchý (obr. 8). Zvolen byl časový krok $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ s a časový interval $t_{\min} = 0$, $t_{\max} = 0{,}05$ s. Aby bylo dosaženo co největší shody průběhu tlumených kmitů s hodnotami z reálného experimentu, byly parametry R, L, C oscilačního obvodu postupně upravovány až na hodnoty: $L = 0{,}074$ H, $C = 10^{-6}$ F, $R = 9\ \Omega$. Nastavené počáteční hodnoty: $q = 5 \cdot 10^{-6}$ C (což odpovídá $U_C = 5$ V), $i = 0$. Výsledný časový diagram tlumeného kmitání je na obr. 9. Z těchto hodnot můžeme určit činitel jakosti oscilátoru ($Q \approx 30$), počet kmitů, které oscilátor vykoná ($n \approx 22$) a dobu, po kterou oscilátor bude kmitat ($t = nT_0 = n \cdot 2\pi\sqrt{LC} \approx 37$ ms).



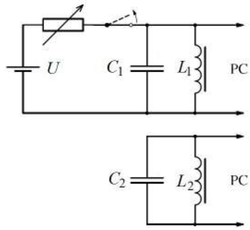
Obr. 9

Pro výklad kmitání oscilačního obvodu je důležité ukázat, že proud v obvodu je fázově posunut vzhledem k napětí o $\varphi = \pi/2$. To dokážeme tak, že do větve s cívkou zařadíme sériově modul ampérmetru DCP-BTA. Výsledek experimentu je na obr. 10 (pro větší názornost oscilogramu byla perioda oscilačního obvodu prodloužena zvětšením kapacity kondenzátoru na 10 μF).



Obr. 10

Jako fyzikální zajímavost můžeme ukázat děje ve vázaných elektromagnetických oscilátorech. Je to elektrická analogie známého experimentu se spřaženými kyvadly. Oscilátory mohou být navzájem vázány indukční

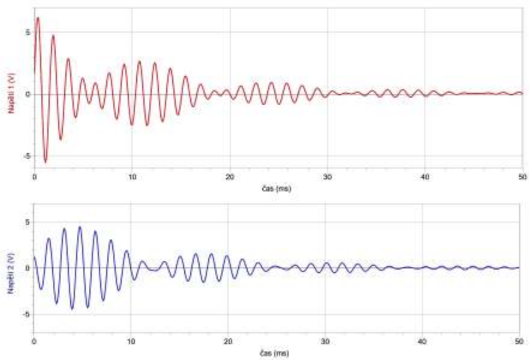


Obr. 11

nebo kapacitní vazbou. Jednodušší je indukční vazba prostým přiblížením cívek oscilátorů. V tomto případě je činitel vazby

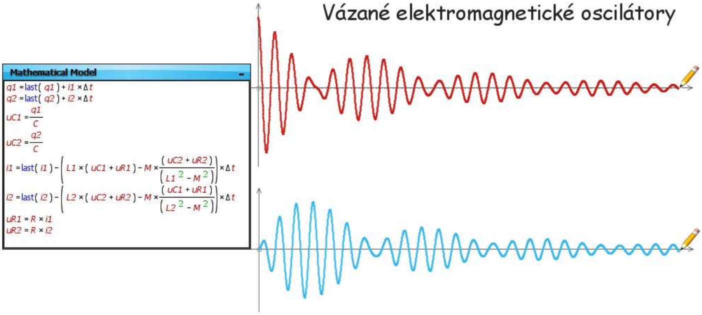
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

kde M je vzájemná indukčnost mezi cívkami a změnou vzdálenosti mezi cívkami dosahujeme různý stupeň spřažení oscilátorů. Experiment byl proveden se dvěma stejnými cívkami (600 závitů, krátké jádro) a kondenzátory měly kapacitu 1 µF. Uspořádání experimentu je na obr. 11. Cívky umístíme tak, aby byly na společné ose a mezi jádry byla vzduchová mezera přibližně 4 cm. Pro úspěšnou demonstraci je nutné, aby oba oscilátory měly stejnou rezonanční frekvenci. Doladění provádíme malými posuny jádra jednoho z oscilátorů. Obvody jsou správně naladěny, když při přenosu energie kmitání vznikají výrazné rázy (obr. 12).



Obr. 12

Počítačový model vytvořený programem Modellus 4.01 je na obr. 13.



Obr. 13

Literatura

[1] *Herolt, E, – Ryšavý, V.*: Fysika pro vyšší třídy středních škol, Československá grafická unie, Praha 1935.

[2] *Bělař, A. a kol.*: Fysika pro čtvrtou třídu gymnasií, SPN, Praha 1951.

[3] *Fuka, J. a kol.*: Fyzika pro III. ročník SVVŠ, SPN, Praha 1965.

[4] *Lepil, O.*: Demonstrace tlumených kmitů. Fyzika ve škole, roč. 4 (1965), č. 3, s. 112.

[5] *Lepil, O.*: Elektronika ve škole, SPN, Praha 1972.

[6] *Lepil, O. – Šedivý, P.*: Elektronika – prvky, obvody, pokusy, SPN, Praha 1989 (rukopis).

[7] *Lepil, P. – Houdek, V. – Pecho, A.*: Fyzika pro 3. ročník gymnázií, SPN, Praha 1986.

[8] *Lepil, O. – Šedivý, P.*: Oscilogramy kmitavých dějů. Komenium, Praha 1980.

[9] *Svoboda, E. – Houdek, V. – Svoboda, M.*: Pokusy z fyziky na střední škole 3, Prometheus, Praha 1999. ISBN 80-7196-009-8

[10] *Pazdera, V.*: Měření fyzikálních veličin se systémem Vernier, Repronis, Ostrava 2012. ISBN 978-80-7329-320-8
Dostupné na: <http://www.vernier.cz/experimenty/pazdera/7.26/index.php>

[11] *Lepil, O.*: Elektrické kmity a střídavý proud, SPN, Praha 1978.

[12] *Lepil, O.*: Demonstrujeme kmity netradičně, Prometheus, Praha 1996.

[13] *Lepil, O. – Richterek, L.*: Dynamické modelování, Repronis, Ostrava 2007.
Dostupné na: <http://ufm.sgo.cz/ke_stazeni/Dynamicke_modelovani.pdf>

[14] <http://modellus.fct.unl.pt/>

Měříme součinitel tepelné vodivosti kovů

JIŘÍ ERHART – LUBOŠ RUSIN – PETR HÁNA

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická TU, Liberec

Teoretický úvod

V pevných látkách se teplotní vodivost realizuje různými mechanismy v závislosti na povaze meziatomových vazeb. Pro látky s kovovou vazbou (kovy, vodiče) se přenos tepla uskutečňuje pomocí volných (vodivostních) elektronů – tzv. elektronového plynu. Tepelná vodivost kovů je velká a souvisí s jejich velkou elektrickou vodivostí, která se realizuje podobně skrze elektronový plyn. Naopak u dielektrik je meziatomová vazba výrazně iontové nebo kovalentní povahy a tepelná vodivost se uskutečňuje prostřednictvím kmitů krystalové mřížky – tzv. fononů. Dielektrika mají potom menší tepelnou vodivost, která však u nich ne zcela jednoduše souvisí s vodivostí elektrickou. Elektrickými vlastnostmi jsou dielektrika typu izolantů až polovodičů.

Obecně je prostorové šíření tepla velmi komplexní a složitou úlohou, která není analyticky obecně řešitelná. Teoretické řešení je dostupné pouze pro speciální prostorová uspořádání vodičů tepla, např. pro vedení tepla v tenké homogenní tyči, nebo mezi dvěma poloprostory (jednorozměrné rozložení teploty). Takové řešení lze pak použít pro měření součinitele tepelné vodivosti v kovech.

Energie ve formě tepla – mikroskopicky reprezentovaná kinetickou a potenciální energií systému částic – se šíří v prostoru vedením tak, že tepelný tok q je podle Fourierova zákona

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Konstantou úměrnosti λ $[\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}]$ je součinitel tepelné vodivosti látky. Hodnoty součinitele tepelné vodivosti pro různé látky viz Tabulku 1. Záporné znaménko ve Fourierově zákoně (1) pak udává směr šíření tepla od místa s vyšší teplotou do míst s teplotou nižší.

Tabulka 1. Součinitel tepelné vodivosti pro různé látky (podle [1])

Látka	λ [W $\cdot$m^{-1} $\cdot$ K^{-1}]
Ag	418
Fe	73
Cu	395
Al	229
Mosaz	106
Bakelit	0.23
Plexisklo	0.2
Polystyren	0.16
Voda	0.63
Vzduch	0.03

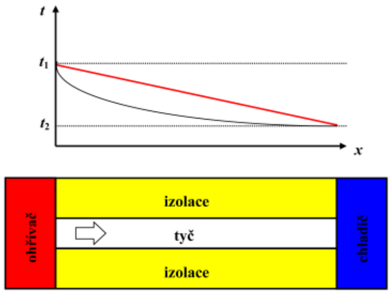
Uvažujme nyní tenkou homogenní tyč konstantního průřezu připojenou na jednom konci k ohřívači a na druhém k chladiči (obr. 1). Nechť je tyč po celé délce dokonale izolována tak, aby z ní neunikala tepelná energie do okolí. Po zapnutí ohřívače dochází k šíření tepla tyčí a v tyči dojde k ohřátí v každém místě na určitou teplotu. Tato teplota je zprvu s časem proměnná (neustálený stav), ale postupně se ustaví tepelná rovnováha s okolím a teplota se již dále s časem nemění (ustálený stav). V ustáleném stavu je na koncích tyče stálý rozdíl teplot a teplo rovnoměrně přechází tyčí z místa s vyšší teplotou t_1 (ohřívač) do místa s teplotou nižší t_2 (chladič). Tepelný tok q je roven teplu Q přenesenému za dobu τ průřezem tyče S o délce l

$$q = \frac{Q}{\tau} = \lambda S \frac{t_1 - t_2}{l}. \tag{3}$$

V ustáleném stavu je stálý gradient teploty podél tyče a platí

$$\frac{t_1 - t_2}{l} = \frac{t(x) - t(x')}{x - x'} \tag{4}$$

v libovolném místě tyče x a x'. Pokles teploty podél délky tyče můžeme tedy v ustáleném stavu stanovit měřením teploty v libovolných dvou místech tyče.



Obr. 1 Rozložení teploty v kovové tyči. Šipkou je znázorněn směr šíření tepla od ohřívače ke chladiči. Černá křivka v grafu znázorňuje rozložení teploty při neustáleném proudění tepla v tyči, červená pak při ustáleném stavu.

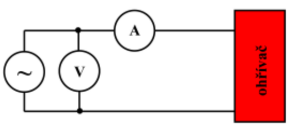
Pro určení součinitele tepelné vodivosti potřebujeme podle rovnice (2) určit tepelný tok q, průřez tyče S a gradient teploty $(t_1 - t_2)/l$. Potom vypočteme součinitel tepelné vodivosti jako

$$\lambda = \frac{ql}{S(t_1 - t_2)} = \frac{Ql}{S\tau(t_1 - t_2)}. \tag{5}$$

Tepelný tok se v případě elektrického ohřívače snadno zjistí jako elektrický příkon měřitelný pomocí elektrického napětí a procházejícího proudu

$$q = UI. \tag{6}$$

Zapojení měřicích přístrojů je na obr. 2. Ohřívač může být realizován např. topným tělískem pájky. Gradient teploty určíme měřením teploty tyče v blízkosti ohřívače (teplota t_1) a teploty tyče v blízkosti chladiče (teplota t_2) – obě místa jsou ve vzdálenosti l od sebe.



Obr. 2. Zapojení měřicích přístrojů pro určení výkonu ohřívače.

Vzhledem k tomu, že nelze prakticky realizovat dokonalou tepelnou izolaci ohřívače, tyče a chladiče, je třeba provést v měření opravu na teplo vedené z ohřívače jinam než do tyče. Opravu nejlépe provedeme tak, že odpojíme měřenou tyč od ohřívače (jinak zůstává celé uspořádání stejné) a provedeme měření příkonu ohřívače při určité teplotě. Postupným zvyšováním napětí na ohřívači dosáhneme na něm stejné teploty, jaká byla na ohřívači během ustáleného vedení tepla tyčí. V tomto okamžiku je pak výkon dodávaný ohřívači právě roven ztrátovému výkonu $q_0 = U_0 I_0$, který není formou tepla veden tyčí ke chladiči. Rovnici (4) a (5) pak modifikujeme na ztrátový tepelný tok

$$\lambda = \frac{(UI - U_0 I_0)l}{S(t_1 - t_2)} \tag{7}$$

Uvedená oprava na ztrátový výkon může být dost velká!

Experiment

Použijeme sestrojený přípravek s ohřívačem z topného tělíska pájky (nominální výkon několik desítek wattů) – obr. 3a. Tyče z různých kovových materiálů (mosaz, ocel a dural) jsou připevněny přímo k ohřívači na závit v topném tělese (obr. 3b). Teplo přenášené kovovou tyčí je odebíráno ve směsi vody a ledu v kádince. Postupné tání ledu zajišťuje odnímání tepla při současné konstantní teplotě chladiče. Na tyč připevníme teploměry (např. teploměrná čidla GoTemp! od firmy Vernier s odečtem teploty do počítače; rozsah do 110 °C) pomocí gumových O-kroužků (obr. 3c), nebo nějaký jiný typ teploměrného čidla se zobrazovací jednotkou (např. termočlánek). I tento bodový kontakt s kovovou tyčí je dostatečný pro měření teploty tyče v místě dotyku teploměru a měřícího čidla. Změříme průřez tyče a vzdálenost mezi teploměry. Teplotní čidla umístíme do vzdálenosti přibližně 5 až 10 cm od sebe.

Tyč ponoříme do směsi vody a ledu co nejblíže dolnímu teploměru. Horní teploměr umístíme co nejblíže topnému tělesu. Pro napájení ohřívače užijeme regulačního transformátoru. Napětí a proud na topném tělese měříme voltmetrem a ampérmetrem v zapojení podle obr. 2. Nastavujeme napětí na topném tělese od nejmenších hodnot a počítačovými teploměry měříme teploty co nejblíže ohřívači a chladiči. Sledujeme měřené teploty, abychom nepřesáhli měřící rozsahy teploměrných čidel. Po jejich ustálení odečteme z grafu hodnoty t_1 a t_2. Teploty se ustálí přibližně po 20-30 minutách. Nastavíme čas odečítání teploty na 1 500 s po 1 s krocích. Po ustálení teplot odečteme hodnoty napětí a proudu a z nich pak určíme topným tělesem přiváděný výkon. V ustáleném stavu odečteme také teplotu ohřívače připojeným teploměrem. Neustále sledujeme směs vody a ledu, případně promícháváme. V případě velkého úbytku ledu v kádince, led doplňujeme.

Obr. 3 a) Topné těleso umístěné v plexisklové trubce s termočlánkem pro měření jeho teploty při kompenzaci ztrát. b) Kovové tyče (zleva ocel, mosaz a dural). c) detail upevnění teplotního čidla na tyči pomocí gumového O-kroužku.

Po skončení měření vedení tepla kovovou tyčí provedeme ještě korekci na ztrátové teplo odváděné ohřívačem. Přitom odpojíme kovovou tyč, zapneme ohřívání a nastavíme vhodnou volbou napětí stejnou teplotu ohřívače, jaká byla při měření s připojenou tyčí. Napětí na ohřívači nastavujeme postupně od menších hodnot k větším hodnotám. Vyčkáme ustálení teploty min. 10 minut. Teplotu ohřívače měříme termočlánkem s větším teplotním rozsahem.

Chybu měření určíme podle vztahu pro chyby nepřímých měření

$$\vartheta(\lambda) = \lambda \sqrt{\left(\begin{array}{c} \frac{I_0^2 \vartheta^2(U_0) + U_0^2 \vartheta^2(I_0) + I^2 \vartheta^2(U) + U^2 \vartheta^2(I)}{(UI - U_0 I_0)^2} + \frac{\vartheta^2(l)}{l^2} + \\ + 4\frac{\vartheta^2(r)}{r^2} + \frac{\vartheta^2(t_1) + \vartheta^2(t_2)}{(t_1 - t_2)^2} \end{array} \right)}, \qquad (8)$$

kde $S = \pi r^2$ je plocha kruhového průřezu tyče, r její poloměr. Kompenzovány jsou pouze ztráty způsobené na ohřívači. Další ztráty jsou způsobeny nedokonalou tepelnou izolací během vedení tepla tyčí (odvod z povrchu tyče do okolí). Určené koeficienty tepelné vodivosti jsou tak zatíženy další chybou a takto určená hodnota součinitele teplotní vodivosti je proto systematicky vyšší, než skutečná.

Příklad měření

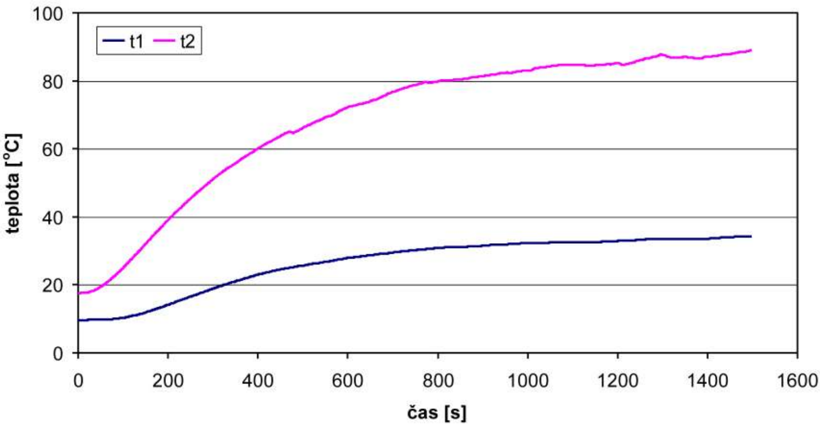
Pro vlastní měření jsme použili tyto měřicí přístroje:
Měření napětí – multimetr Metex ME-32, přesnost měření na rozsahu 400 V je ±1%+ 5dgt.
Měření proudu – multimetr Metex M-3860D, přesnost měření na rozsahu 400 mA je ±2.5%+ 3dgt.
Měření teploty ohřívače – multimetr VC150, přesnost měření na rozsahu 0 – 400°C je ±2.5% + 3dgt.

Naměřené teploty, příkony ohřívače a další veličiny jsou uvedeny v Tabulce 2. Příklad časového průběhu teplot měřených na tyči v blízkosti ohřívače (horní čidlo) a chladiče (dolní čidlo) je zobrazen na obr. 4 pro mosaznou tyč. Teploty na tyči byly odečteny po ustálení teploty. Chyba v určení teplot t_1 a t_2 byla odhadnuta vzhledem k časovým průběhům teploty na ±1 °C.

Tabulka 2. Naměřené hodnoty pro duralovou, mosaznou a ocelovou tyč

Veličina	**Dural**	**Mosaz**	**Ocel**
t_1 [°C]	26.5 ± 1.0	34.2 ± 1.0	28.1 ± 1.0
t_2 [°C]	64.4 ± 1.0	89.0 ± 1.0	98.6 ± 1.0
l [mm]	95 ± 1	85 ± 1	85 ± 1
I [mA]	146 ± 4	144 ± 4	145 ± 4
U [V]	141 ± 2	141 ± 2	141 ± 2
r [mm]	5.7 ± 0.1	5.0 ± 0.1	5.0 ± 0.1
U_0 [V]	81 ± 1	98 ± 1	108 ± 2
I_0 [mA]	84 ± 2	101 ± 3	112 ± 3
t_0 [°C]	143 ± 7	177 ± 7	214 ± 8
λ [$\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$]	339 ± 24	206 ± 17	128 ± 13
Relativní chyba	6 %	8 %	10 %

Chyba měření byla určena podle vztahu (7). V porovnání s Tab. 1 jsou naměřené hodnoty součinitelů teplotní vodivosti vyšší (Al srovnej s duralem, Fe s ocelí), což může být způsobeno jiným složením slitin (mosaz a ocel) a také systematickou chybou danou nezapočtením ztrát tepla odváděného z povrchu tyče do okolí.



Obr. 4 Příklad průběhu teploty na mosazné tyči během ustalování vedení tepla

Závěr

Měření je příkladem obtížnosti realizace experimentu vyžadující ideální tepelnou izolaci měřeného objektu. Se stejným problémem se potýkáme i při jiných teplotních měřeních jako je např. stanovení měrné tepelné kapacity látky kalorimetrickou metodou. V uvedeném experimentu přesto dostáváme relativně přesné výsledky. Úloha je pro svou jednoduchost vhodná pro laboratorní praktikum z fyziky ve výuce přírodovědných, učitelských nebo technických oborů.

Poděkování

Jeden z autorů (J. E.) děkuje za podporu grantu SGS FP-TUL 19/2012.

Literatura

[1] *Bednařík, M., Koníček, P., Jiříček, O.*: Fyzika I a II – Fyzikální praktikum, skriptum FEL ČVUT Praha 2003.

[2] *Brož J. a kol.*: Základy fyzikálních měření, SNTL Praha 1985, str. 194-199.

Několik reálných i virtuálních experimentů

IVO VOLF – PAVEL KABRHEL

Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové

Každý učitel fyziky by se měl během studia seznámit s historií fyziky a techniky, aby dobře pochopil postavení experimentu ve vývoji fyziky i v metodice jejího výkladu na základní a střední škole. Ve výuce fyziky má velmi důležité postavení postupné vytváření modelových situací, které žákům ve zjednodušené formě přibližují složitost obklopující reality. K dobrému pochopení fyzikálních zákonů je však potřeba nejprve žáky motivovat, potom jim v názorné formě předvést tělesa, jevy a děje, vhodně je popsat a vyhledávat souvislosti mezi příčinami a následky, jež se vyjadřují pomocí nepříliš složitých fyzikálních zákonitostí. Velmi důležitou roli má tedy fyzikální experiment, a to v motivační i výkladové fázi. Na druhé straně by každé poučení mělo být zakončeno také řešením problémových situací, aby žáci získali dojem, že se ve škole učí o tom, co jim může být potřebné v jejich následném životě. Experimentování se proto nutně také využívá k předvedení aplikací fyzikálního poznání, neboť pomáhá v procesu ověřování hypotéz, které vzniknou v procesu řešení problémů.

Úloha fyzikálního experimentu při výuce fyziky na základní či na střední škole se v podstatě příliš nezměnila, ovšem změnily se podmínky, za nichž experimentování probíhá. Je to jednak technická výbava, která z ekonomických důvodů na školách nebývá obnovována (nejsou dostatečné finance), ale také proto, že se pomůcková výbava školních fyzikálních kabinetů systematicky nedoplňuje s ohledem na modernější způsoby práce. Proto je nutno volit takové fyzikální experimenty, k jejichž provedení vystačí učiteli i žákům pomůcky, které vzniknou použitím předmětů z běžného života. Řada experimentů či měrných laboratorních prací proto může probíhat nejen ve školní fyzikální laboratoři, ale také v domácím prostředí jako domácí experiment. Velkým přínosem ve školách je též použití informačních a komunikačních technologií, jež jsou spojeny se zařazením počítačů do procesu řízení pokusů a do vyhodnocování počítačem získaných informací, s vytvářením pracovních listů, automatickými výpočty při zpracování tabulek naměřených hodnot fyzikálních veličin nebo při konstrukci grafů. Ve školách se využívají interaktivní tabule, někteří učitelé se zaměřují na používání tzv. vzdálených laboratoří, kdy se ve školní posluchárně nebo laboratoři experiment pouze naznačí, aby u žáků vznikla představa reality, ale skutečně naměřená data jsou získána z některé, např. vysokoškolské laboratoře.

Z hlediska psychologických přístupů již od dob Komenského se preferují postupy, které lze formulovat jako od známého k neznámému, od jednoduchého ke složitému, od konkrétního k abstraktnímu… Odtud jednoduchý fyzikální experiment může jak vzhledem k jednoduché motivaci a tak i nenáročné aplikaci mít daleko větší přínos pro rozvoj myšlení žáka a pro lepší a pevnější vědomosti a dovednosti než sebesložitější a finančně náročná laboratorní aparatura, která je mu myšlenkově vzdálena.

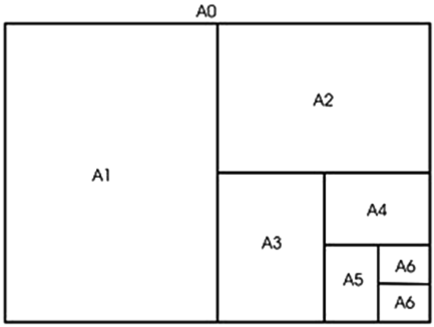
Fyzikální experimenty mohou být reálné, třeba i s jednoduchými pomůckami, ale také pouze simulované nebo založené na vhodných modelových situacích, popř. experimenty virtuální. Hlavní je metodologická stránka, tj. aby byl dodržen postup, při kterém je žák pro práci nejprve vhodně motivován. V další části své práce získá příslušné vědomosti a dovednosti, které vhodně využívá při řešení problémových situací, a nakonec dospěje k procesu řešení problému: pochopí, v čem problém spočívá, vysloví svou hypotézu, získá měřením příslušné informace, které správně vyhodnotí a nakonec interpretuje. Neměli bychom také zapomínat na tu skutečnost, že dnešní žák je přímo „srostlý“ s informačními a komunikačními technologiemi – odtud plyne, že proces získávání nutných a vhodných informací nemusí být doprovázen s přímou laboratorní činností žáka, ale pro řešení problémové situace lze využít údajů, které byly získány v dřívějších dobách (úlohy historické) nebo je můžeme simulovat na počítači, aniž bychom dané situace vytvářeli v reálném prostředí.

Ukažme si na několika příkladech, jak je to myšleno:

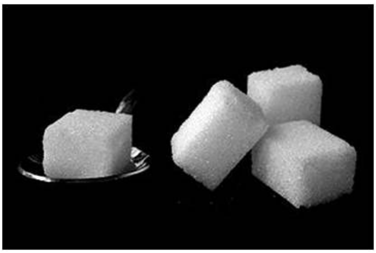
Problém 1. Stanovení hustoty papíru

Kancelářský papír, který využíváme do tiskáren nebo do kopírek, má většinou kvalitu zvanou 80 g. To znamená, že hmotnost papíru o obsahu 1 m^2 je 80 g. Základní rozměry papíru formátu A0 jsou 841 mm $\times$ 1 189 mm, tj. 999 949 mm^2, tj. přibližně 1 m^2. Přeložením a rozstřižením tohoto papíru dostaneme postupně další formáty, formát A4 má rozměry 210 mm $\times$ 297 mm. Odtud můžeme stanovit, kolik listů papíru formátu

A4 dostaneme z původní A0, můžeme změřit tloušťku balíku, v němž je 500 listů a odtud tloušťku listu papíru i hustotu tohoto papíru. Úloha je velmi jednoduchá, provádí se v podstatě jen jedno měření, praktická, neboť s tímto problémem se běžně každý z nás setkává. Úloha je vhodná pro žáky základní i střední školy.



Problém 2. Stanovení hustoty kostkového cukru

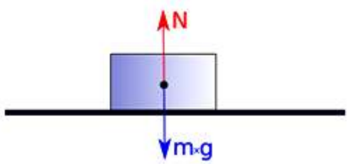


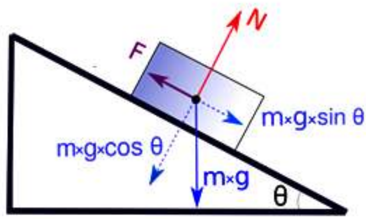
Stanovíme hustotu kostkového cukru, který se běžně prodává v obchodě v krabici o hmotnosti 1 kg. Pohodlně lze změřit vnější rozměry této krabice, ale určíme objem o něco větší, než zaujímá ve skutečnosti cukr v krabici. Proto získaná hustota bude o něco menší než ve skutečnosti. Můžeme také postupovat tak, že zjistíme objem několika kostek, ne však tak, že cukr ponoříme do kapaliny, ale jako „medium“ pro měření použijeme velmi jemné cukrové krupice, která se chová podobně jako měřicí kapalina (při poklepání se horní povrch cukru chová jako hladina). Kostky cukru jsou vlastně slisovaný jemný krystal nebo krupice – můžeme také zjistit pomocí kuchyňské odměrky, jaký je objem a jaká hmotnost určitého „množství“ tohoto cukru, a odtud potom určit hustotu volně sypaného cukru, která bude o něco menší, než cukru slisovaného do tvaru kostek. Určením počtu kostek cukru v krabici lze také určit hmotnost jedné kostky.

Problém 3. Stanovení rychlosti pohybu bicyklu

Dnes je obvyklé, že si žáci namontují na své jízdní kolo (bicykl) tachometr. Jestliže se přední kolo bicyklu otočí za minutu n-krát, potom za sekundu je to $n/60$. Při každé otočce předního kola se bicykl posune o vzdálenost πd, kde d je průměr předního kola, tedy za jednu sekundu o vzdálenost, která je číselně shodná s hodnotou rychlosti, $v = \frac{\pi dn}{60}$. Při měření je třeba sledovat pohyb předního kola bicyklu, tedy kolikrát se např. ventilek dostane za 1 minutu do dolní polohy při svém valivém pohybu (eventuálně si udělat na pneumatice vhodnou značku a tu sledovat při valivém pohybu).

Problém 4. Proč eurodesky po sobě kloužou?





Každý pečlivý student si občas srovná své záznamy z přípravy na výuku, doplní je dalšími informacemi a přehledně si uloží takto získané informace do průhledných fólií, které po sobě „příšerně kloužou“. Úkolem je stanovit součinitel smykového tření, který popisuje podmínky klouzání desek po sobě, dále stanovit nejmenší úhel nakloněné roviny, která stačí pro vznik tohoto klouzání. Desky je vhodné naplnit několika listy papíru 80 g, formátu A4. Pro vznik vhodné nakloněné roviny můžeme použít delšího prkna nebo mírně skloněné školní lavice; je třeba najít způsob pro měření úhlu sklonu. Problém lze „vylepšit“ studiem pohybu flashdisku po fólii (určit součinitel smykového tření i minimální úhel sklonu desek k vodorovné rovině, kdy začne klouzání).

Problém 5. Stanovte, jak se mění výška hladiny vody v plastové lahvi v závislosti na čase.

Do plastové lahve nejprve nalijeme vodu tak, že ji budeme přilévat nějakou nádobkou menšího objemu, na papír zvnějška nalepený na láhev budeme postupně dělat tužkou značky. Potom opatříme láhev asi 1 cm od dna menším otvorem (o průměru asi do 2 mm). Nalijeme do lahve vodu a pečlivě ji uzavřeme otočnou zátkou. Postavíme láhev tak, aby po otevření mohla voda vytékat do umyvadla nebo do vany, otevřeme uzávěr a spustíme „stopky" (dobu budeme asi zpravidla měřit pomocí mobilního telefonu). Do tabulky budeme zaznamenávat čas průchodu hladiny značkami, jež jsme provedli předtím. Vytékající voda způsobuje postupně snižování hladiny. Výsledek znázorníme graficky. Nezapomeňte vysvětlit, proč nemůže vytéci z lahve všechna voda a proč třeba v závěru pokusu se vytékání zastaví, i když hladina vody v lahvi je několik milimetrů nad výtokovým otvorem.

Tyto reálné experimenty doplníme několika dalšími „experimenty" ve virtuálním prostředí, jež vznikne prostřednictvím našeho počítače. Místo reálných situací v reálném prostředí se budeme zabývat takovými problémy, které lze vyřešit pouze za přispění počítače a internetu.

Problém 6. Jak daleko je od pozorovatele k centru?

Při sledování kosmických lodí na cestě k Měsíci mohli využívat američtí vědečtí a techničtí pracovníci několika pozorovacích stanovišť na severní polokouli. Na jižní polokouli zvolili za pozorovací základnu astronomickou stanici Tidbinbilla nedaleko hlavního města Austrálie Canberry. Určete, jak daleko byla tato stanice od technického centra v Houstonu a zda pro přenos informací mohla stačit jen jedna stacionární družice. Výpočty proveďte s přesností na 3 až 4 platné číslice.

Poznámka pro řešení: Canberra Deep Space Communication Complex najdeme v prostoru jihozápadně od Canberry, v blízkosti Národního parku

Tidbinbilla. Další úvahy spojíme s využitím Google Earth. Hyperlink: http://en.wikipedia.org/wiki/Canberra_Deep_Space_Communication_Complex

Problém 7. Určete obsah povrchu Antarktidy

Světadíl Antarktida je přibližně ohraničen Jižním polárním kruhem; podíváme-li se na mapu nebo na globus z určité výšky nad jižním pólem, vidíme, že zabírá přibližně dvě třetiny povrchu, vymezeného touto kružnicí. Odhadněte obsah povrchu Antarktidy. Uvažte přitom, zda lze využít plošného zobrazení na mapě v atlase nebo je nutno užít prostorového zobrazení na globusu.

Poznámka pro řešení: Nejprve stanovíme obsah kruhu, který je vymezen jižním polárním kruhem, poté zkusíme stanovit povrch kulového vrchlíku. Opět zde nastoupí práce na internetu, konkrétně Google Earth.

Problém 8. Určete délku vlaku

Ve stanici Týniště nad Orlicí stojí několik vlaků. Označte si je a stanovte jejich délku na základě funkce „měření“ pomocí internetové stránky Google Earth. Snažte se změřit jejich délku co nejpřesněji; znamená to najít vhodný způsob, jak toto měření provést.

Poznámka pro řešení: Samozřejmě je možné provádět měření i pro jinou stanici, pokud učitel považuje za důležité přiblížit měření do prostředí svých žáků. Učitel si však musí předem zjistit, zda při leteckém nebo satelitním snímkování ve stanici vlaky skutečně byly.

Problém 9. Jak dlouhá musí být vzletová a přistávací dráha na letišti?

Ve Wikipedii se o vzletové a přistávací dráze uvádí: Mezinárodní letiště používají zpevněné dráhy o šířce typicky kolem 50 m a délce v rozsahu zhruba 2-5 km. Velké letouny (např. Boeing 747, 767 či 777, Airbus A340 či A380 apod.) vyžadují dráhu zhruba 2 400 m (minimum za příznivých podmínek při hladině moře, ve vyšší nadmořské výšce či za zhoršených podmínek více). Nejdelší dráhu na světě, s délkou 5 000 m, má letiště v Žikace ($29°21'$ s. š., $89°19'$ v. d.) v Tibetské AO (ČLR). Nejdelší dráhou Letiště Václava Havla je dráha 06 s rozměry 3 715 m × 45 m. Na základě měření na vhodných mapách určete délku vzletové a přistávací dráhy. Asi byste nevěřili, ale v malém státě Nepál je skoro 50 letišť. Najděte si o nich informace na stránce http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_airports_in_Nepal a na mapě Nepálu si prohlédněte jejich rozložení.

Poznámka pro řešení: Využijte funkce Měření vzdáleností na Google Earth a zjistěte délku drah. Pro zajímavost se podívejte ještě na letiště v Denpasaru (Bali) či v Hobartu (Tasmanie). Ověřte si, zda je mezinárodní letiště Soči-Adler dostatečně prostorné, aby tam mohla přistávat velká dopravní letadla při příležitosti Zimních olympijských her v roce 2014, které budou uspořádány na Kavkaze. Jaká další letiště budou k dispozici? Podívejte se na lineární rozměry např. letadel Boeing 747 (délka letadla, rozpětí křídel).

Problém 10. Pentagon v Hradci Králové?

Řecké slovo pentagon představuje pětiúhelník. Protože americké Ministerstvo obrany sídlí v budově s pětiúhelníkovým půdorysem, používá se pro něj název Pentagon. Ale je pentagon také jinde, např. v Hradci Králové? Najděte si centrum tohoto krajského města, porovnejte plošný obsah tzv. Velkého náměstí na starém městě a kasárenský dvůr v nedaleké starobylé vojenské stavbě, který je uvnitř zastavěné plochy. Najděte také budovu s pětiúhelníkovým půdorysem (v níž je umístěn Krajský soud), zjistěte rozměry, plošný obsah, který zaujímá a načrtněte tento půdorys na list papíru A4 ve vhodném měřítku.

Poznámky pro řešení: Základní vyhledávání provedete na webovské stránce www.mapy.cz. Pro zjištění příslušných délek použijete opět stránku Google Earth, nebo www.mapy.cz.

Použité informační zdroje

http://en.wikipedia.org/wiki/Canberra_Deep_Space_Communications_Complex
http://www.mapy.cz
http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_airports_in_Nepal
http://www.GoogleEarth.com

INFORMATIKA

Grafické studio ve škole

LUKÁŠ RACHŮNEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V současné době školy všech typů často potřebují grafické práce. Jedná se například o prezentaci školy ve formě brožur, letáků, plakátů a reklamy v tisku, přípravu učebních textů, ilustrací k výuce, administrativních tiskovin a dalších typů publikací a také propagačních, informačních nebo výukových internetových stránek. Technicky nebo graficky zaměřené školy a zvláště polygrafické jsou v tomto ohledu lépe vybaveny, ale ukážeme si, že malé grafické studio lze vytvořit téměř kdekoliv.

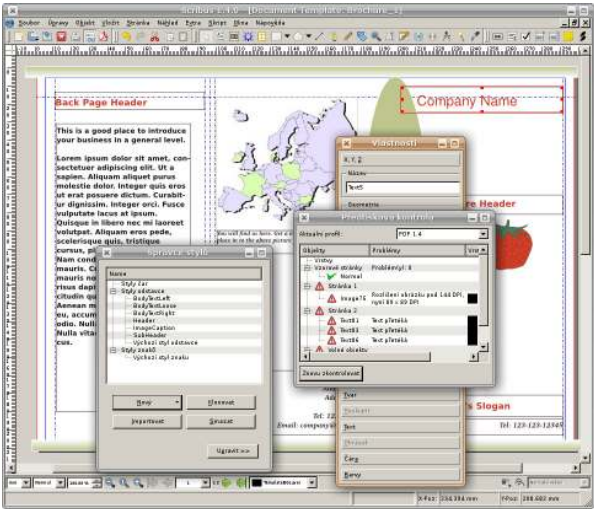
Příprava grafických dokumentů se už dlouhou dobu provádí téměř výhradně pomocí počítače. Profesionální studia většinou používají odpovídající programové vybavení nakoupené za velmi vysoké ceny. V roce 2011 jsem ve Francii absolvoval dvě stáže v grafických studiích velkých tiskáren a podle očekávání jsou využívány především tři typy programů. Základním typem je aplikace pro sazbu dokumentů (sestavování stran, DTP) určených k tisku, obvykle InDesign nebo QuarkXpress, dříve také PageMaker. Dále editor pro úpravu rastrových (bitmapových) obrázků (složených z bodů, např. fotografií), obvykle známý Photoshop. Třetím typem je editor vektorových obrázků (složených z křivek), obvykle Illustrator, dříve také FreeHand. Někde se využívá vybavení od jiných výrobců (např. CorelDRAW, Photo-Paint), ale princip zůstává stejný a podobné jsou i ceny.

Pokud nepracujeme v profesionálním studiu, kde jsou uvedené programy většinou vyžadovány jako standard, můžeme je úspěšně nahradit velmi kvalitními alternativami. Ty, které uvádím v následujícím přehledu, se aktivně vyvíjejí více než 10 let, jsou volně dostupné zdarma, jsou k dispozici pro všechny nejpoužívanější operační systémy a jsou přeložené do mnoha jazyků.

1. Scribus

V počítačové přípravě publikací pro tisk nebo elektronické publikování je nejdůležitější součástí program pro sazbu dokumentů neboli DTP (desktop publishing), tedy sestavování výsledných stran kombinováním textu, ilustrací a dalších grafických prvků. K tomuto účelu jsou ve větších studiích, nakladatelstvích a tiskárnách tradičně určeny náročné komerční aplikace, jako je InDesign nebo QuarkXpress.

Zřejmě nejlepší volně šířenou alternativou těchto programů je sazební editor *Scribus*. Používá souborový formát založený na otevřeném standardu XML, pracuje s různými formáty písma (fontů) a podporuje práci s barevným prostorem CMYK a profily pro správu barev ICC. Samozřejmostí je možnost výstupu do formátu dokumentů PDF (Portable Document Format) včetně PDF/X. Je dostupný pro unixové systémy (např. Linux nebo FreeBSD), Mac OS X, MS Windows a OS/2 a komunikuje asi ve 25 světových jazycích včetně češtiny. Vyvíjí se od roku 2001.

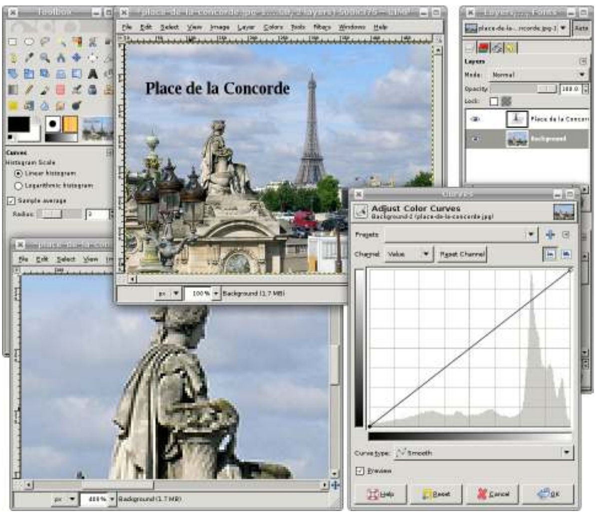


Použití ve škole může být orientováno například na vytváření různých informačních a propagačních brožur, které mohou být i v elektronické formě pro prohlížení v počítači, učebních textů, ilustrací a dalších doplňků k výuce ve formě listů papíru menšího formátu nebo větších plakátů a také na přípravu grafických prací určených pro další zpracování profesionální tiskárnou.

Samozřejmě je tu také už více než 30 let špičkový typografický systém TEX, který je rovněž k dispozici zdarma, ale ten je zaměřený jiným směrem než obvyklé grafické studio. Proto se jím v tomto článku nezabývám, ale doporučuji si o něm aspoň zjistit nějaké informace.

2. GIMP

Nejrozšířenějším typem počítačové grafiky je pravděpodobně rastrový neboli bitmapový obrázek, který se skládá z barevných obrazových bodů (pixelů) uspořádaných do obdélníku. V současné době ho můžeme nejčastěji vidět ve formě digitálních fotografií a grafických částí webových stránek na Internetu. Velmi často je samozřejmě součástí publikací všech typů a prakticky žádné grafické studio se neobejde bez aplikace pro práci s tímto typem obrázků, jakou je např. Photoshop nebo Photo-Paint.



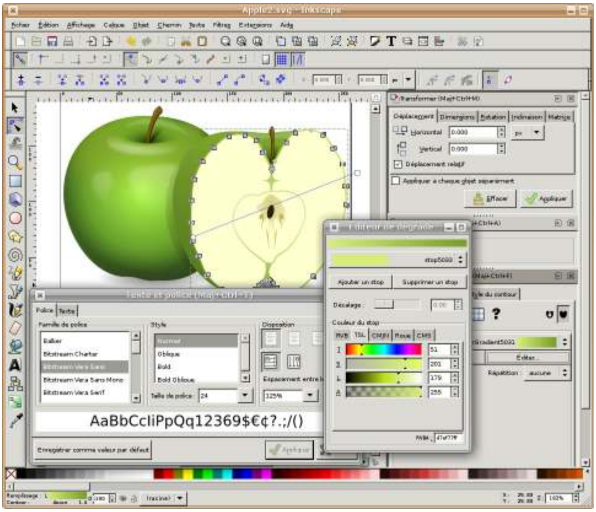
Nejznámější a funkčně nejbohatší volně šířenou alternativou těchto programů je rastrový editor *GIMP* (GNU Image Manipulation Program). Obsahuje základní i náročné funkce, podporuje velké množství grafických formátů a vyskytuje se u domácích uživatelů i v profesionální praxi. Pokud jde o přípravu pro barevné tiskové stroje, nedostatkem je zatím chybějící možnost práce v barevném prostoru CMYK, ale v méně náročném tiskařském prostředí se lze bez této funkce obejít, nebo ji lze uspokojivě nahradit zobrazováním pomocí barevných profilů ICC a ukládáním obrázku stejným způsobem. Pokud jde o práci určenou pro zobrazování na počítači, žádná důležitá funkce nechybí. GIMP je dostupný pro unixové systémy (např. Linux nebo FreeBSD), Mac OS X, MS Windows a AmigaOS a komunikuje asi v 50 jazycích včetně češtiny. Vyvíjí se od roku 1995.

Rastrové grafické editory jsou obecně určeny k vytváření nových obrázků a k úpravě již hotových, kterými mohou být například fotografie nebo naskenované kopie papírových dokumentů. Programů tohoto typu existuje velké množství a kromě ceny se liší velikostí, náročností na uživatele a počítač, ovládáním, množstvím funkcí, zaměřením a způsobem práce, přičemž některé jsou specializované pouze pro určité účely.

3. Inkscape

Často je výhodné pracovat také s vektorovou grafikou, která se na rozdíl od rastrových obrázků skládá z útvarů popsaných matematicky, tedy z úseček, křivek, výplní, barevných přechodů a podobně. Výhodou je úsporný zápis v paměti, libovolná změna velikosti, barev a další transformace beze ztráty kvality, bezproblémová pozdější úprava a možnost rozložení obrázku na jednotlivé části. Pomocí tohoto typu grafiky jsou definovány i znaky písma pro počítačovou typografii a využívají ji také aplikace pro sazbu dokumentů jako svůj základní prvek. Programy pro sazbu však mají omezené možnosti její úpravy, protože jsou určeny k jinému účelu než kreslení. Proto některé části stran, obrázky a nápisy připravujeme ve specializovaných aplikacích, jako např. Illustrator nebo CorelDRAW.

Jednou z nejpoužívanějších volně šířených alternativ těchto programů je vektorový editor *Inkscape*. Pracuje ve formátu SVG (Scalable Vector Graphics), který je otevřeným standardem používaným také ve všech moderních webových prohlížečích, ale rozumí i jiným vektorovým formátům. Je dostupný pro unixové systémy (např. Linux nebo FreeBSD), Mac OS X a MS Windows a komunikuje asi ve 40 světových jazycích včetně češtiny. Vyvíjí se od roku 2003 jako pokračování projektu Sodipodi zahájeného v roce 1999.



Podobně jako v případě rastrových editorů, i vektorových editorů lze nalézt velké množství, opět různě náročných a různě zaměřených. Některé jsou vhodné spíše k uměleckým účelům, jako zmíněný Inkscape a jeho komerční alternativy, a jejich použití můžeme často vidět na logotypech (značkách) různých společností. Další typy editorů mohou být vhodnější k technickým pracem a jejich typickým příkladem jsou programy typu CAD (computer-aided design).

4. Závěr

Podle mého názoru je malé grafické studio pro školu výhodné hned z několika důvodů. Například požadavky na grafické práce je možné zadávat, měnit a kontrolovat velmi rychle. Dále není nutné kupovat drahé vybavení. Ve studiu mohou pracovat učitelé i studenti, tedy není nutné platit další zaměstnance. Používané programy si může každý nainstalovat na libovolný počet počítačů. Může s nimi pracovat také doma a lze je zařadit i do výuky ve škole. Navíc tím škola může získat na zajímavosti.

Literatura

[1] http://www.scribus.net/
[2] http://www.gimp.org/
[3] http://inkscape.org/

Bobřík učí informatiku

1. díl seriálu

DANIEL LESSNER – JIŘÍ VANÍČEK

Matematicko-fyzikální fakulta UK Praha

Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Soutěž Bobřík informatiky, jejíž některé z úloh jsme představovali v předchozích ročnících našeho časopisu, si jako jeden z cílů vytyčila seznamovat žáky středních a základních škol s informatickými problémy. Při sestavování soutěžních testů čerpáme z mezinárodní databáze úloh, kterou každoročně připravují odborníci z univerzit, informatici a metodici, kteří připravují učitele informatiky, z více než 25 zemí ze tří světadílů.

U každé z navržených otázek probíhá oponentura a diskuse, do které oblasti informatiky spadá a jaký informatický problém řeší. Z velké většiny jde o úlohy z oblastí algoritmizace a programování, porozumění informacím a jejich reprezentacím, strukturám, otázky týkající se výpočtů, kódování, řešení problémů, matematické a logické základy informatiky. V menšině se vyskytují otázky z tzv. každodenní informatiky (tedy uživatelský přístup k technologiím, společenské souvislosti používání technologií, digitální gramotnost apod.).

Proč takový dlouhý úvod? Chceme jím naznačit, že jsme si naprosto jisti, že přinášíme otázky opravdu informatické, takové, které se ve světě jako informatické chápou a jaké i organizátoři v ostatních zapojených státech svým soutěžícím přinášejí (v loňském roce soutěžilo ve všech zemích více než půl milionu žáků). Postupně jsme však zjišťovali, že některé soutěžní úlohy nejsou vnímány jako informatické, a to jak žáky, tak učiteli. Logicky tedy přibyl cíl soutěže šířit povědomí po českých školách o tom, co jsou to informatické problémy a otázky.

V prosinci 2011 jsme oslovili školní koordinátory soutěže (tedy učitele na školách, kteří soutěž na místě organizují) v dotazníku s výběrovými odpověďmi, týkajícími se jejich postoje k soutěži. V dotazníku jsme se také zeptali na postoje učitelů k soutěžním otázkám. Odpovědělo 104 koordinátorů, tedy téměř polovina ze všech. Z nich 23 % odpovědělo, že soutěžní otázky používá nejen v přípravě na soutěž, ale i k vlastní výuce informatiky. V otázce postoje k soutěžním úlohám však poměrně často vybírali odpovědi typu „otázky by podle mého názoru měly být více směřovány do konkrétních aplikací a činností na počítači“ (8 %), „žáci by uvítali více otázek z počítačového prostředí“ (15 %), „otázky mi vůbec nepřipadají informatické, spíše matematické, logické“ (6 %). Celkem tedy téměř 30 % učitelů považuje informatické otázky, vybrané mezinárodním týmem odborníků, jako nějakým způsobem neinformatické.

V listopadu 2012 jsme oslovili samotné soutěžící. V dotazníku, na který odpovědělo 13 % soutěžících z 27 500, měli k dispozici volnou odpověď bez uvozující otázky pro své vyjádření k soutěži. Výpovědi žáků lze shrnout do čtyř okruhů. Jednak hodnotili soutěž kladnými nebo zápornými hodnoceními bez vysvětlení, komentovali vlastní výkon nebo se vyjadřovali či dotazovali k jednotlivým otázkám. Nemalá část respondentů však potřebovala vyjádřit názor, že jim soutěž nepřipadá informatická. Přinášíme některé autentické výpovědi:

- „Toto nebyla Informatika!!!“,
- „Více otázek z informatiky“,
- „Zaměřil bych otázky více na obor IT. Otázky se mi zdají více matematické“,
- „Jen mě zajímá, jak tohle souvisí s informatikou, krom toho, že se to vypracovává online a 2 otázky souvisejí s počítačema“,
- „Co mají otázky v testu společného s informatikou? Že by nic?“,
- „Zpracování na počítači nedělá z testu informatickou soutěž“.

Z některých výpovědí vyplývá, že žáci se domnívají, že soutěž je organizátory nazývána informatická proto, že se provádí na počítači, to znamená, že dokážou oddělit informatiku a počítače. Nicméně ukazuje se, že žáci ve škole patrně nezískají správnou představu o tom, co to je informatika, jaké jsou její základní pojmy a jaké řeší problémy. Je také možné, že žáci nejsou zvyklí při práci s počítačem řešit náročné problémy, kde je potřeba použít uvažování, logiku, rozhodovat se, modelovat a strukturovat, formalizovat svoji výpověď. Můžeme se také domnívat, že žáci se při pouhém školním tréninku ovládání aplikací k takovýmto problémům nedostanou, a potom úlohy teoretické povahy paušálně označují jako matematiku nebo logiku.

Výsledky těchto dotazníků nás vedly k tomu, abychom připravili seriál článků s vybranými informatickými úlohami z databáze soutěže Bobřík informatiky, tak abychom učitelské veřejnosti a jejím prostřednictvím i žákům ukázali, které problémy jsou informatické, co je v nich informatického a proč jsou to informatické otázky. Představíme zde vybrané úlohy, jejich zadání, správné řešení (s vysvětlením, proč je toto řešení správné a ostatní varianty nesprávné) a také, co má daná otázka společného s informatikou, s jakým klasickým informatickým problémem je spjata, případně kde lze v běžném životě najít aplikaci takového problému. Vybíráme úlohy pro středoškolské studenty v kategoriích Senior (3., 4. ročník) a Junior (1., 2. ročník).

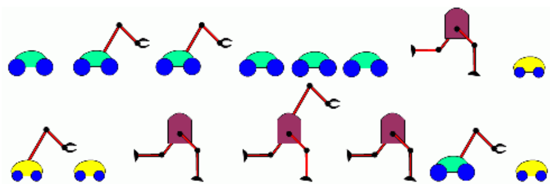
Okomentované správné řešení úloh jsme v jejich výčtu zařadili až na konec pasáže o dané úloze, za informatické poznámky, a to proto, že správné řešení uvedené ihned za zadáním svádí k tomu, jej přečíst. Toto uspořádání by těm čtenářům, kteří si chtějí problémy nejprve promyslet, ztěžovalo situaci. Seznam správných odpovědí ovšem nemůžeme umístit až na konec článku, protože jsou propojeny s obrázky ze zadání dané úlohy a s informatickými poznámkami.

Tým robotů

Kategorie Junior, autor Michael Weigend.

Zadání

Výrobní firma vlastní 15 robotů, které mohou poslouchat příkazy a vykonávat je. Pro speciální úkol je třeba vybrat tým složený z některých robotů.



Obr. 1

Řídící centrum postupně rozeslalo tyto příkazy:

1. Všichni roboti s malými koly přestanou poslouchat!
2. Všichni roboti, kteří umí chodit a mají ruku, dostavte se na místo schůzky!

3. Všichni roboti, kteří mají ruku nebo nohy, přestanou poslouchat!
4. Všichni roboti, dostavte se na místo schůzky!

Kolik robotů se dostavilo na místo schůzky?
A) 0 B) 5 C) 8 D) 15

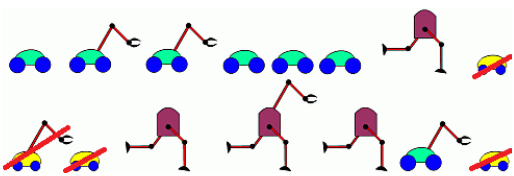
Co má tato úloha společného s informatikou

V této úloze lze sledovat hned několik souvislostí. Pro studenty informatikou netknuté je zásadní zjištění, jak hodně záleží na pořadí zadávání a plnění příkazů. Úlohu nelze řešit libovolně po částech, protože jednotlivé příkazy nejsou nezávislé: výsledek každého příkazu záleží na předchozích příkazech. Na zadání této úlohy lze vysledovat rozdíl mezi matematikou, která se zabývá statickými strukturami, a informatikou, která se zabývá dynamickými strukturami.

Na úlohu se můžeme dívat jako na úlohu o filtrování dat (zde robotů podle jejich vlastností). Postupné skládání a vyhodnocování podmínek (opět ve správném pořadí) vede k výběru těch datových záznamů (nebo robotů), se kterými potřebujeme dál pracovat. I při zaměření školní výuky informatiky na uživatelské dovednosti žáci obdobné principy využijí při filtrování dat v tabulkovém procesoru. Kromě uvedeného se na úlohu můžeme dívat také jako na kooperaci autonomních agentů, resp. obecněji hromadné zasílání zpráv, kdy adresáty vybíráme (filtrujeme) podle různých kritérií.

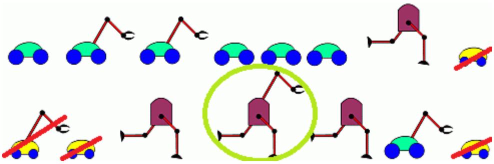
Zdůvodnění správného řešení

V obrázcích postupně zakroužkujeme roboty, kteří se mají dostavit na místo schůzky, a přeškrtneme roboty, kteří mají přestat poslouchat (a tedy na místo schůzky se dostavit nemohou). Po prvním příkazu byli vyškrtnuti roboti s malými koly (obr. 2):



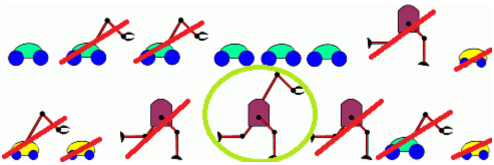
Obr. 2

Po druhém příkazu byli vybráni roboti, kteří umí chodit a mají ruku:



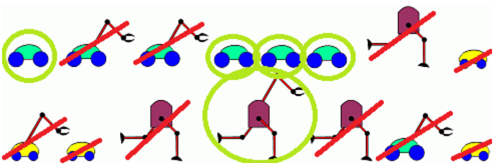
Obr. 3

Po třetím příkazu byli vyškrtnuti roboti s rukama nebo nohama, kteří dříve nebyli vybráni:



Obr. 4

Po čtvrtém příkazu byli vybráni ostatní nevyškrtnutí roboti:



Obr. 5

Na místo schůzky se tedy dostavilo 5 robotů.

Analýza DNA

Kategorie Senior, autor Christian Datzko.

Zadání

K porovnávání dvou řetězců DNA může být použita metoda výpočtu tzv. vzdálenosti mezi řetězci. Ta se zjišťuje tak, že se započítává každá nukleová báze (písmeno), která je změněna, vložena nebo smazána. Vzdáleností mezi řetězci je potom nejmenší takový počet změn, které převedou jeden řetězec na druhý. Čím jsou si tedy dva řetězce podobnější, tím menší vzdálenost mají.

```
A G T C T C A T G
A C T C T A T A G
```

Například tyto dva řetězce mají vzdálenost 3, protože druhé písmeno je změněno z G na C, šesté písmeno (C) je smazáno a písmeno A je vloženo na osmou pozici. Menší počet změn by nestačil.

Jaká je vzdálenost následujících řetězců DNA? Zapiš číslicí.

```
T A C T G G T T T A T T C T
A C C T G T T T A T T G G T
```

Co má tato úloha společného s informatikou

Vzdálenost mezi řetězci (zvaná též Levenshteinova vzdálenost) je běžně používaná metoda nejen pro porovnávání řetězců DNA, ale i pro výběr navrhovaných oprav při automatické kontrole pravopisu. Pokud napsané slovo není ve slovníku, program nabídne co nejbližší slovo, které ve slovníku je. Předpokládá totiž, že se uživatel nespletl příliš. Podobně je také vzdálenost řetězců využívána ve vyhledávacích systémech. Je jednoduchou a účinnou metodou měření podobnosti dvou posloupností symbolů. Tato metoda má však i své nedostatky, například nebere v úvahu výměnu sekvencí se stejným významem (např. výměnu celého slova ve větě) a také nebere v úvahu možnost, že může být změněno pořadí podsekvencí.

Více o Levenshteinově vzdálenosti najdete v *http://www.algoritmy.net/article/1699/Levenshteinova-vzdalenost.*

Prozkoumejme ještě, jestli je výstižné označovat uvedenou funkci slovem vzdálenost. Splňuje obvyklé požadavky na vzdálenost (např. míst na mapě)? Tedy:

- Je vždy nezáporná?
- Je nulová právě pro shodné body, resp. řetězce?
- Je stejná nezávisle na směru, odkud měříme, tedy když měníme jeden řetězec na druhý nebo druhý na první?
- Trojúhelníková nerovnost: Vzdálenost libovolných dvou bodů A, B je vždy nanejvýš rovna vzdálenosti těchto míst, když se po cestě stavíme

na místě třetím (C). Jít přímo z A do B nemůže být delší, než jít z A do C a odtud potom do B – to bychom přece chodili rovnou přes C a ušetřili. Splní analogický požadavek i Levenshteinova vzdálenost?

Užitečnost pojmu vzdálenosti vyjde najevo, když jej zkusíte odhalit i v dalších bobřích úlohách – vyskytuje se překvapivě často.

Zjistit vzdálenost dvou řetězců lze samozřejmě systematickým probráním všech možností změn jednoho řetězce na druhý. To ale zabere poměrně hodně času. Efektivní metoda počítání vzdálenosti řetězců je pěknou ukázkou tzv. dynamického programování. Při něm se hledají částečná řešení, tedy zde např. dílčí vzdálenosti kratších podřetězců. Na základě dílčích výsledků, které máme zapsané, pak celkem snadno určíme vzdálenost o něco delších řetězců, pak ještě delších, dokud nemáme spočtený výsledek pro celé původní zadání. Více a přesněji se lze dočíst zde: http://ksp.mff.cuni.cz/tasks/24/cook2.html

Zdůvodnění správné odpovědi

původní řetězec:	T	A	C		T	G	G	T	T	T	A	T	T		C	T
úpravy:	~~T~~	A	C	<u>C</u>	T	G	~~G~~	T	T	T	A	T	T	<u>G</u>	~~<u>G</u>~~	T
upravený řetězec:		A	C	C	T	G		T	T	T	A	T	T	G	G	T

Ve druhém řádku je vidět pět úprav.

Vysvětlivky: přeškrtnuté písmeno znamená, že písmeno bylo odstraněno, podtržené písmeno bylo přidáno. Písmeno přeškrtnuté i podtržené znamená nahrazení jednoho písmena druhým (předposlední sloupec: C je škrtnuto a G je podtrženo).

Bylo provedeno pět změn: první písmeno (T) bylo smazáno, za 3. pozici vloženo C, šesté písmeno (G) bylo smazáno, (eventuelně 5. písmeno (G) mohlo být smazáno), na 12. místo bylo vloženo písmeno G, předposlední 13. písmeno bylo změněno z C na G. Přitom nelze najít postup s pouhými čtyřmi změnami. Vzdálenost řetězců DNA je 5.

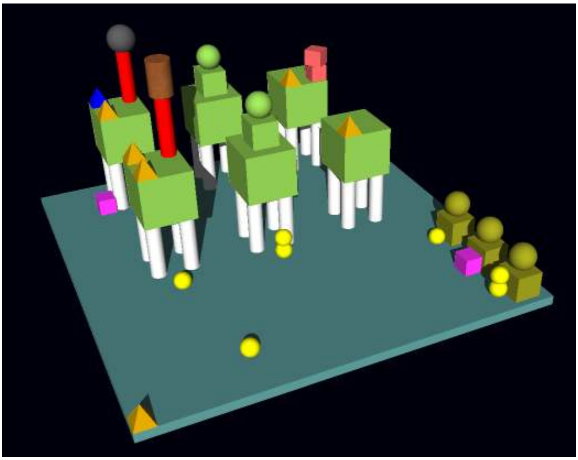
3D Továrna

Kategorie Junior, autor Michael Weigend.

Zadání

Opravář má nahradit rozbitou součástku v automatické továrně na obrázku. Přečtěte si popis níže a rozhodněte, kterou část má opravář nahradit:

- *KKoule* je krychle s koulí ležící na její horní stěně.
- *4Val* je velká krychle se čtyřmi válci, které ji podpírají.
- Jedna pyramida leží na předním rohu šedé desky.
- V jiném rohu desky je *KKoule*.
- Vedle této *KKoule* je další *KKoule*. Ta je připojena k věci X.
- Na desce leží ještě jedna věc X a u ní leží *4Val*.
- Tento *4Val* pojmenujeme $FC - 1$.
- Na vrcholu $FC - 1$ je *počet* pyramid.
- Existuje další *4Val*, na kterém je *počet* pyramid. Tento *4Val* pojmenujeme $FC - 2$.
- Rozbitá součástka je na nejvyšším místě na $FC - 2$.



Obr. 6

Odpovědi: A) válec B) koule C) krychle D) pyramida

Co má tato úloha společného s informatikou

Úloha vyžaduje důsledné sledování zadaného postupu. Kromě toho musí řešitelé pracovat s proměnnými a jejich identifikátory, což je informatikův denní chléb. Způsob jejich použití je nasnadě z uvedené úlohy: Pokud se chci k něčemu v budoucnu snadno odkázat, jednoznačně si to pojmenuji. Příkladem je $FC-2$, které označuje konkrétní skupinu objektů na ploše.

V této úloze navíc nepojmenováváme jen konkrétní objekty, ale i jejich obecné skupiny. To odpovídá použití složených datových struktur, tedy struktur, které mohou obsahovat další datové struktury. V našem případě např. *KKoule* označuje krychli s koulí v dané vzájemné poloze. Kromě uvedeného úloha naznačuje techniku odkazování od jednoho objektu ke druhému. To je základní stavební prvek mnoha datových struktur.

Datové struktury představují způsoby organizace a práce s daty, které zvyšují efektivitu jejich využití v dané úloze. Něco jiného je telefonní seznam v knize či v telefonu, něco jiného je seznam přátel na *Facebooku* a něco jiného je hierarchie pracovníků firmy. Pro různé situace se tedy hodí různé datové struktury. Přitom nevhodně zvolená datová struktura může vést k selhání celého řešení, např. když se místo fronty neustále přicházejících požadavků použije zásobník, protože je snazší ho implementovat. Více o různých datových strukturách na *http://www.algoritmy.net/category/1022/Datove-struktury* nebo *http://cs.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Datové_struktury*.

Zdůvodnění správného řešení

Podle obrázku a nápovědy se lze dobrat výsledku:

1. V pravém rohu desky leží tři béžové *KKoule*.
2. Předmět X je fialová krychlička.
3. $FC-1$ je velká zelená krychle na nožičkách vlevo vzadu (u její nohy leží fialová krychlička).
4. $počet = 2$.
5. $FC-2$ je velká zelená krychle na nožičkách vlevo vpředu (jsou na ní dvě malé oranžové pyramidy).
6. Na vrcholku tohoto $FC-2$ je červený válec a na něm hnědý válec. Ten hledáme, je nejvýše.

Správná odpověď je D) (hnědý) válec (postavený na červeném válci).

Závěr

V prvním díle seriálu jsme se na třech úlohách pokusili motivovat čtenáře ke sledování dalších dílů seriálu „Bobřík učí informatiku“. Druhý díl bude věnován teorii procházení grafů.

ZPRÁVY

54. Mezinárodní matematická olympiáda

Padesátý čtvrtý ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 18. do 28. července 2013 v Kolumbii, v městech Barranquilla a Santa Marta. Soutěže se zúčastnilo 527 soutěžících z 97 zemí.

České družstvo tvořili tito žáci: *Michal Buráň* z Gymnázia J. A. Komenského v Uherském Brodu, *David Hruška* z Gymnázia na Mikulášském náměstí v Plzni, *Mark Karpilovskij* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Josef Svoboda* z Gymnázia Frýdlant nad Ostravicí, *Štěpán Šimsa* z Gymnázia Josefa Jungmanna v Litoměřicích a *Radovan Švarc* z Gymnázia v České Třebové. Účast českého týmu byla z větší části dotována ministerstvem mládeže, školství a tělovýchovy (zhruba ze sedmdesáti procent), zbylé prostředky poskytl *Nadační fond Karla Janečka na podporu vědy a výzkumu*, bez jehož pomoci by se český tým soutěže jen obtížně zúčastnil. Vedoucím českého týmu byl *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, pozici zástupce vedoucího a pedagogického vedoucího zastal *Josef Tkadlec*, student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

Pro vedoucí národních delegací, kteří tvoří dohromady mezinárodní jury, začala olympiáda osmnáctého července v Barranquille, což je čtvrté největší kolumbijské město s více než 1 700 000 obyvateli. Po seznámení se z úlohami z tzv. shortlistu, tj. užšího výběru z návrhů zaslaných z různých zemí, zejména pak s jejich obtížností, vybrala jury šestici soutěžních úloh.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí přijeli do Santa Marty 21. července. Byli ubytováni v bungalovech v luxusním rekreačním středisku, přímo na pláži Karibiku.

Slavnostní zahájení olympiády se konalo v Barranquille, 22. července v prostorách Severní univerzity (Universitad del Norte). Zahájení se zúčastnila ministryně vzdělávání Kolumbie, *María Fernanda Campo Saavedra* a primátorka města Barranquilla *Elsa Noquera de la Espriella*. Obě dvě dámy oslovily účastníky olympiády svými projevy. Zásadní projev ovšem přednesla předsedkyně mezinárodní jury *María Falk de Losada*, jejíž autoritativní vedení jury jí vyneslo mezi vedoucími národních týmů přezdívku „železná lady“. Po úvodních projevech následovalo defilé všech zúčastněných družstev.

Soutěžními dny byly 23. a 24. červenec. Účastníci soutěže každý z těchto dnů řešili během čtyř a půl hodiny tři úlohy.

V dalších dnech pobytu byly pro soutěžící připraveny zajímavé exkurze a soutěže, nicméně soutěžící si užívali především Karibského moře a velmi dobré stravy v přilehlém rekreačním středisku. Vedoucí se ve stejném čase věnovali opravám úloh svých žáků. Jejich řešení byla po soutěži zkopírována a nezávisle opravena též koordinátory, kterými byli zkušení matematici z celého světa. Po opravách se vedoucí sešli s koordinátory při diskusi o závěrečném bodovém hodnocení.

České družstvo dosáhlo letos výborných výsledků. Po osmi letech jsme se znovu dočkali zlaté medaile, kterou byl oceněn Štěpán Šimsa z Gymnázia Josefa Jungmanna v Litoměřicích za zisk 31 bodů.

Další tři naši soutěžící – Michal Buráň (20 b.), Mark Karpilovskij (18 b.) a Radovan Švarc (17 b.) pak získali bronzové medaile. Ani zbylí dva účastníci, David Hruška a Josef Svoboda, však neodjeli s prázdnou. Oba byli oceněni čestnými uznáními za (aspoň) jednu zcela bezchybně vyřešenou úlohu. Celkově české družstvo získalo 108 bodů a skončilo v neoficiálním pořadí zemí na 37. místě.

Absolutními vítězi olympiády se stali Číňan Yutao Liu a Jihokorejec Eunsoo Jee se shodným ziskem 41 bodů (o jeden bod méně, než bylo dosažitelné maximum). V soutěži družstev se vše vrátilo k obvyklému stavu, když opět zvítězila Čína a nechala za sebou loňského překvapivého vítěze Jižní Koreu. Třetí se opět umístily Spojené státy americké.

V další části uvádíme texty všech šesti soutěžních úloh.

1. soutěžní den (23. 7. 2013)

1. Dokažte, že pro libovolnou dvojici kladných celých čísel k a n existuje k kladných celých čísel $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (ne nutně různých) takových, že

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

(Japonsko)

2. Rozmístění 4027 bodů v rovině nazveme *kolumbijským*, jestliže je 2013 z těchto bodů obarveno červeně, 2014 modře a žádné tři z těchto bodů neleží v přímce. O skupině přímek v rovině řekneme, že je *dobrá* pro dané rozmístění, jestliže

- žádná z přímek neprochází žádným bodem rozmístění,
- žádná z částí, na které je rovina přímkami rozdělena, neobsahuje body různých barev.

Najděte nejmenší k takové, že pro libovolné kolumbijské rozmístění 4027 bodů existuje skupina k dobrých přímek.

(Austrálie)

3. V trojúhelníku ABC nechť se kružnice připsaná ke straně BC dotýká této strany v bodě A_1. Analogicky nechť body B_1, resp. C_1, jsou body dotyku kružnic připsaných ke straně AC, resp. ke straně AB, s těmito stranami. Nechť střed kružnice opsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý. *Kružnice připsaná trojúhelníku ABC ke straně BC je kružnice, která se dotýká úsečky BC, polopřímky opačné k polopřímce BA a polopřímky opačné k polopřímce CA. Obdobně je definována kružnice připsaná ke straně AC, resp. AB.*

(Rusko)

2. soutěžní den (24. 7. 2013)

4. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník s průsečíkem výšek H a nechť W je bod na straně BC ($W \neq B$, $W \neq C$). Označme M, resp. N, patu výšky z bodu B, resp. z bodu C. Označme dále ω_1 kružnici opsanou trojúhelníku BWN a nechť X je bod na této kružnici takový, že úsečka WX je průměrem kružnice ω_1. Analogicky nechť ω_2 je kružnice opsaná trojúhelníku CWM a Y bod na ní takový, že úsečka WY je průměrem kružnice ω_2. Dokažte, že body X, Y a H leží na přímce. *(Thajsko)*

5. Nechť $\mathbb{Q}$ značí množinu kladných racionálních čísel. Uvažujme všechny funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňující

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}$,

(ii) $f(x+y) \geq f(x)+f(y)$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}$,

(iii) existuje $a \in \mathbb{Q}$, $a > 1$ takové, že $f(a) = a$.

Dokažte, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$.

(Bulharsko)

6. Nechť $n \geq 3$ je celé číslo a mějme $n + 1$ bodů, rovnoměrně rozložených na kružnici. Uvažujme o očíslováních těchto bodů čísly $0, 1, \ldots, n$ (každé číslo je použito právě jednou). Dvě taková očíslování považujeme za stejná, jestliže jedno přejde na druhé nějakou rotací kružnice. Očíslování nazveme *krásným*, jestliže pro libovolná čtyři čísla $0 \leq a < b < c < d \leq n$ taková, že $a + d = b + c$, tětiva spojující body očíslované a a d neprotíná tětivu spojující body očíslované b a c.

Nechť M značí počet krásných očíslování a N počet uspořádaných dvojic (x, y) kladných celých čísel takových, že $x + y \leq$ $\leq n$ a $\mathrm{NSD}(x, y) = 1$. Dokažte rovnost

$$M = N + 1.$$

(Rusko)

Příští, 55. ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskuteční v *Kapském Městě* (Jihoafrická republika) v termínu od 3. do 13. července 2014.

Martin Panák

7. Středoevropská matematická olympiáda

Sedmý ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO) se uskutečnil ve dnech 22.–28. srpna 2013 v maďarském Veszprému. Soutěže se zúčastnilo 60 žáků z deseti zemí střední Evropy (České republiky, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska). Do reprezentačních družstev byli přitom vybráni pouze soutěžící, kteří jsou ve školním roce 2013/2014 ještě žáky středních škol a v roce 2013 nebyli členy reprezentačního družstva na Mezinárodní matematické olympiádě (IMO).

České reprezentační družstvo pro 7. ročník MEMO bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola 62. ročníku české MO. Do družstva České republiky tak byli nominováni *Martin Hora* z G v Plzni, Mikulášské nám. 23, *Matěj Konečný* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova 8, *Viktor Němeček* z G v Jihlavě, *Tomáš Novotný* z G v České Lípě, *Martin Raszyk* z G v Karviné a *Pavel Turek* z G v Olomouci–Hejčíně. Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.,* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci Jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *Mgr. Michal Rolínek* z Institutu vědy a technologie ve Vídni. Česká účast byla hrazena z prostředků Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy a Jednoty českých matematiků a fyziků. Přípravné soustředění českého týmu před MEMO finančně podpořil Motorpal Jihlava.

Všichni účastníci přicestovali do Veszprému 22. srpna a byli ubytováni na vysokoškolských kolejí místní Panonské univerzity. Den po příjezdu členové jury, složené z vedoucích jednotlivých družstev, zasedali na Fakultě informačních technologií (FIT), kde vybrali soutěžní úlohy pro oba dny a připravili jejich překlady do mateřských jazyků.

V sobotu 24. srpna proběhla na FIT soutěž jednotlivců a o den později tamtéž i soutěž družstev. První soutěžní den byly žákům předloženy v soutěži jednotlivců čtyři úlohy, druhý den v soutěži družstev osm úloh. První den měli soutěžící na vypracování řešení 5 hodin čistého času, každý příklad byl ohodnocen nejvýše 8 body. Druhý den řešila jednotlivá reprezentační družstva společně osm úloh, opět po dobu pěti hodin a každý příklad byl ohodnocen opět nejvýše 8 body. Jako osmá úloha v soutěži družstev byla zařazena i česká úloha od *Michala Rolínka.* Zadání soutěžních úloh uvádíme na konci příspěvku spolu se zemí, která úlohu navrhla.

Po skončení soutěže zajistili organizátoři soutěžícím prohlídku zajímavostí v okolí Veszprému, navštívili zajímavou zříceninu v Nagyvaszony, opatsví v Tihany a nakonec i přes rozmary počasí došlo na koupání v Balatonu. Mezinárodní jury však pokračovala ve své práci. Řešení úloh byla po soutěži rozmnožena a nezávisle opravena vedoucími týmů a místními koordinátory, což byli většinou zkušení matematici, bývalí medailisté mezinárodních olympiád, z celého Maďarska. Po opravách se vedoucí týmů s koordinátory sešli, porovnali svá hodnocení a navrhli konečné výsledky. Při závěrečném zasedání jury tyto výsledky schválila.

Večer 27. srpna se konal závěrečný slavnostní ceremoniál, kde organizátoři vyhlásili výsledky. V soutěži jednotlivců byli tři nejlepší ohodnoceni zlatými medailemi (všichni z Maďarska), dalších třináct stříbrnými a devatenáct soutěžících bronzovými medailemi. Navíc šestnáct žáků obdrželo čestná uznání za úplné vyřešení aspoň jedné úlohy. Je potěšitelné, že se mezi oceněnými neztratili ani čeští žáci. *Martin Hora* a *Tomáš Novotný* byli ohodnoceni po 17 bodech a získali stříbrné medaile. *Viktor Němeček* s 12 body získal bronzovou medaili. *Matěj Konečný*, *Martin Raszyk* a *Pavel Turek* obdrželi čestná uznání. V dosavadní historii MEMO se tak jedná o nejlepší výsledek českého družstva, což podtrhuje i třetí místo (za Maďarskem a Polskem) v neoficiální soutěži národů, do níž se započítává součet bodů získaných všemi žáky v soutěži jednotlivců.

V soutěži družstev zvítězilo Polsko (57 bodů), následováno Maďarskem (53 b.) a Německem (40 b.). České družstvo pokračovalo v dobrých výsledcích a spolu se Slovenskem (po 33 b.) obsadilo dělené 4.–5. místo. Uveďme pro představu počty zlatých, stříbrných a bronzových medailí vybojovaných jednotlivými družstvy v soutěži jednotlivců. Česká republika (0–2–1), Chorvatsko (0–1–1), Litva (0–0–2), Maďarsko (3–2–0), Německo (0–0–3), Polsko (0–3–3), Rakousko (0–0–2), Slovensko (0–2–3), Slovinsko (0–1–2), Švýcarsko (0–2–2).

Po vyhlášení výsledků vedoucí německé delegace *Bernd Mulansky* srdečně pozval účastníky na další ročník soutěže, která se bude konat od 18. do 24. září 2014 v Drážďanech. Zájemci mohou získat podrobnější informace na internetových stránkách soutěže

http://memo2013.mik.uni-pannon.hu/.

Uveďme ještě zadání všech dvanácti soutěžních úloh, za úlohou je uvedena navrhující země.

Soutěž jednotlivců

24. srpna 2013

1. Nechť pro kladná reálná čísla a, b, c platí

$$a+b+c=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Dokažte platnost nerovnosti

$$2(a+b+c)\geq\sqrt[3]{7a^2b+1}+\\+\sqrt[3]{7b^2c+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}.$$

Určete všechny trojice (a,b,c), pro které nastane rovnost.

Slovensko

2. Nechť n je kladné celé číslo. Na čtvercové desce složené ze $4n\times 4n$ shodných čtercových polí je umístěno $4n$ kamenů tak, že každý řádek i každý sloupec obsahuje jeden kámen. V jednom kroku můžeme jeden z kamenů přesunout na stranou sousedící pole. Několik kamenů se může současně nacházet na stejném poli. Cílem je obsadit kameny všechna pole jedné ze dvou úhlopříček.

Určete nejmenší číslo $k(n)$, pro něž je možné tohoto stavu dosáhnout po nejvýše $k(n)$ krocích bez ohledu na počáteční rozmístění kamenů.

Německo

3. Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB. Pro jeho vnitřní bod N platí

$$2|\sphericalangle ANB| = 180^\circ + |\sphericalangle ACB|.$$

Nechť D je průsečík přímky BN s přímkou rovnoběžnou s AN procházející bodem C. Bod P je průsečíkem os úhlů CAN a ABN.

Dokažte, že přímky DP a AN jsou navzájem kolmé.

Chorvatsko

4. Nechť a a b jsou kladná celá čísla. Dokažte, že existují kladná celá čísla x a y, pro něž platí

$$\binom{x+y}{2} = ax + by.$$

Maďarsko

Soutěž družstev
25. srpna 2013

1. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f(xf(x) + 2y) = \\ = f(x^2) + f(y) + x + y - 1.$$

Slovensko

2. Nechť pro čísla x, y, z, $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $x + y \neq 0$, $z + w \neq 0$ a $xy + zw \geq 0$. Dokažte platnost nerovnosti

$$\left(\frac{x+y}{z+w} + \frac{z+w}{x+y}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \geq \\ \geq \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{w} + \frac{w}{y}\right)^{-1}.$$

Švýcarsko

3. Na severní straně ulice stojí $n \geq 2$ domů. Domy jsou očíslovány od západu k východu po řadě čísly 1 až n. Číslo každého domu je napsáno na tabulce. Jednou se obyvatelé ulice rozhodli potrápit pošťáka a zaměnit tabulky následujícím způsobem: každá dvojice sousedních domů si daný den vymění tabulky právě jednou.

Kolik možných pořadí tabulek mohou obyvatelé ulice na konci dne takto získat?

Maďarsko

4. V rovině uvažujme konečný počet bodů, z nichž žádné tři neleží na téže přímce. Každý z těchto bodů lze obarvit buď červeně, nebo zeleně tak, aby libovolný trojúhelník s vrcholy stejné barvy obsahoval alespoň jeden bod jiné barvy. Najděte největší možný počet bodů s touto vlastností.

Maďarsko

5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Sestrojte trojúhelník PQR tak, aby $|AB| = 2|PQ|$, $|BC| = 2|QR|$, $|CA| = 2|RP|$ a aby přímky PQ, QR a RP procházely po řadě body A, B a C. (Všechny body A, B, C, P, Q a R jsou navzájem různé.)

Rakousko

6. Nechť K je vnitřní bod ostroúhlého trojúhelníku ABC takový, že přímka BC je společnou tečnou kružnic opsaných trojúhelníkům AKB a AKC. Průsečík přímek CK a AB označme D a průsečík přímek BK a AC označme E. Nechť F je průsečík přímky BC s osou úsečky DE. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC protíná kružnici k se středem F a poloměrem FD v bodech P a Q.

Dokažte, že PQ je průměr kružnice k.

Slovensko

7. Do polí tabulky 2013×2013 byla postupně zleva doprava a shora dolů zapsána čísla od 1 do 2013^2. Poté jsme současně smazali každý řádek a každý sloupec obsahující alespoň jednu druhou mocninu celého čísla. Kolik polí v tabulce zůstalo?

Rakousko

8. Na tabuli je napsán výraz

$$\pm\square\pm\square\pm\square\pm\square\pm\square\pm\square.$$

Dva hráči, A a B, se střídají v tazích v následující hře, přičemž hráč A začíná. V každém tahu hráč nahradí symbol $\square$ kladným celým číslem. Když jsou všechny symboly $\square$ nahrazeny, hráč A nahradí každé ze znamének $\pm$ buď $+$, nebo $-$ (nezávisle na ostatních). Hráč A vyhraje, pokud hodnota výrazu na tabuli není dělitelná žádným z čísel $11, 12, \ldots, 18$. V opačném případě vyhraje hráč B.

Rozhodněte, který z hráčů má vyhrávající strategii.

Česká republika

Pavel Calábek

44. Mezinárodní fyzikální olympiáda v Dánsku

V roce 2013 proběhl už 44. ročník Mezinárodní fyzikální olympiády (MFO) – vrcholové světové soutěže středoškolských studentů ve fyzice. Soutěž pořádaly společně ve dnech 7. až 15. července Dánská technická univerzita a Institut Nielse Bohra Kodaňské univerzity za finanční podpory a garance Ministerstva dětí a školství Dánského království. Výběr místa soutěže právě v roce 2013 měl zdůraznit důležitou historickou událost z dějin fyziky – uplynulo totiž právě sto let od formulace Bohrových postulátů, o nichž se již řadu let učí nejen studující univerzit, ale i středoškoláci.

Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF), odborný garant Fyzikální olympiády v České republice, z pověření Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky na soutěž vyslala podle doporučení Ústřední komise Fyzikální olympiády sedmičlennou reprezentaci v tomto složení: RNDr. Jan Kříž, Ph.D., Univerzita Hradec Králové, vedoucí delegace, Mgr. Filip Studnička, Univerzita Hradec Králové, pedagogický vedoucí. Soutěžící, tedy individuální členové českého družstva, byli vybráni na základě výsledků celostátního kola 54.ročníku Fyzikální olympiády v Brně a výběrového soustředění v Hradci Králové:

Lubomír Grund, absolvent Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, Jiří Guth Jarkovský, student Gymnázia v Jírovcově ulici, České Budějovice, Jakub Vančura, absolvent Gymnázia na třídě Kpt. Jaroše, Brno, Jakub Rösler, student Gymnázia Jiřího Gutha Jarkovského, Truhlářská, Praha, Miroslav Hanzelka, absolvent Gymnázia v České Lípě.

Další přípravu družstva, jeho náhradníka a dalších nadějných studentů z nižších ročníků středních škol organizoval prof. RNDr. Ivo Volf, CSc. Příprava probíhala ve dvou etapách: jednak korespondenční formou, jednak na dvanáctidenním intenzivním soustředění v prostorách katedry fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové v červnu 2013. Náklady na výjezd české delegace byly uhrazeny z prostředků poskytnutých JČMF Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy a za přispění JČMF z jejích vlastních finančních prostředků.

Delegace nastoupila cestu na 44. MFO v neděli dne 7. 7. 2013. Z Prahy odjela delegace vlakem v 6:29 a s jedním přestupem v Berlíně dorazila do místa konání MFO – Kodaně v 18:14. Organizátoři soutěže vyzvedli českou delegaci na nádraží a přepravili ji do míst ubytování. Studenti byli ubytováni v hostelu *Danhostel Copenhagen City* v centru Kodaně. Vedoucí byli ubytováni v hotelu *Scandic* v městečku Lyngby, asi 20 km severně od centra Kodaně, v blízkosti Dánské technické univerzity (DTU), na které proběhly zahajovací i zakončovací ceremoniály, všechna zasedání mezinárodní jury i experimentální část soutěže. Teoretická část soutěž proběhla v prostorách gymnázia Gefion v centru Kodaně.

Organizátoři připravili soutěžícím tyto tři velmi náročné, ale zajímavé a aktuální **teoretické** úlohy:

1. Meteorit Maribo. Tato úloha studovala různé aspekty dopadu meteoritu Maribo do jižního Dánska v roce 2009. Některá data studenti získali přímo z předložených autentických fotografií dopadu. Museli prokázat znalosti především z mechaniky, termiky, ale také jaderné fyziky. Originální anglický text a podrobné řešení viz

http://ipho2013.dk/ipho2013-problems.htm

http://ipho2013.dk/ipho2013-solutions.htm.

2. Plazmonový generátor páry. Tato úloha byla jednoznačně nejobtížnější a velmi moderní. Jednalo se v ní o jev, jehož experimentální pozorování bylo publikováno teprve letos! Zdrojem energie velmi účinného generátoru páry je dopadající světlo a jádro efektu tkví v kolektivním kmitání volných elektronů kovových nanočástic. Studenti museli v této úloze použít svých znalostí z elektřiny a magnetismu. Originální anglický text a instruktážní řešení pro opravu najdete na téže stránce IPhO.

3. Grónský ledovec. Jednalo se o klasickou úlohu z mechaniky. Soutěžící měli za úkol studovat tzv. tečení ledovce (ledovec se neustále pohybuje, lze ho popisovat jako velmi viskózní nestlačitelnou kapalinu). Dále určovali, jak lze z hlubokého vrtu uvnitř ledovce usuzovat na změny klimatu v historii. V závěru úlohy se zabývali důsledky případného roztátí Grónského ledovce. Originální anglický text a podrobné řešení najdete na téže stránce.

Experimentální úlohy. Byly zadány dvě nezávislé úlohy, které byly sice časově velmi náročné, na druhou stranu je nutné je považovat za úlohy standardní a zvládnutelné.

1. Rychlost světla. V této úloze měřili soutěžící rychlost světla v látkovém prostředí – uvnitř optického kabelu. V další části této úlohy určovali index lomu vody díky refrakci laserového paprsku vysílaného laserovým délkovým měřidlem.

2. Solární články. Jednalo se o klasickou úlohu na fotovoltaické články. Soutěžící nejdříve studovali závislost zkratového elektrického proudu článkem na vzdálenosti článku od zdroje světla. V další části proměřovali volt-ampérovou charakteristiku solárního článku, z které potom určovali jeho maximální výkon. V závěru úlohy porovnávali studenti různá sériová a paralelní zapojení dvou článků v situaci, kdy je jeden z nich zakrytý.

Také tyto úlohy doprovází dostatečně podrobný text zadání a řešení.

Soutěže se nakonec aktivně zúčastnilo celkem 381 studentů z 83 států a teritorií z pěti světových kontinentů (Evropy, Asie, Austrálie, Afriky a obou částí Ameriky). Některé delegace měly počet soutěžících menší než pět. Mezi 83 zúčastněnými státy bylo 25 států Evropské unie včetně nového členského státu EU, Chorvatska. Tradičně nepřicestovaly delegace Malty a Lucemburska, navíc kvůli finančním problémům i delegace Irska.

Celkový počet účastníků olympiády dosáhl téměř 900, na MFO kromě 381 studentů přicestovalo 155 vedoucích (maximálně dva vedoucí za jeden stát), 100 pozorovatelů či hostů a 250 organizátorů (včetně průvodců studentů a hodnotitelů úloh).

Nejlepšího výsledku dosáhl stejně jako v loňském roce soutěžící Attila Szabó z Maďarska (47,0 bodů z padesáti možných). Kromě ceny za absolutní vítězství získal opět i cenu za nejlepší řešení teoretických úloh. Cenu za nejlepší řešení experimentálních úloh získal soutěžící Kevin Zhou ze Spojených států amerických. Podle statutu bylo uděleno minimálně 8 % soutěžících zlatá medaile, dalším 17 % stříbrná, dalším 25 % bronzová medaile a dalším 17 % čestná uznání; celkem tedy bylo kladně hodnoceno 67 % účastníků mezinárodní soutěže, tedy 254 soutěžících.

Po konečném stavu hodnocení (po provedené moderaci – individuální diskusi vedoucích národních delegací se členy komisí „markerů" k opravám) zlatou medaili získalo 41 soutěžících, stříbrnou 64 soutěžících a bronzovou medaili 101 soutěžících. Čestné uznání bylo uděleno 65 soutěžícím. K nejlepším řešitelům patří již tradičně jednotlivci družstev těchto států: Čína (ČLR), Korea, Rusko, Thajsko, Singapur, Tchaj-wan a USA. Česká republika se v neoficiálním pořadí států (podle bodů přidělených za medaile) zařadila na 35. příčku (11. místo v EU) – tedy o něco níže než v minulých letech. i tak lze ale výsledek českého družstva považovat za úspěšný. Podívejme se ještě na pořadí států Evropské unie na 44.MFO, jak bylo dosaženo: Rumunsko, Maďarsko, Francie, Bulharsko, Polsko, Estonsko, Německo, Velká Británie, Litva, Itálie, Rakousko, Česká republika, Nizozemsko, Slovensko, Finsko, Lotyšsko, Chorvatsko, Slovinsko, Belgie, Španělsko, Dánsko, Švédsko, Řecko, Portugalsko, Kypr.

Letošní výsledky jednotlivých českých řešitelů jsou tyto:

Lubomír Grund; 30,8 bodů, stříbrná medaile, 87. místo v celkovém pořadí, Miroslav Hanzelka; 25,9 bodů, bronzová medaile, 138. místo, Jiří Guth; 23,7 bodů, bronzová medaile, 161. místo, Jakub Rösler; 17,3 bodů, čestné uznání, 253. místo, Jakub Vančura; 15,4 bodů.

Výsledky 44. MFO ukázaly, že členové českého družstva byli na soutěž opět dobře a pečlivě vybráni. Soutěžící se na soutěž velmi dobře připravili. Bohužel stále více vychází najevo, že se naši středoškoláci nemohou srovnávat se svými vrstevníky z především asijských zemí. Ačkoliv všech pět českých soutěžících bez diskuse prokázalo znalosti a experimentální dovednosti na mnohem vyšší úrovni než by odpovídalo současným středoškolským požadavkům, světová špička je dnes ještě dál. Markantně to bylo znát především v experimentální části. Úlohy byly zvládnutelné pro studenty mající určitou experimentální rutinu. Z našich středních škol však fyzikální experiment v posledních dvou desetiletích prakticky vymizel. Ačkoliv se na tuto problematiku zaměřuje přípravné soustředění na MFO, dva týdny intenzivní práce studentů nemohou nahradit dlouhodobou několikaletou přípravu. Příští MFO proběhne 13. – 22. července 2014 v Kazachstánu, v Astaně. Česká delegace již obdržela pozvání k účasti.

Závěrem chceme poděkovat všem, kdo se aktivně podílel na úspěchu delegace České republiky na 44. Mezinárodní fyzikální olympiádě v Dánském království. Ne každý účastník vrcholového zápolení při řešení problémových úloh v soutěži Fyzikální olympiáda je srozuměn s tím, že nestačí izolovaný úspěch, ale stát se vynikajícím mladým fyzikem představuje dlouhodobý proces, který obsahuje několikaletou studijní činnost středoškolské i vysokoškolské fyzikální literatury, ustálení informací a dovedností s nimi pracovat, do určité soustavy, ale také jisté předpoklady k jejich tvořivému využívání a jejich postupnému rozvíjení. Tato studijní činnost se uskutečňuje zejména ve volném čase středoškoláků a spolyká stovky hodin. Proto především jim patří poděkování za dobrou reprezentaci České republiky.

Jan Kříž, Filip Studnička,
Ivo Volf, Bohumil Vybíral,
ÚKFO, Univerzita Hradec Králové

Reprezentace České republiky na 44. Mezinárodní fyzikální olympiádě v Dánsku v roce 2013. Zleva: Mgr. Filip Studnička, pedagogický vedoucí, Lubomír Grund, stříbrná medaile, Miroslav Hanzelka, bronzová medaile, Jakub Rösler, čestné uznání, Jiří Guth Jarkovský, bronzová medaile, Jakub Vančura a RNDr. Jan Kříž, Ph.D., vedoucí delegace

Mezinárodní olympiáda v informatice – IOI 2013

Dvacátý pátý ročník Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2013 se konal ve dnech 6. – 13. 7. 2013 v australském městě Brisbane. Na olympiádu přijely delegace ze 77 zemí celého světa. Z každé země se mohou IOI zúčastnit čtyři soutěžící a dva vedoucí, celkově letos soutěžilo 299 studentů. České reprezentační družstvo bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola 62. ročníku Matematické olympiády – kategorie P a bylo tvořeno těmito studenty: *Štěpán Šimsa*, Gymnázium J. Jungmanna, Litoměřice *Ondřej Hlavatý*, Gymnázium J. V. Jirsíka, České Budějovice *Mark Karpilovskij*, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno *Martin Raszyk*, Gymnázium Karviná

V roli vedoucích českou delegaci na IOI 2013 doprovázeli *doc. Mgr. Zdeněk Dvořák*, *Ph.D.* a *Mgr. Zbyněk Falt*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Naši účastníci IOI se na soutěž připravovali společně s českými reprezentanty vybranými pro CEOI (Středoevropská olympiáda v informatice) na tradičním týdenním soustředění CPSPC (*Czech-Polish-Slovak Preparation Camp*). Toto přípravné soustředění bylo letos uspořádáno ve Varšavě a zúčastnili se ho vybraní studenti ze všech tří zemí. Do budoucna se uvažuje o možnosti rozšířit přípravné soustředění ještě o studenty z Maďarska.

Během prvního dne pobytu v Brisbane proběhlo slavnostní zahájení soutěže. Studenti potom měli příležitost seznámit se podrobně s počítači a se softwarovým prostředím, ve kterém budou pracovat při soutěži. Vlastní soutěž se konala jako obvykle ve dvou dnech, oddělených jedním dnem odpočinku. Po druhém soutěžním dnu následoval další odpočinkový den věnovaný výletu do Australia Zoo. V závěrečném dni pobytu se jako obvykle uskutečnilo slavnostní vyhlášení výsledků.

Vlastní soutěž probíhá podobným způsobem, jako praktická část ústředního kola naší Matematické olympiády – kategorie P. Každý soutěžící má přidělen osobní počítač, na kterém řeší zadané úlohy. V každém dni jsou zadány tři úlohy a na jejich řešení je vymezen čas 5 hodin. Úlohy je třeba dovést až do tvaru odladěného programu. Hotové programy se odevzdávají k vyhodnocení prostřednictvím soutěžního prostředí, odevzdané programy se testují pomocí předem připravené sady testovacích dat. Prováděné testy jsou navíc omezeny časovými limity, aby se kromě otestování správnosti odlišila i časová efektivita algoritmu použitého jednotlivými účastníky soutěže. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky zcela správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší testy. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů. Zadané úlohy jsou navíc rozděleny do podúloh, z nichž ty jednodušší bývají poměrně snadné, takže je mohou správně vyřešit i méně zkušení soutěžící.

Letos byla všechna řešení vyhodnocována průběžně a soutěžící se tak téměř okamžitě dozvěděli, kolik bodů získají. Měli také možnost případně své řešení ještě opravit a odevzdat ho znovu. Divákům, nikoliv však soutěžícím, byla k dispozici i průběžná aktuální výsledková listina. Oproti minulým rokům bylo zrušeno omezení na maximální povolený počet odevzdání úloh. Tato změna však společně s dalšími technickými komplikacemi způsobila značné problémy během prvního soutěžního dne, kdy docházelo k zahlcení systému a k výraznému zpoždění během vyhodnocování.

Každá z šesti soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body. Na základě stanovených pravidel se na IOI podle dosažených bodů rozdělují medaile. Některou medailí obdrží nejvýše polovina účastníků soutěže, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se udělují přibližně v poměru 1 : 2 : 3 s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili. Na letošní IOI bylo rozděleno celkem 25 zlatých, 50 stříbrných a 74 bronzových medailí.

Výsledky našich soutěžících: 98. *Štěpán Šimsa* 313 bodů bronzová medaile 135. *Martin Raszyk* 250 bodů bronzová medaile *Ondřej Hlavatý* 170 bodů *Mark Karpilovskij* 125 bodů

Všechny podrobnosti o soutěži, texty soutěžních úloh i jejich řešení a celkové výsledky lze nalézt na Internetu na adrese `http://www.ioi2013.org`. Příští ročníky IOI se budou konat postupně na Taiwanu (2014), v Kazachstánu (2015), v Rusku (2016) a v Iránu (2017). Pořadatelé IOI 2014 z Taiwanu na místě pozvali všechny delegace z IOI 2013, aby se zúčastnily také následujícího ročníku soutěže. Ten proběhne ve dnech 13. – 20. 7. 2014 ve městě Taipei.

Pavel Töpfer,
MFF UK v Praze

Z HISTORIE

Říkají vám dnes ještě něco stupně Réaumura?

(Ke 330. výročí narození francouzského polyhistora René-Antoine de Réaumura)

> *„Když chceš poznat člověka, podívej se na jeho práci."*
> Friedrich Schiller

René-Antoine de Réaumur (1683–1757)

Dnes jsou teploměry asi nejznámějšími fyzikálními přístroji, ale ještě před několika staletími byly zcela neznámé. Teplota se určovala podle tělesných pocitů; při výrobě kovů a keramiky se lidé řídili barvou rozžhavených předmětů nebo roztavením kovů. Jejich historie v podobě, jak je v podstatě známe dnes, počala v 17. století a je spojena s řadou známých i polozapomenutých jmen – *Galileo Galilei, Otto von Guericke, Gaspar Schott, Jean Rey*, toskánský velkovévoda *Ferdinand II., Robert Boyle, Christian Huygens* … až po trojici vrstevníků, zakladatelů teploměrné soustavy: vedle nejmladšího z nich švédského astronoma *Anderse Celsia* (1701–1744) a německého fyzika *Daniela Gabriela Fahreheita* (1686–1736) to byl protagonista našeho vyprávění z letošního kalendáře historie světové vědy a techniky, *René-Antoine Ferchault de Réaumur*, který bezesporu patřil k nejvšestrannějším francouzským učencům první poloviny 18. století. Tento fyzik, chemik, metalurg, matematik, právník, zoolog, fyziolog, paleontolog, meteorolog, technik etc., člen pařížské (1710) a petrohradské (1737) Akademie věd, vpravdě naplňuje označení „polyhistor" pro člověka se širokým množstvím znalostí či dovedností ve více oborech lidské činnosti. Jeho přátelé o něm říkali, že je „Plinius 18. století" (podle římského válečníka a filozofa Plinia staršího, autora rozsáhlé 37 svazkové encyklopedie „Naturalis historia", která byla pro Evropu hlavním pramenem poznání o přírodě až do období humanismu). Všechna pozorování a experimenty prováděl obdivuhodně přesně a trpělivě.

Do světa seriozní vědy lze vstoupit mnoha branami. Synek ze šlechtické rodiny, narozený 28. února 1683 v přístavním městě a pevnosti La Rochelle na pobřeží Atlantického oceánu (čtenáři Dumasových Tří mušketýrů toto místo dobře znají), měl již od raného dětství velmi různorodé zájmy. Po absolvování jezuitské koleje v Poitiers zprvu jako absolvent základního filozofického vzdělání studoval civilní právo a matematiku v Bourges, ale nakonec zvítězily přírodní vědy a matematika, ve kterých se vzdělával od roku 1703 v Paříži. Na základě svých raných vědeckých pojednání ze zoologie se stal již ve 25 letech členem francouzské Akademie věd (*Académie des Sciences*), v jejíchž „memoárech" pak publikoval většinu svých prací.

Ačkoliv byl především přírodovědec, zabýval se různými technickými problémy z praxe a ve svých „dobrých zdáních" pro ně navrhoval řešení či zlepšení současného stavu: mimo jiné navrhnul nové technologické postupy pro výrobu námořních lan (experimentálně dokázal, že lana svázaná z více slabších vláken jsou pevnější nežli silná vlákna oddělená od sebe), zlatých drátků, nepromokavého a nepropustného papíru, chladicích směsí, zrcadel, „porculánu" (průsvitného vykrystalovaného skla), umělých líhní, konzervování vajec i umělého hedvábí (práce o možném využití pavouků k jeho výrobě vzbudila dokonce zájem čínského císaře Kanghe, který ji nechal přeložit do čínštiny). Z pověření pařížské Akademie věd se zabýval trvalejším zmagnetováním kostelního kříže po úderu blesku. Známé je rovněž jeho vystoupení před akademiky v lednu 1746, kde přečetl podstatnou část dopisu od profesora *Petruse van Musschenbrocka* z Leydenu o „příšerném experimentu" při zkoumání elektrických sil. Hospodářsky významné jsou Réaumurovy pokusy s výrobou „dobré oceli", o níž napsal v letech 1722–1725 dvě samostatné studie „Umění přeměny kujného železa na ocel", přeložené později také do angličtiny (objevil důležitost obsahu uhlíku v železe). Rovněž jako první použil mikroskop ke studiu struktury kovů. Odměnu 12 tisíc liber za vynálezy v hutnictví věnoval „své" Akademii pro rozvoj technického studia, podobně skončila i řada jeho dalších příjmů. Po průzkumu v terénu vypracoval zprávu o zlatonosných řekách, rozsahu a výnosu lesních porostů a nalezištích polodrahokamu tyrkysu a zkamenělin na území Francie; je také autorem 27 svazkového díla „Popis umění a řemesel", představující nejen významný příspěvek k poznání dějin technického vývoje (vyšlo až v roce 1761 čtyři roky po jeho smrti), ale také impuls k zavádění nových a obnově zanedbaných průmyslových odvětví ve Francii.

Širší veřejnosti se stal známým v roce 1730 sestrojením lihového teploměru a návrhem teploměrné stupnice, rozdělené na 80 dílů – podle poznatku, že „líh od mrazu vody do svého varu zvětšuje se o 80 tisícin původního objemu". Réaumurova stupnice ztotožňuje bod tání ledu s 0 stupni R (= 0 °C, 32 °F) a bod varu vody s 80 stupni R (= 100 °C, 212 °F), vztaženo k mořské hladině. Tato stupnice na teploměru úspěšně soutěžila po roce 1731 (zvláště ve Francii) se stupnicí Celsiovou (1742) a Fahrenheitovou (1714). Svého času byla velmi rozšířená (udržela se na teploměrech až do 20. století), ale dnes se již téměř nepoužívá. Přispěla k tomu také prosazující se desítková soustava, takže ve většině zemí (vyjma USA) se ujala stupnice Celsiova, přestože není o nic přesnější nežli měření podle obou stupnic konkurenčních. Pro přepočet teplot naměřených v jednotlivých stupnicích platí: $\mathrm{R} = 4(\mathrm{F}–32)/9$, $\mathrm{F} = 9\mathrm{R}/4 + 32$, $\mathrm{C} = 5\mathrm{R}/4$, $\mathrm{R} = 4\mathrm{C}/5$.

V roce 1735 přijal z finančních důvodů post velitele a intendanta důležité vojenské posádky v Saint-Louis (region Alsasko), neboť toto místo bylo spojeno se stálým platem umožňujícím mu bádání bez existenčních potíží. Ačkoliv podle dochovaných hlášení plnil svoje povinnosti vzorně, našel zde více času pro četná přírodovědná pozorování a pokusy, které patřily po celý jeho život k nejoblíbenějším aktivitám. Zabýval se například vznikem perel u perlorodek, anatomií bezobratlých živočichů, vztahy mezi životem hmyzu a rostlinami (v letech 1734 až 1742 vycházelo v Paříži jeho šestisvazkové „Pojednání věnované historii hmyzu" čítající 4 tisíce stran textu a 5 tisíc obrázků), možnostmi konzervování přírodnin, produkcí žláz včelích dělnic (mateří kašička), pokusy s trávením masa u ptáků a psů (okolo roku 1750 objevil neznámou látku – trávící žaludeční enzym pepsin), jevem regenerace u raků aj. Za početné biologické práce obdržel již v roce 1722 od tehdejšího regenta Francie vévody Filipa Orlánského doživotní rentu.

René-Antoine de Réaumur zemřel na zámku Bermondiére v provincii Maine na podzim roku 1757 po nešťastném pádu z koně. Byl jedním z posledních univerzálních vědců, i když nám po něm zůstala jen ta nepoužívaná stupnice na teploměru.

Bohumil Tesařík

André-Eugéne Blondel – vynálezce oscilografu

(Ke 150. výročí narození)

Životní osudy vědců a vynálezců jsou často dramatické, poučné i zajímavé. V letošním roce si mimo jiných výročí z historie světové vědy a techniky připomínáme také jeden a půl století od narození francouzského fyzika a inženýra, významného průkopníka technických věd v oboru optiky a elektrotechniky, profesora a akademika *André-Eugéne Blondela*. Podobně jako řada dalších vědců a techniků také on se dostal do stínu zapomnění laické i odborné veřejnosti, ačkoliv mimo jiné vynalezl oscilograf k pozorování a registraci časového průběhu proměnných elektrických veličin, a navrhl používat novou fotometrickou jednotku lumen.

Pokud se chceme zabývat jeho životopisem a vykonaným dílem, nemůžeme se ubránit vážné komparaci. Totiž, že o co více dostal od osudu na nadání a pracovitosti, o to více byl ochuzen jeho normální lidský život. Od mládí trpěl nevalným zdravím a velmi brzo se stal nepohyblivým kvůli paralýze nohou, která omezila na 27 let jeho pohyb jen po místnostech. Nikdy však nepřestal pracovat; přirozená zvídavost a snaha proniknout do záhad přírody a odhalit jejich tajemství jej dovedla tak uchvátit, že odhodil starosti všedního života a nedal se od vědecké a pedagogické práce odradit ani zdravotními potížemi, které byl nucen po celý život překonávat.

Dostupná biografická literatura o André Blondelovi je dosti skoupá. Narodil se 28. srpna 1863 v Chaumontu (departement Haut-Marne) v regionu Champagne-Ardenne v rodině váženého státního úředníka (soudce?) pocházejícího z Dijonu. Vždy a na všech školách patřil k nejlepším studentům; navštěvoval jednu z nejvýznamnějších a nejstarších (založenou v roce 1783 králem Ludvíkem XVI. jako školu pro budoucí ředitele dolů) francouzských inženýrských škol *École nationale des ponts et chaussées* (Škola mostů a cest), kde promoval v roce 1888. Téměř po celý svůj profesní život byl zaměstnán jako inženýr ve firmě zabývající se výrobou a provozem majáků; do důchodu v roce 1927 odešel z postu generálního inspektora první třídy. Stal se profesorem elektrotechnologie na své alma mater a na hornické *École nationale supérieure des mines* de Paris v Paříži. V roce 1913 se stal doživotním členem Franouzské akademie věd a od roku 1932 zahraničním členem-korespondentem Akademie věd bývalého Sovětského svazu. V roce 1927 byl jmenován důstojníkem Légion d'honneur; obdržel také řadu ocenění své vědecké práce (medaile Franklinova institutu, Faradayova medaile, cena lorda Kelvina, cena Montefiore aj.). V roce 1942 vydala francouzská pošta výplatní známku v hodnotě čtyř franků s Blondelovým obrazem. Ačkoliv měl po celý život chatrné zdraví, dožil se věku 75 let a zemřel v Paříži 15. listopadu 1938.

Svoji vědeckou práci zaměřil na řešení různých fyzikálních a technických problémů z oblasti fotomerie, silnoproudé i slaboproudé elektrotechniky (bezdrátové telegrafie), akustiky, mechaniky a dalších vědních oborů. V letech 1891 až 1893 se podílel na odhalování základních zákonitostí indukčních motorů. Spolu s inženýrem *Engelberthem Arnoldem* stanovil výsledný magnetický tok stroje a jeho rozdělení na tok společný a toky rozptylové. Především však v roce 1893 vynalezl elektromagnetický oscilograf („oscilo“ je první částí složených slov značících vztah ke kmitání, rychlému střídání), který nahradil dosud používaný stroboskop. Získal s ním hlavní cenu na výstavě v St. Louis v roce 1904 a byl používán další desítky let, než byl nahrazen přístroji digitálními. Stal se asi nejpoužívanějším a nejužitečnějším univerzálním přístrojem, který má trvalé místo na stole mnoha provozních, měřicích a výzkumných pracovišť.

André Blondel se také významně zasloužil o fotometrickou terminologii. V roce 1894 předložil návrh na přijetí dnes jedné z odvozených jednotek soustavy SI „lumen“ (lm) pro fyzikální veličinu světelný tok, charakterizující světelný výkon záření či jeho zdroje. Je definován jako světelný tok vyzařovaný do prostorového úhlu 1 steradiánu bodovým zdrojem, jehož svítivost je ve všech směrech 1 kandela. Používání této jednotky bylo schváleno na jednání *International Electrical Congress* v roce 1896. V roce 1942 byla v Německu na jeho počest pojmenována nová jednotka v soustavě CGS (od roku 1978 nepoužívaná) pro fyzikální veličinu jas „blondel“ (1 blondel $= 1/\pi$ cd/m^2).

Mnohostranný učenec byl rovněž průkopníkem ve výzkumech vysokonapěťových přenosů elektrického proudu na velké vzdálenosti. V roce 1909 se spolupodílel na vypracování jednoho z prvních projektů dálkového přenosu energie. Zahrnoval vybudování hydroelektrárny o výkonu 300 tisíc koní v Genissiatu na řece Rhoně a přenosovou soustavu do Paříže vzdálené více než 350 km.

Bohumil Tesařík

Významný technický génius, ale špatný obchodník

(Ke 100. výročí úmrtí švédského inženýra a vynálezce Gustafa de Lavala)

> *„Spát čtyři hodiny denně je povinnost, pět hodin pohodlí a šest hodin zahálka.“*
> *„K dosažení něčeho cenného je třeba tří základních věcí: tvrdé práce, vytrvalosti a zdravého rozumu.“*
> *„Vynalézavost je z jednoho procenta inspirace a z devětadevadesáti procent transpirace (tj. úmorná, vyčerpávající práce).“*
> Thomas Alva Edison

Gustaf de Laval (1845–1913)

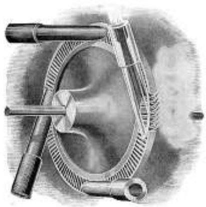
„Století páry“ přineslo nepřeberné množství vynálezů, mezi kterými významné místo zaujímají parní turbíny. Pro někoho odtažité složité zařízení, avšak bez něho bychom dnes doma nesvítili. Je plodem technického kvasu 19. století, svým posláním a využitím patří do století následujících a její princip je znám téměř dva tisíce let (Hérón). Nestojí v historii světové vědy a techniky za pozornost? V 80. letech předminulého století se prezentovali svou úspěšnou prací v oboru parních turbín zejména dva erudovaní technici, jejichž jména jsou nejčastěji uváděna v souvislosti s počátkem moderních turbín: Švéd Gustaf de Laval a Angličan Charles Algernon Parsons. Později k nim přibude ještě jedno jméno - Slovák Aurel Stodola, zakladatel teorie a konstruování parních a plynových turbín.

Hlavní protagonista našeho vyprávění, vzdělaný všestranný technik, vynálezce (mimo jiné) odstředivého separátoru a první funkční parní turbíny, průmyslník a špatný obchodník, potomek francouzských emigrantů ze 17. století, *Karl Gustaf de Laval Patrik*, se narodil 9. května 1845 v rodině důstojníka a zeměměřiče v malém městě Orsa (kraj Dalarna v centrálním Švédsku). Již jako dítě jej považovali za neobyčejně chytrého a vynalézavého se zřetelně rozmanitými technickými vlohami, díky kterým byl později schopen vytvořit celou škálu rozmanitých vynálezů. Protože neměl zájem o vojenskou kariéru, po absolvování gymnázia ve Falunu se v osmnácti letech zapsal v roce 1863 ke studiu strojírenstvi na technologickém institutu Technologiska Institutet (později Royal Institut of Technology) ve Stockholmu, kde promoval v roce 1866 (M. Sc.). Poté pracoval krátkou dobu jako projektant ve švédské společnosti těžící měď Stora Kopparberg (pro zajímavost patrně nejstarší průmyslová korporace na světě), ale ze zdravotních důvodů byl nucen toto místo opustit a raději pokračovat v dalším studiu. Ačkoliv se v předchozím vzdělávání zaměřil především na mechaniku, začal na univerzitě v Uppsale studovat chemii a v roce 1872 zde získal doktorát filozofie (Pd.D.).

Po ukončení univerzitních studií se znovu vrátil do praktického života. Jeho první projekt představovala výstavba sklárny, ve které byly skleněné láhve osazovány pomocí odstředivé síly. Brzy však ceny lahví klesly a mladý podnikatel skončil finančním fiaskem. Ostatně nebylo to v jeho životě nic ojedinělého. Od roku 1877 byl zaměstnán jako inženýr v přední strojírenské firmě Kloster Werke, kde zkonstruoval odstředivý separátor (podle soudobého Ottova slovníku naučného se v hesle „separátor“ uvádí, že je to název pro stroje třídicí, hlavně takové, jichž se užívá na třídění podle měrné váhy. . .) oddělující smetanu z mléka a brzy poté dojicí stroj. V roce 1883 společně s *Oscarem Lammem* založili společnost AB Separator, jejíž produkty se staly hnací silou ve zpracování mléka vlastně až do současné doby. Získaly čestná ocenění na průmyslových výstavách v Londýně, Haarlemu, Flensburgu a dalších místech v Evropě i zámoří; cena odstředivky se tehdy pohybovala okolo 450 dolarů. K výrobě separátorů přibyly od třicátých let minulého století výměníky tepla a v roce 1969 po akvizici firmy LKM v dánském Koldingu také zařízení na manipulaci s tekutinami.

Při konstruování odstředivek na mléko, které k pohonu potřebovaly motor s vysokými otáčkami, se v letech 1888–1889 dostal k parním turbínám, jejichž princip je známý téměř dva tisíce let. Nejdříve experimentoval s čistě reaktivní turbinkou antického vynálezce Hérona z Alexandrie; asi prvním novověkým návrhem stroje připomínajícího parní turbínu je zařízení italského architekta Giovanniho de Branky (1629), které se o dvě a půl století později stalo ideovým předchůdcem de Lavalova vynálezu rovnotlaké (akční) parní turbiny. Je to turbina s vysokými otáčkami, opatřená na obvodě velkým počtem drobných lopatek, u níž expanze páry probíhala v divergentních (rozšířených) dýzách (dnes nazývaných Lavalovy – obr. 1).

Enormně vysoké otáčky oběžného kola (asi 30 000 za minutu) byly dobré pro odstředivky, ale jinak působily samé problémy. Pro pohon elektrických generátorů bylo třeba počet otáček snížit pomocí složitých ozubených převodů. Parní turbíny se staly základním typem pohonu v soudobých tepelných elektrárnách, včetně jaderných. Nalezly široké uplatnění jako hnací jednotky na vojenských a obchodních lodích, mimo to slouží jako pohon různých strojů – čerpadel, dmychadel apod.



Obr. 1

Plodný vynálezce a vizionář, neustále produkující nové nápady, se zapojil do mnoha projektů (celkem asi 200) z různých oblastí, často i extravagantních, které se nikdy neuskutečnily. Zajímal se o letadla a rakety, automatické telefonní spojení, extrakci zlata z mořské vody, elektrické osvětlení, těžbu chudých zinkových rud, mobilní dojící stroje, stavbu válečných lodí pro Rusko, vznášedla (překonávající Atlantik do deseti hodin) a řadu dalších problémů.

Díky své reputaci doma i v zahraničí ovlivnil životní osudy mnoha mladších techniků, budoucích významných osobností švédské vědy a techniky. Připomeňme z nich jen nositele Nobelovy ceny za fyziku (technický vynález automatických regulátorů svícení majáků a osvětlovacích věží) *Nielse Gustafa Daléna.* Ten v duchu rodinných tradic začal studovat na zemědělském učilišti chov dojnic, ale naštěstí vyhledal ve Stockholmu již tehdy slavného de Lavala, který ihned rozpoznal jeho všestrannost a přirozené nadání zejména pro mechaniku a doporučil mu studovat raději technické vědy.

Nehodlal usnout na vavřínech, neustále po celý život hledal, jak dělat věci jinak. Na přelomu 19. a 20. století patřil nejen ve Švédsku k nejplodnějším vynálezcům a podnikatelům: založil 37 výrobních a obchodních společenství a získal 92 patentů, jejichž využití poskytovalo práci milionům lidí. Od roku 1886 byl členem Královské švédské akademie věd a jejích výborů vybírajících laureáty Nobelových cen za chemii a fyziku, čestným členem švédské zemědělské akademie, byl zvolen poslancem a senátorem švédského parlamentu za konzervativní stranu, podílel se na vydávání deníku Svenska Dagbladet, během života obdržel řadu ocenění i od švédského krále (kříž komtura Řádu Wasa a rytíře v řádu Horth Star). Navzdory využívání četných patentů ve výrobní praxi a založení mnoha úspěšných společností, byl špatným obchodníkem, nezajímajícím se příliš o ekonomickou stránku svých četných aktivit, opovrhoval všedními starostmi a po celý život žil v permanentní finanční tísni. Pro svoji nesmírnou pracovitost a odvahu v podnikání bývá srovnáván s *T. A. Edisonem* („Edison v mlékárenství“), avšak na rozdíl od něho nebyl pragmatickým manažerem a byznysmenem. Zemřel chudý před sto lety 2. února 1913 ve Stockholmu ve věku 67 let na onkologické onemocnění; bezdětná vdova Isabel Amalia zůstala zcela bez finančních prostředků a musela podat konkurs na panství, kde žili od roku 1895. Ačkoliv se nikdy nestal bohatým, díky svým příspěvkům k technickému pokroku zanechal svět bohatší.

Závěrem, jaký obraz by v současné době po 130 letech od založení firmy AB Separator uviděli její zřizovatelé. Od roku 1963 nese firma jméno Alfa Laval AB (Alfa byl název jednoho z prvních separátorů na smetanu). Zaměřuje se na tři klíčové technologické obory, které hrají zásadní úlohu v mnoha průmyslových odvětvích. Jádrem činnosti jsou tři základní technologie: přenos tepla, separace a manipulace s tekutinami. Jako významný světový dodavatel zařízení, systémů a služeb - jako jsou zejména výměníky tepla, výměníkové stanice, vzduchové chladiče, separátory, dekantační odstředivky, membránové filtrace, čerpadla, ventily, vybavení nádrží, filtry - optimalizuje svým zákazníkům v téměř 100 zemích světa výkonnost technologických procesů (pomáhá jim ohřívat, chladit, separovat a dopravovat média, jakými jsou např. olej, voda, chemikálie, nápoje, potraviny, škrob či farmaceutické výrobky) a pomáhá jim být vždy o krok napřed. Postupně se značka Alfa Laval stala symbolem tradice, spolehlivých výrobků, efektivních služeb a špičkových dovedností procesního inženýrství.

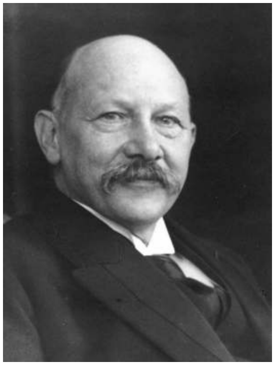
V období let 1991 až 2000 byla firma Alfa Laval po akvizici součástí koncernu TetraLaval. Ten ji v roce 2000 prodal jinému majiteli a ponechává si pouze divizi Alfa Laval Agri (vybavení pro produkci mléka), které dal nový název DeLaval (na památku „otce“ zakladatele). Produkty DeLaval se prodávají v přibližně 100 zemích (mimo jiné jsou používány ve více než 10 00 farmách o velikosti stád až 50 000 kusů - každý den jsou zde dojena, krmena a opečovávána zvířata firemními aparaturami a technologickými zařízeními) a vyráběny jsou ve 27 velkých výrobních závodech (15 v Evropě, 7 v Asii, 4 v USA a 1 v Brazilii). V současnosti je v nich zaměstnáno na celém světě okolo 12 000 pracovníků. Pro posilování konkurenceschopnosti a postavení hnací síly ve výrobě mléka, investuje společnost přibližně 3 % celkového obratu do výzkumu a vývoje.

První kancelář Alfa Laval byla v Československu otevřena již v roce 1920. V letech 1948 až 1988 zde působila prostřednictvím svých partnerů. V roce 1990 byla založena firma Alfa Laval s. r. o., která dnes v ČR dodává zařízení a komponenty pro celou řadu odvětví (energetika, výroba a zpracování železa, průmysl chemický, potravinářský, nápojový, biotechnologický a farmaceutický, topenářství, komerční a průmyslové chladírenství, čistění odpadních vod aj.).

Bohumil Tesařík

Heike Kamerlingh Onnes

Před 100 lety byla udělena Nobelova cena za fyziku Heikemu Kamerlinghovi Onnesovi, muži, který stojí v pozadí dnešních vlaků s magnetickou levitací a supravodivých cívek v CERNu.



Heike Kamerlingh Onnes

„Nejchladnější místo na světě je v Leidenu“, říkal s oblibou nizozemský fyzik H. K. Onnes (21. září 1853–21. února 1926). V roce 1913 mu byla udělena Nobelova cena za fyziku za výzkum vlastností hmoty při nízkých teplotách, které vedly, mimo jiné, k výrobě kapalného helia. H. K. Onnes dosáhl ve své laboratoři teploty neuvěřitelných 4,2 K.

Kamerlingh Onnes je od roku 1878 odborným asistentem na Polytechnice v Delftu, o rok později získává doktorský titul za práci zabývající se novými důkazy o rotaci Země. Poté, v roce 1881, publikuje Onnes článek: „Obecná teorie kapalin“. Tento datum můžeme považovat za počátek Onnesova zájmu o kapaliny a fyziku nízkých teplot. Rok po publikaci slavného článku je Kamerlingh Onnes zvolen profesorem fyziky v Leidenu. Stávající laboratoř upravuje pro nízkoteplotní výzkum, vybavuje ji výkonnými vývěvami a kompresory, aby mohl vyrobit zkapalňovače pro přípravu kryogenních kapalin.

Co však vedlo Onnese k tak rozsáhlému experimentování v oblasti nízkých teplot? Vše souvisí s Onnesovým kolegou *Johannesem Diderikem van der Waalsem* (holandský fyzik, 1837–1923). Van der Waals publikoval v roce 1873 známý vztah, dnes nazývaný „van der Waalsova stavová rovnice reálného plynu“. Za definovaných podmínek (tzv. kritický bod) je možné z rovnic kritických veličin odvodit van der Waalsovy konstanty a jejich vhodným dosazením sestavit redukovanou stavovou rovnici. Tato rovnice již neobsahuje žádné konstanty pro konkrétní plyn, má tedy přibližnou platnost pro všechny plyny. Redukovaná stavová rovnice obsahuje redukované stavové veličiny.

Obr. 1

Můžeme tedy nalézt stavy, v nichž redukované veličiny mají stejné hodnoty, tyto stavy nazýváme korespondujícími stavy. V roce 1881 van der Waals nalezl univerzální funkci redukovaných stavových veličin a tím se otevřela problematika *teorému korespondujících stavů*. Cílem Onnesových experimentů bylo ověření van der Waalsova teorému korespondujících stavů v širokém rozpětí teplot. Celé toto Onnesovo snažení o dosažení co nejnižších teplot vyvrcholilo v roce 1908 zkapalněním helia. Ostatně i Nobelova cena v roce 1913 byla H. K. Onnesovi udělena, mimo jiné, právě za práce vedoucí k výrobě tekutého helia. Na obr. 1 je pohled do Onnesovy kryogenní laboratoře.

Heike Kamerlingh Onnes se ve své laboratoři zabýval celou řadou výzkumů (elektromagnetickými a optickými jevy, termomechanikou, dielektriky, radioaktivitou, spektry látek, aj.). V neposlední řadě detailně zkoumal elektrické odpory kovů v různých podmínkách. Jeho zájem o elektrické vlastnosti kovů a fyziku nízkých teplot v roce 1911 vyústil ve velmi významný objev – **supravodivost**. Jedná se o kvantově mechanický jev, při němž materiál neklade téměř žádný odpor procházejícímu elektrickému proudu. Teorie supravodivosti je částečně dokončena, její aplikace se však rozběhla zcela – vlaky MagLev (magnetická levitace), moderní setrvačníky, efektivní přenos elektrické energie, akumulátory elektrické energie, urychlovače částic, a mnoho dalšího.

Kamerlingh Onnes se lišil od mnoha známých vědců. Nebyl to jen odborník zahleděný do své profese, ač mu byla největším koníčkem. Měl bohatý rodinný život, v roce 1887 se oženil s *Marií Adrianou Wilhelminou Elisabeth Bijleveld* (1861–1938), s níž měl jednoho syna Alberta. Byl to muž s velkým charismatem a bez nadsázky ho můžeme nazvat filantropem. Jeho aktivní přístup k pomoci hladovějícím dětem během a po 1. světové válce je obdivuhodný. Snad i proto byl k němu stvořitel milosrdný. Heike Kamerlingh Onnes umírá po krátké nemoci bez dlouhého utrpení v únoru 1926 ve své provincii v jižním Holandsku v Leidenu. A tak snad i z nebe nobelistů, může H. K. Onnes poslouchat dodnes zvuky zvonů místního gotického kostela svatého Pankráce.

Jaroslav Vyskočil
ZŠ Liberec