

MATEMATIKA

Naše pedagogická realita

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

V tomto příspěvku přinášíme rozbor řešení čtyř úloh z matematiky základní a střední školy. Úlohy řešilo 46 studentů prvního ročníku baka-lářského studia učitelství matematiky naší školy a šetření probíhalo jako součást projektu *Matematická gramotnost a řešení úloh*. Vypracování úloh bylo anonymní, každý student však o sobě vyplnil dotazník, jehož otázky postupně uvedeme. Na zpracování projektu se podíleli tito studenti: *Aneta Jahelková, Zdena Trefilíková, Jan Krejcar a Lenka Horní*. Matematickou gramotností budeme v tomto textu rozumět v souladu s publikací [1]

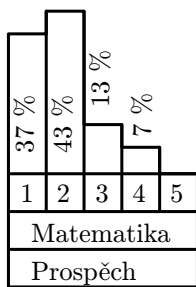
- schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému),
- schopnost vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie,
- dovednost řešit úlohy jak z matematiky, tak i z jejích aplikací, které jsou (obvykle bezprostředním) užitím probraného učiva.

K řešení úloh problémového charakteru je třeba větší míra tvořivosti, která představuje vyšší úroveň matematické kultury. Tato úroveň nemůže být požadována od celé populace. Základní matematickou gramotnost by ovšem měl dosáhnout každý absolvent příslušného typu školy.

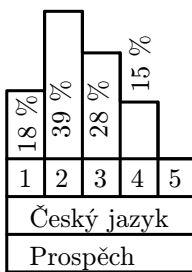
Domníváme se, že úkoly, jejichž rozbor uvádíme, jsou vhodným mate-riálem k testování matematické gramotnosti. Skutečnost, že někteří absol-venti střední školy této úrovně nedosahují (jak prokážeme našim šetřením), je alarmující.

Charakteristika skupiny

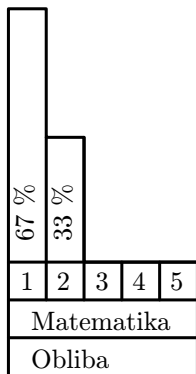
Ze 46 studentů bylo 26, tj. 63 % z gymnázií, ostatní studovali na těchto školách: střední průmyslová škola (4 studenti), obchodní akademie (4), střední pedagogická škola (2), střední škola informatiky (2), hotelová škola (2) a po jednom studentu přišlo ze střední školy podnikání, zahradnické školy a ekonomického lycea. Středoškolský prospěch studentů naší skupiny v matematice (průměr 1,89) a v českém jazyku (průměr 2,41) je popsán grafy na obr. 1 a 2. Oblíbenost matematiky a českého jazyka ve stupnici velmi rád (1), rád(a) (2), nevádí mi (3), nerad(a) (4), velmi nerad(a) (5) je znázorněn na obr. 3 a 4. Každý sloupec grafu vyjadřuje příslušný počet procent.



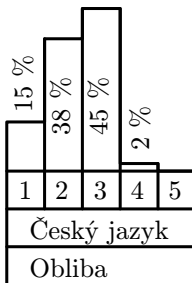
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

V dotazníku odpovídali studenti na čtyři otázky.

a) *Jaký je váš oblíbený předmět?*

Pořadí oblíbenosti předmětů (v závorce je počet studentů, kteří příslušný předmět uvedli, přičemž někteří uvedli oblíbených předmětů více):

- | | |
|-------------------------|-----------------------------------|
| 1. Matematika (26) | 7. Zeměpis (2) |
| 2. Tělesná výchova (13) | 8. Informační technologie (2) |
| 3. Dějepis (6) | 9. Fyzika (2) |
| 4. Výtvarná výchova (4) | 10. Hudební výchova (2) |
| 5. Angličtina (3) | 11. Základy společenských věd (2) |
| 6. Biologie (3) | |

Po jednom hlasu dostaly: dějiny umění, sadovnická tvorba, logika, chemie, ruský jazyk, deskriptivní geometrie, dílny, francouzský jazyk, německý jazyk a latina. Jeden student si neoblíbil ani jeden předmět, přesto se chce stát učitelem.

b) *Jaký máte životní cíl?*

Celkem 19 studentů považuje za svůj životní cíl dostudovat, pro 11 studentů je cílem stát se učitelem, 8 má za cíl založit rodinu, 8 mít práci.

Z dalších cílů uvedme: být prospěšný společnosti, nezklamat rodiče, vychovat děti, něco dokázat, spokojeně prožít život, být finančně zajištěn, získat titul RNDr., mít dobré zdraví, být slušný a upřímný, bydlet v domě, žít se jako trenér, být dobrou kytaristkou, být lepší rodič než byli moji rodiče, pracovat kreativně a s elánem. Vyskytuje se i cíl koupit si psa nebo protloukat se životem na jednostopém vozidle. Tři studenti neuváděli žádný životní cíl.

c) *Jaký je váš oblíbený autor (spisovatel, hudebník, malíř, umělec, ...)?*

Sedm studentů nemá žádného oblíbeného autora. Nejoblíbenější autoři jsou: K. Čapek (u 4 studentů), J. Steinbeck (2), Rowlingová (2), A. Camus (2), M. Weewegh (2, započítáme-li i Viewegha), Miler (autor krtečka) (2), L. Armstrong (2), Remarque (2). Po jednom hlasu získali např. J. Škvo-recký, J. Verne, S. Dali, J. Čapek, O. Pavel, A. Einstein, B. Hrabal, K. Poláček a další.

d) *Máte nějaký životní vzor? Jaký?*

Celkem 23 studentů neuvádělo vzor žádný. Matku má za svůj vzor 5 studentů, otce 4 studenti, učitele 3 studenti, Boha 2 studenti. Jedenkrát se vyskytovali např. T. G. Masaryk, W. Churchill, L. Špaček, K. Kryl, R. Federer, dědeček.

Rozbor řešení úloh

Úloha 1. *Z obnosu byla nejdříve utracena jeho polovina a pak třetina zbytku. Zůstalo 50 Kč. Kolik činí původní obnos? Postup řešení запиšte.*

80 % studentů došlo ke správnému výsledku (150 Kč). 20 % studentů našlo nesprávný výsledek nebo neuvedli výsledek žádný. To je na takto jednoduchou úlohu dosti malý úspěch.

Správná řešení můžeme rozdělit do pěti typů.

a) Řešení rovnicí, např. v podání studenta (4):

$$\begin{aligned} & \text{původní obnos} \dots x \\ & x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}x = 50 \\ & \dots \\ & x = 150. \end{aligned}$$

b) Řešení pomocí obrázku nebo schématu.

V kruhu nebo obdélníku vyznačili tyto řešitelé třetinu celku, která představuje 50 Kč. Odtud určili výsledek.

c) Student (19) řešil úlohu z paměti s výsledným zápisem:

$$2 \cdot (50 + \frac{1}{2} \cdot 50) = 150.$$

d) Úsudkem zapsaným slovně nebo symbolicky řešili úlohu 2 studenti.

e) Jeden student uhodl výsledek a provedl zkoušku.

Algebraicky pomocí rovnice řešilo úlohu 13 % studentů.

Nesprávná řešení úlohy spočívala např. v neporozumění textu, v neúspěšném pokusu o převedení textu do jazyka algebry, v numerických chybách (např. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $75 \cdot 2 = 120$) nebo v neúspěšném pokusu řešit úlohu trojčlenkou.

Patří-li k matematické gramotnosti i správné užívání matematického jazyka, o čemž jsme přesvědčeni, pak nemůžeme být spokojeni, neboť v řadě řešení, která vedou ke správným výsledkům, se vyskytují zápisy typu: $50 : 2 = 25 \cdot 3 = 75 = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} = 50$, $\frac{1}{5} = 75$, $1 = 150$.

Úloha 2. *Načrtněte v soustavě souřadnic přímkou $p = PB$ a napište její rovnici ($P[0; 0]$, $B[4; 2]$).*

Výsledky můžeme shrnout do tabulky:

	Správná rovnice	Nesprávná rovnice
Správný obrázek	20 %	41 %
Nesprávný obrázek	9 %	30 %

Do kategorie nesprávný (obrázek nebo rovnice) zahrnujeme i případy, kdy příslušný výsledek zcela chybí.

Skutečnost, že 71 % studentů nedokázalo najít rovnici přímky PB je dokladem nezvládnutí jazyka analytické geometrie. Ačkoliv lze směrnicový tvar rovnice přímky bezprostředně vidět z obrázku, vyskytoval se tento přístup přibližně v jedné třetině pokusů o řešení. Ve stejném rozsahu vycházeli studenti z obecného nebo parametrického vyjádření přímky. Studenti se opírali spíše o postupy, které jim ze školy utkvěly v paměti, než o rozbor konkrétní geometrické situace.

Úloha 3. *Vypočítejte obsah pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného do kružnice poloměru r .*

Jediný student došel k výsledku $S = 3r^2$, šest studentů uvedlo výsledek ve tvaru, který lze na konečný tvar snadno upravit, např.

$$S = 12 r^2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ,$$

$$S = 12 r^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 30^\circ,$$

$$S = 12 r \cdot \sin 15^\circ \cdot \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 15^\circ},$$

$$S = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \cos 75^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot r.$$

Správný výsledek tak dosáhlo 15 % řešitelů.

50 % studentů úlohu vůbec neřešilo, nebo jen naznačilo, jak by se snad mohlo postupovat.

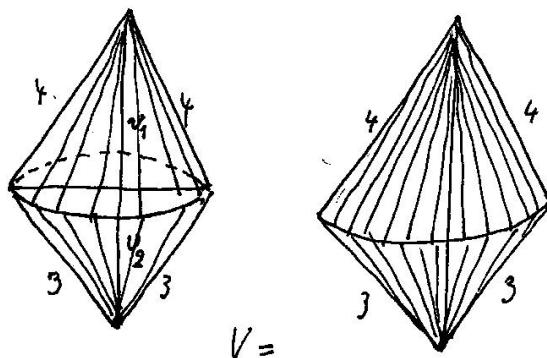
35 % řešitelů došlo ke zcela nesprávným výsledkům. Chyby, kterých se dopouštěli, prokazují naprostou matematickou ngramotnost. Uvedme některé: Obsah trojúhelníku o stranách a , b je roven $S = \frac{1}{2}ab$ nebo $S = \frac{1}{2}(a + v_a)$. Obvod pravidelného dvanáctiúhelníku je roven délce kružnice, obsah je zaměněn za obvod, sinus je poměr dvou sousedních stran trojúhelníku, ...

Úloha 4. *Náčrtněte a popište těleso, které vznikne otáčením pravouhlého trojúhelníku s odvěsnami 3 cm a 4 cm kolem přepony. Vypočítejte objem tohoto tělesa.*

Všimněme si nejdříve úkolu nakreslit těleso.

Správnou představu o tělese si učinilo 30 % řešitelů, polovina z nich nakreslila dosti výstižný obrázek. Za všechny zde reprodukuje obr. 5 studenta (4). Zbývající řešitelé z této skupiny těleso slovně popisovali, někteří ovšem s použitím nesprávné terminologie (dva jehly spojené podstavou tvaru kružnice, dva válce otočené k sobě podstavami, dvojkuzel se

základnami u sebe). Řada obrázků bylo zcela nesprávná. U dvou studentů nevyvolává termín otáčení představu prostoru. Jeden z nich, absolvent (23) průmyslové školy strojnické (!), odpovídá, že rotací trojúhelníku vznikne deltoid, studentka (40) píše: „Nelze udělat objem trojúhelníku.“



Obr. 5

Celkem 63 % řešitelů si neudělalo žádnou nebo zcela špatnou představu o tělese popsaném v textu úlohy. To svědčí o velmi nízké gramotnosti těchto studentů, neboť geometrická představivost je podle našeho názoru její složkou.

Objem tělesa vypočítali (až na drobné nedostatky) čtyři gymnazisté (9 % řešitelů), úlohu neřešilo nebo řešilo zcela nesprávně 85 % studentů, někteří počítali objem kužele např. podle „vzorců“ $V = \frac{4}{3}\pi r^3 v$, $V = \frac{a^2 v}{2}$.

Protože geometrická úloha (5) z našeho šetření byla relativně obtížná, připojíme zde k posouzení geometrické gramotnosti studentů rozbor zcela elementární geometrické úlohy z jiného průřezu.

Úloha 5. *Sestrojte všechny kružnice, které procházejí daným bodem B a dotýkají se v daném bodě T dané přímky p . Konstrukci popište a zdůvodněte. (Bod B na přímce p neleží.)*

Tuto úlohu řešila skupina 33 absolventů různých středních škol. Pouze dva studenti úlohu vyřešili: jedna absolventka gymnázia a jeden absolvent průmyslové školy.

Šest studentů se ani nepokusilo nakreslit dané prvky. Pět studentů pochopilo úlohu tak, že daný bod B je středem hledané kružnice a nakreslili

kružnici se středem B poloměrem $|BT|$. Osm studentů považovalo úsečku BT za průměr hledané kružnice. Zbývajících 12 studentů kreslilo nejrůznější zmatené náčrtky, které nevedly k řešení.

Řešitelé této úlohy prokázali totální geometrickou negramotnost, neboť mnozí ani nedokázali slovní text přetransformovat do jazyka geometrického obrázku. Není jim jasná role rozboru konstrukční úlohy, nedokáží si ani položit vhodnou otázku, která by mohla být počátkem nalezení řešení.

Nedostatky, které se zde prokazatelně vyskytly, se týkají učiva základní školy, přesto však se učivo znovu probírá na školách středních. Konstrukční úlohy jsou podle mého názoru dobře zpracovány v učebnici [3], naše úloha 6 je zde podrobně vyřešena v kapitole 2.5 *Konstrukce kružnic*.

Kdybychom měli hodnotit výuku geometrie podle výsledků řešení našich úloh, museli bychom konstatovat, že studenti znají z geometrie velmi málo. Nejen že nedokáží vyřešit základní konstrukční úlohy. Neznají ani geometrickou terminologii (rotací trojúhelníku vznikne jehlan . . .), ani základní vzorce pro obsahy geometrických útvarů ($S = \frac{1}{2}(a + b + c)$ (obsah trojúhelníku), $V = \frac{1}{3}v \cdot 2\pi r$ (objem kužele) . . .).

Závěry

Šetření, o němž podáváme zprávu v tomto textu, si samozřejmě nemůže dělat nároky na kvalifikovanou výpověď o úrovni absolventů našich středních škol v roce 2010 a 2011. Může však poskytnout obrázek o tom, jaká je matematická kultura 46 maturantů z naší skupiny.

Znovu si při této příležitosti klademe otázku, jak se u těchto absolventů středních škol podařilo naplnit cíle, které si matematické vzdělávání u nás klade. Vždyť již absolvent základní školy má mít mimo jiné tyto *klíčové kompetence* (citováno volně podle *Rámcového vzdělávacího programu pro základní školy*):

- samostatně a kriticky myslet,
- formulovat a vyjadřovat své myšlenky a názory v logickém sledu,
- používat správně základní pojmy z různých vzdělávacích oblastí, chápat jejich smysl a význam a aplikovat je,
- operovat s obecně užívanými termíny, znaky a symboly
- . . .

Okřídlená slova *Gustava Adolfa Lindnera* z počátku dvacátého století „*Chceme vychovat obry a vychováváme trpaslíky*“ platí i dnes. Nemůžeme

se tomu divit, jestliže naše společnost přijala tezi „že úroveň vzdělanosti se zvýší tím, že se zvýší procento lidí s maturitou (a s vysokoškolským vzděláním)“ (citováno podle [2, s. 196]).

Všimneme-li si znovu obr. 3, vidíme, že naše úlohy řešili, a to s tak ubohými výsledky studenti, kteří uvádějí, že mají matematiku velmi rádi (67 %) nebo rádi (33 %). Snad chtěli tímto přiznáním nějak ospravedlnit svou volbu studia. Tito studenti byli ovšem na střední škole hodnoceni v matematice výborně (v 37 %) nebo chvalitebně (v 43 %)! Výsledky v mateřském jazyce se zdají být adekvátnější jejich výkonům.

Základem účinného matematického vzdělávání by měla být taková koncepce vyučování, při níž učitel zná a respektuje možnosti svých žáků. Někteří vyučující přednášejí pro nejlepší studenty v posluchárně, s nimiž jsou v kontaktu (sledují, jak studenti reagují, kladou dotazy, ...), ostatní zapisují přednášku a ani se nemohou dobře soustředit na porozumění učivu. Přednáška absolvovaná bez porozumění je zárodkem formálního přístupu ke vzdělávání. Student při přípravě na zkoušku nemá již někdy čas učivo hluboce promýšlet. Učí se z paměti definice, věty, ba i důkazy — bez hlubšího přemýšlení. A někdy může u zkoušky i projít.

Je přirozené obtížné přizpůsobit výuku nestejně a mnohdy nízké úrovni nejen znalostí, ale i abstraktního myšlení studentů. Prvním předpokladem realistického přístupu k vyučování je, aby každý student měl k dispozici učebnici. Pak se vyučující může hlouběji soustředit na příklady, které výklad nejen ilustrují, ale i motivují. Může uvádět i dostatek příkladů aplikačních.

Sonda, o níž podáváme zprávu v tomto textu, ukazuje na neutěšený stav části našeho školství. Studenti jsou produktem našich základních a středních škol. V jistém smyslu za úroveň svých vědomostí nemohou. Jestliže se však rozhodli, že chtějí být učiteli matematiky, musí své nedostatky buď překonat, nebo studium ukončit. Jiná cesta není.

Literatura

- [1] *Hošpesová, A.*: Matematická gramotnost a vyučování matematice. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2011.
- [2] *Kobíková, Z., Fuchs, E.*: Rozhovor o státní maturitě. Učitel matematiky, ročník 2012 (2012), č. 4, s. 195–200.
- [3] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia. Planimetrie. Prométheus, Praha, 1999.