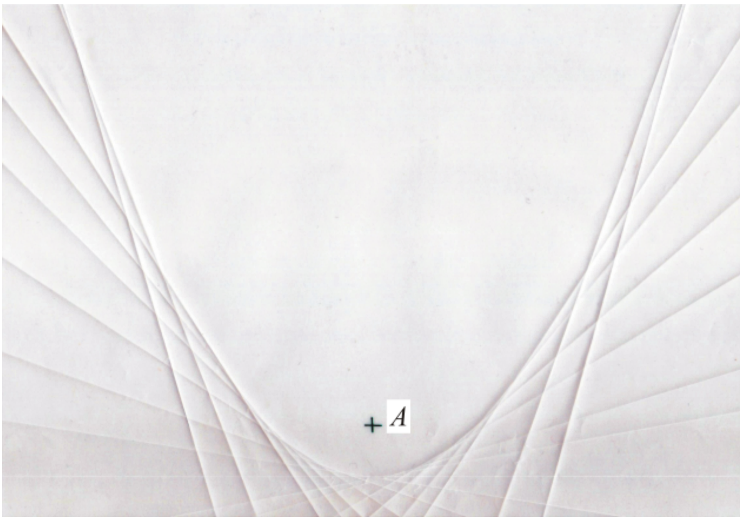
Od řešení Heronovy úlohy k modelům kuželoseček

PAVEL LEISCHNER – LIBUŠE SAMKOVÁ

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Víte, že pouhým překládáním listu papíru se dají vymodelovat kuželosečky? Vezměte si list papíru, při jeho dolním okraji uprostřed vyznačte bod A a přehněte list tak, aby jeho dolní okraj procházel bodem A. Pak list narovnejte do původní polohy. Když postup několikrát zopakujete a vytvoříte různé přehyby, zjistíte, že obalují parabolu (obr. 1).



Obr. 1: Modelování paraboly překládáním papíru

Články [1], [2] zmiňují podobné postupy i pro vymodelování elipsy a hyperboly. Náš příspěvek je rovněž věnován této problematice. Navíc si ukážeme úzkou souvislost takového modelování s Heronovou úlohou.

Heronova úloha

Heron Alexandrijský (10–75 n.l.) zkoumal ve spisu *Catoptrica* zákonitosti šíření světla. Předpokládal, že světlo se šíří vždy tak, aby jeho trajektorie měla minimální délku. Tento princip nejkratší dráhy použil k vyřešení problému, v jakém místě na zrcadle se musí světelný paprsek odrazit, má-li se odrazem dostat z bodu A do bodu B. Matematická varianta problému se nazývá Heronova úloha: *V rovině je dána přímka p a body A, B, které na ní neleží. Sestrojte bod $C \in p$ tak, aby pro všechny body $X \in p$, $X \neq C$ platilo $|AX| + |XB| > |AC| + |CB|$.*

Stejnou situaci popisuje také následující slovní úloha: *Jezdec na planině má namířeno z bodu A do bodu B. Cestou musí napojit koně u řeky, kterou představuje přímka p. Najděte místo, kde má jezdec koně napojit, aby jeho cesta byla co nejkratší.*

V případě, že každý z bodů leží v jiné polorovině určené přímkou p, je řešení triviální: jezdec pojede přímo z bodu A do bodu B a bude doufat, že se mu podaří řeku přebrodit. Tedy, bod C je průsečíkem přímky AB a přímky p.

Zbývá nám případ, kdy oba body leží ve stejné otevřené polorovině určené přímkou p. Při hledání bodu C využijeme osovou souměrnost podle přímky p: obraz bodu A v osové souměrnosti podle osy p si označíme A' a zvolíme bod C jako průsečík úsečky $A'B$ a přímky p. Vyznačme si na přímce p bod X různý od bodu C (obr. 2). Pak z osové souměrnosti plyne rovnost

$$|AX| + |XB| = |A'X| + |XB|,$$

z trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku $BA'X$ dostáváme

$$|A'X| + |XB| > |A'B|$$

a z faktu $C \in A'B$ s pomocí osové souměrnosti zjistíme, že

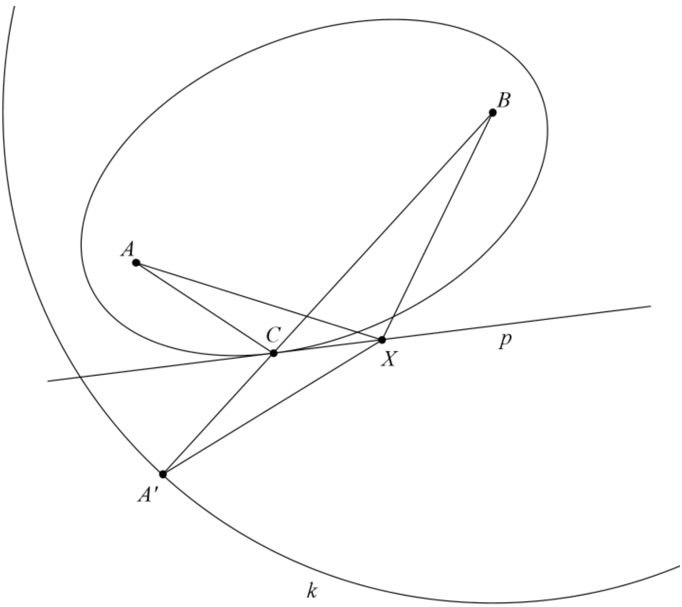
$$|A'B| = |A'C| + |CB| = |AC| + |CB|.$$

Dokázali jsme, že pro libovolný bod $X \in p$ různý od bodu C je

$$|AX| + |XB| > |AC| + |CB|,$$

tedy cesta přes bod C je nejkratší.

Konstrukcí bodu C jsme dokázali jeho existenci i jednoznačnost. Z řešení případu, kdy oba body leží ve stejné otevřené polorovině, navíc plyne, že přímka p se dotýká v bodě C elipsy $\{X;\ |AX| + |XB| = s\}$, kde $s = |AC| + |CB| > |AB|$.



Obr. 2: Rozbor situace pro elipsu

Záměna závislosti

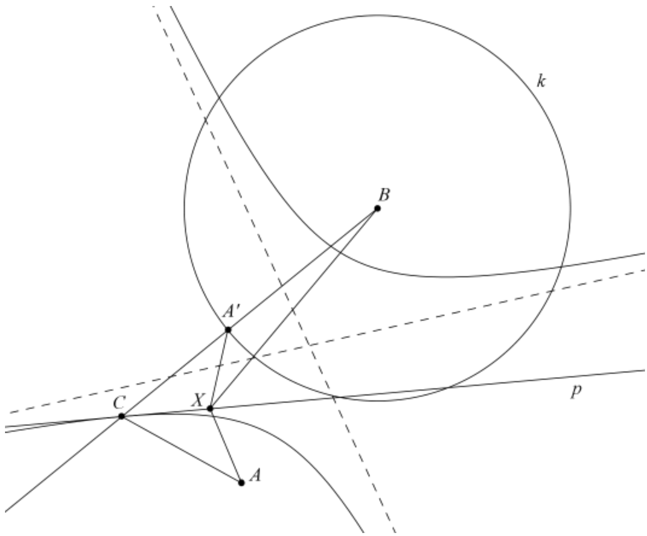
V Heronově úloze bylo dáno A, B, p a hledali jsme bod $C \in p$ a číslo s tak, aby

$$s = |AC| + |CB| < |AX| + |XB| \quad \text{pro všechna } X \in p,\ X \neq C. \tag{1}$$

Pozměňme ji nyní tak, že budou dány body A a B s číslem $s > |AB|$ a budeme hledat přímku p s bodem $C \in p$ splňující vztah (1).

Z podmínky $|A'B| = s$ plyne, že bod A' leží na kružnici k se středem B a poloměrem s. Ke každému bodu $A' \in k$ pak lze sestrojit přímku p jako osu úsečky AA' a bod C jako průsečík úsečky $A'B$ s přímkou p. Jak plyne ze vztahu (1), je přímka p tečnou elipsy, která má ohniska A, B a hlavní osu délky s. Bod C je bodem dotyku. Všechny takové přímky p tedy obalují elipsu $\{X;\ |AX| + |XB| = s\}$, která je množinou všech možných bodů C.

Zabývejme se dále situací, kdy $0 < s < |AB|$. Trojúhelník ABC z obr. 2 za této podmínky neexistuje, protože neplatí trojúhelníková nerovnost. Pro téměř každý bod $A' \in k(B; s)$ však můžeme sestrojit bod C jako průsečík přímky $A'B$ s osou úsečky AA' (obr. 3).



Obr. 3: Rozbor situace pro hyperbolu

Z trojúhelníkové nerovnosti $|A'B| > \big||A'X| - |XB|\big|$ a z osové souměrnosti zjistíme, že:

$$s = \big||AC| - |CB|\big| > \big||AX| - |XB|\big| \quad \text{pro všechna } X \in p,\ X \neq C. \qquad (2)$$

Všechny přímky p nyní obalují hyperbolu $\{X;\ \big||AX| - |XB|\big| = s\}$, která je množinou všech možných bodů C.

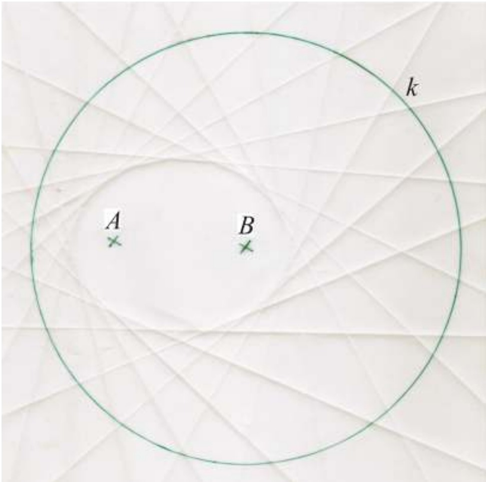
Poznamenejme, že bod C nelze sestrojit, když $A' \in \{T_1, T_2\}$, kde T_1, T_2 jsou body dotyku tečen z bodu A ke kružnici k. Přímky p_1 a p_2, které jsou osami úseček AT_1 a AT_2, jsou totiž asymptotami dané hyperboly.

Doporučujeme čtenáři, aby si promyslel speciální situace:

a) Pro $A = B$ a $s > 0$ je množinou všech bodů C kružnice s poloměrem $s/2$.
b) Pro $A \neq B$ a $s = 0$ je množinou všech bodů C osa úsečky AB.
c) Pro $A \neq B$, $B \to \infty$ a $s > |AB|$ znázorníme kružnici k v blízkosti bodu A jako přímku a množinou všech bodů C je parabola jako limitní případ elipsy. Podobně pro $A \neq B$, $s \to \infty$ a $|AB| > s$ vznikne parabola jako limitní případ hyperboly.

Modelování kuželoseček skládáním papíru

Přehnutí papíru, které umístí bod A' na bod A vytváří přehyb, model osy úsečky AA'. Jestliže si tedy na pauzovací papír narýsujeme kružnici k se středem B a poloměrem s a bod A v její vnitřní oblasti, modelujeme takovým překládáním papíru pro různé body $A' \in k$ přímky, které obalují elipsu $\{X;\ |AX| + |XB| = s\}$ (obr. 4).



Obr. 4: Modelování elipsy překládáním papíru

Přímky obalující hyperbolu $\{X;\ \big||AX| - |XB|\big| = s\}$ vytvoříme analogicky, pokud bod A umístíme do vnější oblasti kružnice k (obr. 5).

Výroba modelu paraboly byla popsána v úvodu. Postup můžeme obměnit tak, že dolní okraj listu papíru nahradíme přímkou q, která neprochází bodem A.

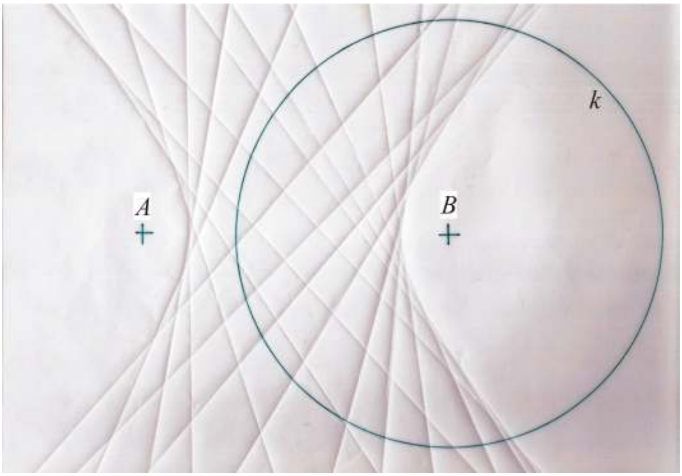
Závěr

Modelování kuželoseček skládáním papíru může být vítaným zpestřením práce v zájmové matematice. Kromě rozvoje dovedností poskytuje i netradiční pohled na poznatky o vlastnostech tečen kuželoseček. Ty se v učebnicích matematiky a deskriptivní geometrie probírají obvykle suchou formou „věta - důkaz“, kdežto zde jsou přirozenými důsledky úvah spojených se zajímavou činností. Konkrétně máme na mysli větu, že tečna elipsy, resp. hyperboly půlí úhel průvodičů, a poznatky o tzv. řídící kružnici kuželosečky, kterou v našich úvahách představuje kružnice k.

Rádi bychom také zdůraznili užitečnost úvahy o změně fixace parametrů, které v úloze vystupovaly — fixace parametru s, původně závislého na umístění objektů A, B a p, umožnila přechod od Heronovy úlohy k tečnám kuželoseček. Fixace parametrů patří k základním matematickým metodám.

Popsané činnosti je možné vizualizovat prostřednictvím dynamické geometrie. Tomuto tématu se budeme podrobně věnovat v některém z příštích čísel časopisu.

Nakonec bychom rádi upozornili na webové stránky zaměřené na metody řešení geometrických úloh `www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/mrg.html`, na nichž čtenář najde uvedenou problematiku zpracovanou s využitím Cabri geometrie a kromě ní i řadu dalších zajímavých informací.



Obr. 5: Modelování hyperboly překládáním papíru

Literatura

[1] *Smith, S. G.*: Paper Folding and Conic Sections. Mathematics Teacher, roč. 96 (2003), str. 202–207.

[2] *Leischner, P.*: Vizualizace některých vlastností kuželoseček v Cabri. Sborník příspěvků 3. konference Užití počítačů ve výuce matematiky, 8.–10. listopadu 2007, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2007, s. 163–168.