Využitie metódy Monte Carlo pri vyučovaní pravdepodobnosti

JANA PÓCSOVÁ

Fakulta BERG, Technická univerzita v Košiciach

Pre výučbu pravdepodobnosti je stále charakteristické riešiť úlohy prostredníctvom klasickej definície pravdepodobnosti s využitím kombinatorických výpočtov. Tento prístup je pre mnohých žiakov náročný. Nazdávame sa, že nesprávne predstavy žiakov vyplývajú z nedostatku skúseností. Domnievame sa, že tieto skúsenosti je možné získať práve simuláciou a vlastným experimentovaním.

Preto v tomto článku navrhujeme spôsob využitia simulácie a experimentovania pri vyučovaní pravdepodobnosti prostredníctvom štatistickej metódy známej ako metóda Monte Carlo.

Podstatou tejto metódy pri simulácii hodnôt náhodných premenných je využitie náhodných čísel. S rozvojom tejto metódy sú späté mená *S. M. Ulama* a *J. von Neumanna* ([1]).

Ako je uvedené v literatúre [5], usudzovanie spojené so stochastickou simuláciou, formulovanie vierohodných úsudkov vyplývajúcich zo štatistických údajov, zbieranie a spracovanie štatistických dát sú dôležitými prvkami stochastického vzdelávania. Preto v článku navrhujeme, ako metódu Monte Carlo sprístupniť žiakom. Teoretické pozadie problémov a ilustrácie simulácií sú uvedené len pre čitateľa, ktorý chce hlbšie preniknúť do riešených problémov. Neodporúčame ho demonštrovať na bežnej hodine matematiky pre žiakov strednej školy, keďže k jeho pochopeniu je nutné poznať základy pravdepodobnosti a matematickej štatistiky preberanej v základných vysokoškolských kurzoch. Riešenie navrhnutého problému (bez jeho matematického zdôvodnenia) odporúčame pre žiakov strednej školy po oboznámení sa s pojmom aritmetický priemer.

V článku rešpektujeme základné fázy metódy Monte Carlo, tak ako boli navrhnuté v [7, s. 506–524]. Sú nimi:

- konštrukcia simulačnej schémy (pojem vysvetlíme neskôr),
- určenie spôsobu realizácie simulačnej schémy pomocou generátorov náhodných hodnôt,

- identifikovanie parametra (charakteristiky), ktorého hodnotu chceme odhadnúť,
- zbieranie a spracovanie štatistických údajov vhodnými nástrojmi,
- určenie hodnoty parametra (charakteristiky) na základe získaných údajov,
- fáza interpretácie.

Keďže v článku pracujeme s nasledujúcimi pojmami, pripomenieme ich definície.

Pod *náhodným pokusom* rozumieme jav, experiment, o ktorého priebehu a výsledku rozhoduje náhoda, pričom množina výsledkov pokusu je konečná alebo spočítateľná a pre každý výsledok možno kvantitatívne ohodnotiť pravdepodobnosť, s akou sa pokus týmto výsledkom skončí [3, s. 14]. (Náhodný pokus označujeme podľa [2] gréckym písmenom δ.)

Stochastický model náhodného pokusu δ je dvojica (Ω, p), kde Ω je množina všetkých výsledkov náhodného pokusu δ a p je funkcia, ktorá každému výsledku priradí pravdepodobnosť, s akou náhodný pokus δ môže skončiť týmto výsledkom ([3, s. 36, 44, 62]).

Simulačná schéma náhodného pokusu δ je náhodný pokus δ_s vykonávaný prostredníctvom losovacích nástrojov s matematickými vlastnosťami (prostredníctvom kociek, úrn, ruliet, mincí), ktorý má s náhodným pokusom δ izomorfný stochastický model ([3, s. 98], [2, s. 255]).

Odhad strednej hodnoty náhodnej premennej metódou Monte Carlo

V rámci rôznych reklamných kampaní sa spoločnosti pokúšajú zvýšiť svoj predaj tým, že do jednotlivých balení pridávajú atraktívne ceny. Často je získanie tejto odmeny podmienené vyzbieraním série lósov, ktoré sú do týchto balení pridané.

Našou snahou je pretransformovať tento problém do žiackeho prostredia.

Reálny problém – Motivácia

V každom balení cereálií je iba jedna zo série šiestich postavičiek z rozprávky Madagaskar. Po vyzbieraní a predložení celej série postavičiek výrobca garantuje jedno balenie zdarma. Koľko balení cereálií môžeme očakávať, že je potrebné kúpiť, kým získame právo na výhru? (Porov. [2, s. 342], [7, s. 506].)

V takto formulovanom probléme sú zamlčané niektoré dôležité fakty.

- 6 postavičiek je rozdelených do balení rovnomerne.
- Jeden človek zbiera samostatne postavičky. Predpokladáme, že nie je možne po čase zamieňať už nazbierané postavičky, v prípade, že sa v zbierke opakujú.
- Predpokladáme tiež, že obchod, z ktorého nakupujeme, má neobmedzené množstvo balení pričom v každom z nich je jedna postavička. A aj po kúpe balenia z danou postavičkou sa pravdepodobnosť kúpy balenia s rovnakou postavičkou neznižuje.

V probléme sa stretávame s dvoma náhodnými pokusmi:

- kúpa balenia s náhodnou postavičkou (δ),
- opakovanie kúpy balení tak dlho, až získame celú sériu postavičiek. (Tento pokus ma náhodný počet opakovaní. Ďalej v texte ho označujeme δ_r).

Riešenie problému prostredníctvom metódy Monte Carlo, v prvej fáze, vyžaduje uvedomenie, že postavičky sú v baleniach rozdelené rovnomerne. Preto kúpe jedného zo šiestich balení zodpovedá hod kockou. Každej postavičke zodpovedá jedno číslo na kocke. Preto pokus δ_r možno simulovať opakovaním hodu kockou tak dlho, až na nej padne každé z čísel aspoň raz. Tento analogický pokus k pokusu δ_r budeme označovať δ_s.

V druhej fáze metódy Monte Carlo je potrebné popísať spôsob simulácie náhodného pokusu δ_s pomocou generátoru náhodných čísel. Uprednostníme skutočnú realizáciu pokusu δ_s s hracou kockou.

Kvôli hlbšiemu preniknutiu do problému navrhujeme sformulovať analogickú matematickú úlohu, pričom jej samotná formulácia by mohla byť výsledkom diskusie a analýzy problému so žiakmi:

Koľko krát môžeme očakávať, že je potrebné hodiť kockou, aby padli všetky čísla od jedna po šesť?

Cereálie kupujeme tak dlho, až získame celú sériu, resp. hádžeme kockou dovtedy, až získame celú sériu čísel. Tento čas čakania na sériu je náhodnou premennou T, ktorá nadobúda hodnoty od šesť počnúc. Stredná (očakávaná) hodnota $E(T)$ náhodnej premennej T je jej charakteristikou, ktorú je potrebné určiť v tretej fáze metódy Monte Carlo.

Na základe štatistických údajov získaných opakovaním náhodného pokusu δ_s bude možné určiť aritmetický priemer počtu opakovaní pokusu δ_s.

Podľa zákona veľkých čísel je aritmetický priemer dobrým odhadom strednej hodnoty náhodnej premennej ([2, s. 484]). (Vychádzajúc z našich skúseností s realizáciou vyučovacej hodiny podľa tohto návrhu, je použitie aritmetického priemeru prirodzeným objavom žiakov. Ale pri samotnej realizácii sme tejto fáze ponechali väčší časový priestor a presunuli sme ju až za štvrtú fázu.)

V štvrtej fáze navrhujeme použiť Tab. 1 na spracovanie získaných údajov. Jednotlivé riadky (od 1 do 10) znamenajú opakovanie pokusu δ_s. V druhom až siedmom stĺpci sú znázornené výsledky po hode kockou. Posledný stĺpec zachytáva celkový počet opakovaní pokusu δ_s.

Ako príklad uvádzame takú postupnosť čísel, ktorá padla pri jednom čakaní na kompletnú sériu $(1, 6, 4, 5, 4, 6, 2, 1, 3)$. Túto situáciu sme znázornili v prvom riadku Tab. 1.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅	Počet opakovaní pokusu δ_s
1.	II	I	I	II	I	II	9
...							
10.							

Tab. 1. Záznam 10 pokusov δ_s jedného žiaka

Návrh spôsobu záznamu je vhodné ponechať na samotných žiakov. V závere ho odporúčame zjednotiť, aby sumarizácia výsledkov celej triedy prebehla čo najrýchlejšie.

Tak ako sme spomínali vyššie, strednú hodnotu náhodnej premennej T odhadneme pomocou aritmetického priemeru

$$\overline{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n},$$

kde p_i označuje počet opakovaní i-tého pokusu δ_s a n označuje celkový počet uskutočnených pokusov δ_s. Nakoľko aritmetický priemer je dobrým odhadom strednej hodnoty náhodnej premennej ([2, s. 484]), pri dostatočne veľkom n (t.j. dostatočnom opakovaní pokusu δ_s) bude s pravdepodobnosťou blízkou 1 aritmetický priemer $\overline{p}$ blízky teoretickej hodnote 14,7.

Vo fáze interpretácie teda môžeme formulovať nasledujúci úsudok: *V priemere* 15 *hodov kockou postačuje na získanie celej série čísel od* 1 *do* 6.

A teda: *Priemerne* 15 *balení cereálií kúpime, kým získame celú sériu postavičiek a tým právo na výhru.*

Matematické zdôvodnenie

V tejto časti uvádzame podstatné kroky výpočtu strednej hodnoty bez ich podrobného zdôvodnenia. Tento výpočet neodporúčame prezentovať žiakom. (Podrobnejší spôsob výpočtu čitateľ môže nájsť v [7, s. 347–348] a [3, s. 339–342].)

Opakovanie kúpy balenia s náhodnou postavičkou tak dlho, až získame celú sériu, možno rozdeliť na šesť po sebe nasledujúcich fáz. Nachádzanie sa v j-tej fáze ($j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$) znamená, že zatiaľ sme nazbierali j rôznych postavičiek. Teda j-tá fáza je čakaním na jednu zo $6 - j$ postavičiek, ktoré ešte nemáme.

Dĺžka trvania tohto čakania je náhodnou premennou, jej hodnotou je počet opakovaní náhodného pokusu δ do získania balenia s novou postavičkou (vrátane). Označujeme ju T_j.

Dĺžka čakania, je súčtom dĺžok (trvaní) jednotlivých fáz, preto náhodná premenná T je súčtom

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Keďže stredná hodnota súčtu náhodných premenných je súčtom ich stredných hodnôt ([3, s. 341, veta 9.10]), získanie $E(T_j)$ pre každé $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ vedie k získaniu $E(T)$.

Bernoulliho pokus je náhodným pokusom s dvomi možnými výsledkami (jeden je označovaný ako úspech, druhý ako neúspech), ktorých pravdepodobnosti sú kladné ([3, s. 82]). Opakovanie náhodného pokusu δ v j-tej fáze ($j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) je Bernoulliho pokusom. Stačí kúpu novej postavičky v j-tej fáze interpretovať ako úspech a kúpu postavičky, akú už má, ako neúspech. Ak pravdepodobnosť, že nastal úspech, t.j. v j-tej fáze sme kúpili s novým balením cereálií aj postavičku, ktorá nám chýbala, označíme u_j, potom

$$u_j = \frac{6 - j}{6}.$$

Z definície strednej hodnoty[1] určíme stredný čas čakania na prvý úspech. Pravdepodobnosť s akou náhodná premenná T_j nadobúda hodnotu $k \in \mathbb{N}$ je rovná $(1 - u_j)^{k-1} \cdot u_j$, čo zapisujeme nasledovne

$$P(T_j = k) = (1 - u_j)^{k-1} \cdot u_j.$$

[1] *Stredná hodnota náhodnej premennej* X so spočítateľným oborom hodnôt $\{x_1, x_2, \dots\}$ je definovaná ako súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot P(X = x_k)$ ([3, s. 339]).

Pre jej strednú hodnotu teda platí

$$E(T_j) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1 - u_j)^{k-1} \cdot u_j.$$

Pre u_j spĺňajúce podmienku $0 < u_j < 1$ je tento rad konvergentný a jeho súčet je $\frac{1}{u_j}$ ([3, s. 341]).

Ostáva nájsť $E(T_0)$. Keďže pri prvej kúpe vždy získame novú postavičku, je doba čakania rovná 1, a teda

$$E(T_0) = 1.$$

Očakávaný čas čakania na všetky postavičky zo série je

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{5} E(T_i) &= E(T_0) + E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) + E(T_4) + E(T_5) = \\ &= 1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} + 2 + 3 + 6 = 14{,}7.\end{aligned}$$

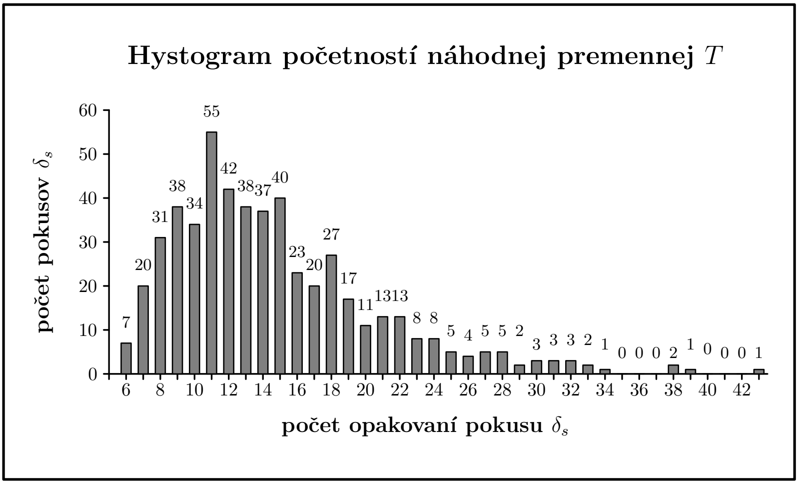
Skúsenosti z vyučovania

Tento problém sme riešili so študentami Pedagogickej univerzity, ale aj vo viacerých triedach gymnázií.

Študentom pedagogickej univerzity bol tento problém nastolený počas základného kurzu pravdepodobnosti. Išlo o študentov učiteľského štúdia. Tento problém bol riešený preto, aby sme zistili, či jeho zadanie je zrozumiteľné. Taktiež preto, aby sme zistili aké najčastejšie otázky, či postrehy odznejú a mohli sme sa na ne pripraviť, keďže v ďalšom kroku sme plánovali zadať tento problém žiakom stredných škol. Výsledky nášho pozorovania sú zachytené v celom návrhu riešenia problému predstaveného v predchádzajúcich častiach. Pre ilustráciu uvádzame výsledky z opakovania pokusu δ_s.

Na hodine bolo 52 študentov a každý z nich opakoval tento pokus 10krát. Priemerný počet doby čakania celej skupiny bol 14,68.

Nasledujúci graf zachytáva informáciu o rozdelení náhodnej premennej T.



Samotné zadanie problému a aj jeho riešenie pomocou simulácie sa stretlo s pozitívnym ohlasom. Ani v jednej triede gymnázia však tento spôsob simulácie nepatril k prvým nápadom žiakov. Domnievali sme sa, že samotná úloha, v ktorej vystupuje práve šesť postavičiek je silným vodítkom k použitiu hracej kocky. Najčastejšie nápady žiakov však boli:

- generovanie náhodných čísel pomocou softvéru MS Exel,
- losovanie šiestich označených lístkov z klobúka s ich opätovným návratom.

Domnievame sa, že aj napriek tomu, že v mnohých úlohách z pravdepodobnosti vystupujú kocky, žiaci nemajú osobnú skúsenosť s ich použitím pri simuláciách na hodine matematiky a preto ich použitie spájajú predovšetkým s hrou a hazardom.

Záver

V tomto článku ponúkame jeden z pohľadov na proces používania matematiky k riešeniu mimomatematických problémov. Ten je organizovaný v troch fázach a to vo fáze matematizácie, fáze výpočtov a dedukcie a fáze interpretácie. V prvej fáze hľadáme matematickú formuláciu mimomatematického problému, ďalej riešime už matematický problém matematickými prostriedkami a v závere ponúkame vysvetlenie získaného výsledku v pôvodnom kontexte ([2, s. 131]).

Na realizáciu fázy výpočtov a dedukcie v predloženom probléme žiaci nemajú potrebný matematický aparát. Preto sme na jeho riešenie navrhli metódu Monte Carlo. Hoci predložený problém vyžaduje len málo výpočtov, v skutočnosti je hlboko matematický a rozvíja dôležité stochastické kompetencie ([4, s. 248–249, 252], [2, s. 510]) akými sú schopnosť prekladať mimomatematický problém do jazyka matematiky, navrhovať simulácie, zbierať a organizovať štatistické údaje a v neposlednom rade formulovať úsudky typické pre stochastiku.

Literatura

[1] *Eckhardt, R.*: Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo Method, Los Alamos Science, roč. 131 (1987), spec. č. 15.

[2] *Płocki, A*: Dydaktyka stochastyky rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako nowy element ksztalcenia matematycznego, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 2005.

[3] *Płocki, A*: Pravdepodobnosť okolo nás stochastika v úlohách a problémoch okolo nás, Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok, 2007.

[4] *Płocki, A*: Pravdepodobnosť okolo nás stochastika v úlohách a problémoch okolo nás, Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok, 2004.

[5] *Płocki, A.*: Stochastické usudzovanie v matematike pre každého, Matematika v škole dnes a zajtra, Ružomberok, 2006.

[6] *Płocki, A., Tlustý P.*: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírne pokročilé, Prometheus, Praha, 2007.

[7] *Płocki, A*: Stochastika dla nauczyciela, Rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako matematyka in statu nascendi, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 2007.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojice začínající třetí stovku. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 4. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.