

Symetrické soustavy algebraických rovnic

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

Symetrie (souměrnosti) jsou nesmírně zajímavými a významnými vlastnostmi hmotných objektů reálného světa i abstraktních objektů v mnoha vědních oborech, speciálně v matematice. Ve školské matematice je systematická pozornost věnována symetriím matematických objektů (útvárů) zpravidla jen v geometrii. Je třeba si uvědomit, že se symetriemi matematických objektů se setkáváme jako s velmi zajímavými a důležitými vlastnostmi také v dalších oblastech matematiky, speciálně v algebře.

Nejen zajímavým, ale i velice užitečným algebraickým využitím symetrií jsou symetrické polynomy a symetrické soustavy algebraických (polynomických) rovnic řešené metodou substituce. Jejich výkladu a užití je věnován náš článek. Vzhledem k jeho rozsahu i z didaktických důvodů se v něm omezujeme na symetrické soustavy algebraických rovnic o dvou a třech neznámých s reálnými koeficienty.

Úvodem připomeneme dvě důležité věty ze středoškolské matematiky o symetrických vlastnostech kořenů kvadratických rovnic a připojíme dvě analogické věty pro kubické rovnice s reálnými, resp. komplexními koeficienty.

Věta 1 (o rozkladu normovaného kvadratického polynomu)

Kvadratická rovnice v normovaném tvaru $x^2 + px + q = 0$ má kořeny $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, právě když kvadratický polynom $x^2 + px + q$ lze rozložit na součin kořenových činitelů $x - x_1, x - x_2$, tj.

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2). \quad (1)$$

Věta 2 (Viètovy vztahy pro normovanou kvadratickou rovnici)

Kořeny normované kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$ jsou čísla $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, právě když platí vztahy (Viètovy vzorce)

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q. \quad (2)$$

Důkaz. Tato věta je jednoduchým a velmi názorným důsledkem věty 1. Roznásobením kořenových činitelů na pravé straně rovnosti (1) dostáváme

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

a tato rovnost polynomů nastává, právě když jsou si rovny jejich koeficienty, tj. když platí vztahy (2).

Věta 3 (o rozkladu normovaného kubického polynomu)

Kubická rovnice v normovaném tvaru $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ má kořeny $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, právě když kubický polynom $x^3 + px^2 + qx + r$ lze rozložit na součin kořenových činitelů $x - x_1, x - x_2, x - x_3$, tj.

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \quad (3)$$

Věta 4 (Viètovy vztahy pro normovanou kubickou rovnici)

Kořeny normované kubické rovnice $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ jsou čísla $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, právě když platí vztahy (Viètovy vzorce)

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = q, \quad x_1 x_2 x_3 = -r. \quad (4)$$

Důkaz. Tato věta je důsledkem věty 3. Roznásobením kořenových činitelů na pravé straně rovnosti (3) dostáváme

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3 = 0$$

a tato rovnost polynomů nastává, právě když jsou si rovny jejich koeficienty, tj. jestliže platí vztahy (4).

1. Symetrické polynomy dvou proměnných

Polynomem $f(x, y)$ proměnných x, y s reálnými koeficienty se rozumí součet algebraických výrazů tvaru $ax^m y^n$, kde $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$. Oborem proměnných x, y je obor komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Speciálně: Polynom $f(x, y)$ se nazývá symetrický polynom proměnných x, y , jestliže se nezmění při záměně pořadí proměnných x, y , tj. platí-li

$$f(x, y) = f(y, x) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Příklad symetrického a nesymetrického polynomu 2 proměnných

Polynom $x^3y^2 + x^2y^3$ je symetrický, polynom $x^3 + y^2$ není symetrický.

Dvojice symetrických polynomů

$$e_1(x, y) = x + y, \quad e_2(x, y) = xy \quad (6)$$

tvoří tzv. *elementární symetrické polynomy proměnných x, y* . Užívá se pro ně též označení

$$u = e_1(x, y), \quad v = e_2(x, y) \quad (7)$$

neboli substituce

$$u = x + y, \quad v = xy. \quad (8)$$

Poznámka 1. Elementární symetrické polynomy dvou proměnných se vyskytují v modifikované podobě ve Viětových vzorcích pro kvadratickou rovnici (viz větu 2).

Volba elementárních symetrických polynomů (6) není náhodná, ale taková, že platí následující významná věta.

Věta 5 (základní věta o symetrických polynomech dvou proměnných)

Každý symetrický polynom $f(x, y)$ proměnných x, y lze jednoznačně vyjádřit jako polynom $g(u, v)$ proměnných u, v daných vztahy (8), přičemž platí

$$f(x, y) = g(u, v). \quad (9)$$

Příklady úpravy symetrického polynomu $f(x, y)$ na tvar $g(u, v)$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v, \\ x^2 + xy + y^2 &= x^2 + y^2 + xy = u^2 - v, \\ x^2 - xy + y^2 &= x^2 + y^2 - xy = u^2 - 3v, \\ x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3(x + y)xy = u^3 - 3uv. \end{aligned}$$

Obdobně by bylo možné provést úpravy symetrických polynomů $x^n + y^n$ proměnných x, y na polynomy proměnných u, v i pro $n = 4, 5, \dots$, avšak mnohem jednodušší je využít pro ně rekurentní vyjádření podle následující věty.

Věta 6 (o rekurentním vyjádření posloupnosti mocninných součtů)

Posloupnost mocninných součtů $s_n = x^n + y^n$ ($x, y \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$) lze vyjádřit v proměnných u, v rekurentním zadáním (rekurentním vzorcem)

$$s_0 = 2, \quad s_1 = u, \quad s_n = us_{n-1} - vs_{n-2} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2. \quad (10)$$

Důkaz. $s_0 = x^0 + y^0 = 2$, $s_1 = x + y = u$ a pro $n \geq 2$ užitím zpětné substituce dané vztahy (8) dostáváme

$$\begin{aligned} us_{n-1} &= (x+y)(x^{n-1} + y^{n-1}) = x^n + xy^{n-1} + yx^{n-1} + y^n = \\ &= x^n + y^n + xy(x^{n-2} + y^{n-2}) = s_n + vs_{n-2}, \end{aligned}$$

odkud plyne dokazovaný rekurentní vzorec (10).

Užitím věty 6 je možné postupně získat vyjádření s_n v proměnných u, v uvedená ve 2. sloupci tabulky 1.

Tabulka 1

s_n v proměnných x, y	s_n v proměnných u, v
$s_1 = x + y$	$s_1 = u$
$s_2 = x^2 + y^2$	$s_2 = u^2 - 2v$
$s_3 = x^3 + y^3$	$s_3 = u^3 - 3uv$
$s_4 = x^4 + y^4$	$s_4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$
$s_5 = x^5 + y^5$	$s_5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$
$s_6 = x^6 + y^6$	$s_6 = u^6 - 6u^4v + 9u^2v^2 - 2v^3$
$s_7 = x^7 + y^7$	$s_7 = u^7 - 7u^5v + 14u^3v^2 - 7uv^3$
$\vdots$	$\vdots$

2. Symetrické soustavy algebraických rovnic o dvou neznámých

V této i dalších částech článku navazujeme na náš příspěvek [5], ve kterém je formulován pojem *soustavy n algebraických rovnic o n neznámých* a podrobně s příklady popsáno její řešení *metodou postupné eliminace neznámých* (MPE).

Symetrická soustava algebraických rovnic s neznámými x, y v oboru $\mathbb{C}$ je soustava rovnic, kterou lze zapsat v anulovaném tvaru

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, y) &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

kde $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ jsou symetrické polynomy proměnných x, y . Z důvodu symetrie pro ni platí: Je-li uspořádaná dvojice (c_1, c_2) čísel $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ řešením soustavy rovnic (11), pak také uspořádaná dvojice (c_2, c_1) je jejím řešením.

Speciální případ symetrické soustavy algebraických rovnic (11)

Významný speciální případ soustavy rovnic (11) je

$$\begin{aligned}x + y &= a_1, \\ xy &= a_2,\end{aligned}\tag{12}$$

kde levými stranami rovnic jsou elementární symetrické polynomy a pravými stranami jsou dané konstanty $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Řešení soustavy rovnic (12) MPE. Neznámou y eliminujeme tak, že z 1. rovnice vyjádříme $y = a_1 - x$ a dosadíme do 2. rovnice, anebo 1. rovnici vynásobíme x a do rovnice $x^2 + xy = a_1x$ dosadíme za xy z 2. rovnice. Dostáváme tak pro neznámou x kvadratickou rovnici

$$x^2 - a_1x + a_2 = 0.\tag{13}$$

Její diskriminant je $D = a_1^2 - 4a_2$. Pro $D \geq 0$ má dva reálné kořeny x_1, x_2 a pro $D < 0$ dva imaginární (komplexně sdružené) kořeny x_1, x_2 . V obou případech pak $y_1 = a_1 - x_1, y_2 = a_2 - x_2$.

Poznámka 2. Ke kvadratické rovnici (13) lze dospět též přímo užitím analogie soustavy rovnic (12) s Viětovými vzorci pro kvadratickou rovnici v normovaném tvaru podle věty 2.

Příklad řešení symetrické soustavy algebraických rovnic tvaru (12)

V oboru komplexních čísel řešte symetrické soustavy rovnic

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x + y = 3, & \text{b) } x + y = 2, \\ xy = 2, & xy = 10. \end{array}$$

Řešení. MPE eliminací neznámé y dostáváme:

- a) $x^2 - 3x + 2 = 0, D = 1, x_1 = 2, x_2 = 1, y_1 = 1, y_2 = 2$; daná soustava rovnic má 2 řešení $(2; 1), (1; 2)$,
b) $x^2 - 2x + 10 = 0, D = -36, x_1 = 1 + 3i, x_2 = 1 - 3i, y_1 = 1 - 3i, y_2 = 1 + 3i$; daná soustava rovnic má 2 řešení $(1 + 3i; 1 - 3i), (1 - 3i; 1 + 3i)$.

Obecný případ symetrické soustavy algebraických rovnic (11), řešení metodou substituce

Pro obecné (složitější) symetrické soustavy algebraických rovnic (11) je možné k řešení použít metodu postupných eliminací neznámých (MPE). Avšak to není vždy snadné a hlavně algebraické rovnice získané eliminací neznámých může být vysokého stupně. Proto je zpravidla výhodnější

využít symetrii soustavy rovnic a k jejímu řešení použít specifickou substituční metodu, která je založena na substituci symetrických polynomů elementárními symetrickými polynomy podle věty 5.

Postup řešení symetrické soustavy algebraických rovnic (11) metodou substituce spočívá ve 3 krocích.

1. krok: Symetrické polynomy $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ v soustavě rovnic (11) se užitím substituce (8) neboli

$$x + y = u, \quad xy = v \quad (14)$$

upraví na ekvivalentní tvary $g_1(u, v)$, $g_2(u, v)$.

2. krok: Získaná ekvivalentní soustava algebraických rovnic (obecně nesymetrických)

$$\begin{aligned} g_1(u, v) &= 0, \\ g_2(u, v) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

se řeší obvykle metodou postupných eliminací neznámých (MPE) a její řešení se označí u_i , v_i .

3. krok: Zpětným užitím substitucí (14) pro $u = u_i$, $v = v_i$ se dostávají výstupní soustavy rovnic pro neznámé x , y

$$x + y = u_i, \quad xy = v_i. \quad (16)$$

To jsou soustavy rovnic tvaru (12), ale nyní obecně je $u_i, v_i \in \mathbb{C}$. Eliminací neznámé y se z ní obdobně získává pro neznámou x kvadratická rovnice

$$x^2 - u_i x + v_i = 0. \quad (17)$$

Její kořeny x_j a příslušná y_j jsou (vzhledem k ekvivalenci rovnic) též kořeny dané soustavy rovnic (11).

Poznámka 3. Kvadratickou rovnici (17) lze alternativně získat přímo užitím věty 2 (viz poznámku 2).

Příklady řešení symetrických soustav algebraických rovnic tvaru (11) užitím metody substituce

V oboru komplexních čísel řešte metodou substituce následující symetrické soustavy algebraických rovnic.

Příklad 1

$$\begin{aligned} x + xy + y &= 11, \\ x^2 y + xy^2 &= 30. \end{aligned}$$

Řešení (metodou substituce). Danou soustavu rovnic upravíme na tvar

$$\begin{aligned}x + y + xy &= 11, \\(x + y)xy &= 30.\end{aligned}$$

Užitím substitucí $x + y = u$, $xy = v$ získáváme pro neznámé u, v soustavu rovnic

$$u + v = 11, \quad uv = 30,$$

kterou řešíme postupem MPE. Z 1. rovnice $v = 11 - u$ a po dosazení do 2. rovnice se v ní eliminuje neznámá v . Pro neznámou u dostáváme kvadratickou rovnici $u^2 - 11u + 30 = 0$, která má diskriminant $D = 1$ a kořeny $u_1 = 6$, $u_2 = 5$. K nim přísluší $v_1 = 11 - u_1 = 5$, $v_2 = 11 - u_2 = 6$. Z těchto hodnot získáme zpětnou substitucí pro neznámé x, y dvě výstupní soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x + y &= 6, & x + y &= 5, \\xy &= 5, & xy &= 6.\end{aligned}$$

Řešíme je opět užitím MPE.

Pro 1. soustavu rovnic $y = 6 - x$, $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = 5$.

Pro 2. soustavu rovnic $y = 5 - x$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2$, $y_3 = 2$, $y_4 = 3$.

Daná soustava rovnic má tedy 4 řešení: $(5; 1)$, $(1; 5)$, $(3; 2)$, $(2; 3)$.

Na porovnání uvedme stručně pro danou soustavu rovnic z příkladu 1 její *alternativní řešení přímým užitím* MPE. Z 1. rovnice dané soustavy vyjádříme $y = (11 - x)/(x + 1)$ pro $x \neq -1$ a dosazením do 2. rovnice po rozsáhlých úpravách dostáváme pro neznámou x algebraickou rovnici 4. stupně (kvartickou rovnici) $x^4 - 11x^3 + 4x^2 - 61x + 30 = 0$.

Příklad 2

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4, \\x^3 + y^3 &= 8.\end{aligned}$$

Řešení. Užitím substituce $x + y = u$, $xy = v$ je $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, $x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$ (tab. 1). Z dané soustavy rovnic pro x, y tak dostáváme ekvivalentní soustavu rovnic pro neznámé u, v

$$\begin{aligned}u^2 - 2v &= 4, \\u^3 - 3uv &= 8,\end{aligned}$$

kterou řešíme MPE. Z 1. rovnice vyjádříme $v = \frac{1}{2}(u^2 - 4)$ a po dosazení do 2. rovnice dostáváme pro u kubickou rovnici $u^3 - 12u + 16 = 0$. Její kořeny hledáme mezi děliteli absolutního členu 16. Zjišťujeme, že má kořeny $u_1 = 2$ (dvojnásobný kořen) a $u_2 = -4$. Jim přísluší $v_1 = 0$ a $v_2 = 6$. Zpětnou substitucí získáme 2 výstupní soustavy rovnic pro neznámé x, y :

$$\begin{aligned}x + y &= 2, & x + y &= -4, \\xy &= 0, & xy &= 6.\end{aligned}$$

Řešíme je MPE.

1. soustava rovnic má řešení $x_1 = 2, y_1 = 0$ a $x_2 = 0, y_2 = 2$.
2. soustava rovnic má řešení $x_3 = -2 + \sqrt{2}i, y_3 = -2 - \sqrt{2}i$ a $x_4 = -2 - \sqrt{2}i, y_4 = -2 + \sqrt{2}i$.

Daná soustava má tedy 4 řešení: $(2; 0), (0; 2), (-2 + \sqrt{2}i; -2 - \sqrt{2}i), (-2 - \sqrt{2}i; -2 + \sqrt{2}i)$.

Na porovnání uveďme opět pro danou soustavu rovnic z příkladu 2 její *alternativní řešení přímým užitím* MPE. Z 1. rovnice dané soustavy vyjádříme $y^2 = 4 - x^2$ a z její 2. rovnice $y^3 = 8 - x^3$. Odtud je $y^6 = (4 - x^2)^3$ a $y^6 = (8 - x^3)^2$, takže $(4 - x^2)^3 = (8 - x^3)^2$ neboli po úpravách dostáváme pro neznámou x algebraickou rovnici 6. stupně $x^6 - 6x^4 + 8x^3 + 24x^2 = 0$. Protože $x^6 - 6x^4 + 8x^3 + 24x^2 = x^2(x^4 - 6x^2 + 8x + 24)$, je tedy $x = 0$ nebo $x^4 - 6x^2 + 8x + 24 = 0$ (kvartická rovnice pro x).

Poznámka 4. V příkladech 1 a 2 přímé použití MPE k řešení dané soustavy rovnic vedlo na řešení algebraické rovnice vyššího stupně než při řešení dané soustavy užitím metody substituce. Obdobně o výhodnosti použití této metody se lze přesvědčit i v dalších příkladech.

Příklad 3

$$\begin{aligned}x + xy + y &= 5, \\x^3 + x^3y^3 + y^3 &= 17.\end{aligned}$$

Řešení. Danou soustavu rovnic upravíme na tvar

$$x + y + xy = 5, \quad x^3 + y^3 + x^3y^3 = 17.$$

Substituce: $x + y = u, xy = v, x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$ (tab. 1). Získaná soustava rovnic pro neznámé u, v :

$$u + v = 5, \quad u^3 - 3uv + v^3 = 17.$$

Její řešení MPE: $v = 5 - u$ a po eliminaci v z 2. rovnice $u^2 - 5u + 6 = 0$. Tato kvadratická rovnice s diskriminantem $D = 1$ má kořeny $u_1 = 3$, $u_2 = 2$, jimž přísluší $v_1 = 2$, $v_2 = 3$. Zpětnou substitucí dostáváme dvě výstupní soustavy rovnic pro neznámé x , y :

$$\begin{array}{ll} x + y = 3, & x + y = 2, \\ xy = 2, & xy = 3. \end{array}$$

Jejich řešení MPE:

1. soustava má řešení $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ a $x_2 = 2$, $y_2 = 1$.
2. soustava má řešení $x_3 = 1 + \sqrt{2}i$, $y_3 = 1 - \sqrt{2}i$ a $x_4 = 1 - \sqrt{2}i$, $y_4 = 1 + \sqrt{2}i$.

Daná soustava rovnic má tedy 4 řešení: $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(1 + \sqrt{2}i; 1 - \sqrt{2}i)$, $(1 - \sqrt{2}i; 1 + \sqrt{2}i)$.

Příklad 4

$$\begin{array}{l} x + y = 4, \\ x^4 + y^4 = 82. \end{array}$$

Řešení. Substitute: $x + y = u$, $xy = v$, $x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$ (tab. 1). Získaná ekvivalentní soustava rovnic pro neznámé u , v :

$$u = 4, \quad u^4 - 4u^2v + 2v^2 = 82.$$

Odtud plyne pro neznámou v kvadratická rovnice $v^2 - 32v + 87 = 0$, která má diskriminant $D = 676$ a kořeny $v_1 = 3$, $v_2 = 29$, jimž odpovídají $u_1 = u_2 = 4$.

Zpětnou substitucí dostáváme dvě výstupní soustavy rovnic pro neznámé x , y :

$$\begin{array}{ll} x + y = 4, & x + y = 4, \\ xy = 3, & xy = 29. \end{array}$$

Jejich řešení MPE:

1. soustava má řešení $x_1 = 3$, $y_1 = 1$ a $x_2 = 1$, $y_2 = 3$.
 2. soustava má řešení $x_3 = 2 + 5i$, $y_3 = 2 - 5i$ a $x_4 = 2 - 5i$, $y_4 = 2 + 5i$.
- Daná soustava rovnic má tedy 4 řešení: $(3; 1)$, $(1; 3)$, $(2 + 5i; 2 - 5i)$, $(2 - 5i; 2 + 5i)$.

Příklad 5

$$\begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91. \end{array}$$

Řešení. Substitute: $x + y = u$, $xy = v$, $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, $x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$ (tab. 1). Ekvivalentní soustava rovnic pro neznámé u , v :

$$u^2 - 3v = 7, \quad u^4 - 4u^2v + 3v^2 = 91.$$

Užitím MPE obdobným postupem jako v předchozím příkladu se upraví do tvaru $v = 3$, $u^2 = 16$ s řešením $u_1 = 4$, $u_2 = -4$, $v_1 = v_2 = 3$. Příslušné dvě výstupní soustavy rovnic pro neznámé x , y mají řešení $x_1 = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $y_2 = 3$, $x_3 = -1$, $y_3 = -3$, $x_4 = -3$, $y_4 = -1$.

Daná soustava rovnic má tedy 4 řešení: $(3; 1)$, $(1; 3)$, $(-1; -3)$, $(-3; -1)$.

Příklad 6

Řešte v oboru komplexních čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ x^7 + y^7 &= a^7, \end{aligned}$$

kde a je nenulový reálný parametr.

Řešení. Substitute: $x + y = u$, $xy = v$, $x^7 + y^7 = u^7 - 7u^5v + 14u^3v^2 - 7uv^3$ (viz tab. 1). Získanou soustavu rovnic pro neznámé u , v řešíme MPE:

$$u = a, \quad 7av(v^2 - 2va^2 + a^4) = 7av(v - a^2)^2 = 0.$$

Jejím řešením (pro $a \neq 0$) jsou $u_1 = a$, $v_1 = 0$ a $u_2 = a$, $v_2 = a^2$.

Řešením příslušných výstupních soustav rovnic pro neznámé x , y dostaneme $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = a$, $x_3 = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, $y_3 = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{3}i)$, $x_4 = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{3}i)$, $y_4 = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{3}i)$.

Daná soustava rovnic má 4 řešení: $(a; 0)$, $(0; a)$, $(\frac{a}{2}(1 + \sqrt{3}i); \frac{a}{2}(1 - \sqrt{3}i))$, $(\frac{a}{2}(1 - \sqrt{3}i); \frac{a}{2}(1 + \sqrt{3}i))$.

3. Symetrické polynomy tří proměnných

Polynomem $f(x, y, z)$ proměnných x , y , z s reálnými koeficienty se rozumí součet algebraických výrazů tvaru $ax^m y^n z^k$, kde $a \in \mathbb{R}$, $m, n, k \in \mathbb{N}_0$. Oborem proměnných x , y , z je obor komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Speciálně: Polynom $f(x, y, z)$ se nazývá *symetrický polynom proměnných x , y , z* jestliže se nezmění při jakékoliv záměně pořadí proměnných x , y , z , tj. platí-li

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x, z, y) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = \\ &= f(z, x, y) = f(z, y, x) \quad \text{pro všechna } x, y, z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (18)$$

Poznámka 5. Pro zjištění, je-li daný polynom $f(x, y, z)$ symetrický, stačí ověření tří z rovností (18), vyjadřujících záměnu kterýchkoliv dvou proměnných, tj. $f(x, y, y) = f(x, z, y)$, $f(x, y, z) = f(z, y, x)$, $f(x, y, z) = f(y, x, z)$.

Příklad symetrického a nesymetrického polynomu 3 proměnných

Polynom $x^2yz + xy^2z + xyz^2$ je symetrický, kdežto polynom $x^2yz + xy^2z$ není symetrický.

Trojice symetrických polynomů

$$e_1(x, y, z) = x + y + z, \quad e_2(x, y, z) = xy + xz + yz, \quad e_3(x, y, z) = xyz \quad (19)$$

jsou nazývány *elementární symetrické polynomy proměnných x, y, z* . Užívá se též jejich stručné označení

$$u = e_1(x, y, z), \quad v = e_2(x, y, z), \quad w = e_3(x, y, z) \quad (20)$$

neboli substitute

$$u = x + y + z, \quad v = xy + xz + yz, \quad w = xyz. \quad (21)$$

Poznámka 6. Elementární symetrické polynomy tří proměnných se vyskytují v modifikované podobě ve Viětových vztazích pro kubickou rovnici (viz větu 4).

Volba elementárních symetrických polynomů (19) není náhodná, ale taková, že platí následující významná věta.

Věta 7 (základní věta o symetrických polynomech tří proměnných)

Každý symetrický polynom $f(x, y, z)$ proměnných x, y, z lze jednoznačně vyjádřit jako polynom $g(u, v, w)$ (obecně nesymetrický) proměnných u, v, w daných vztahy (21), přičemž platí

$$f(x, y, z) = g(u, v, w). \quad (22)$$

Příklady úpravy symetrického polynomu $f(x, y, z)$ na tvar $g(u, v, w)$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = u^2 - 2v, \\ x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 &= \\ &= (xy + xz + yz)(x + y + z) - 3xyz = \\ &= (x + y + z)(xy + xz + yz) - 3xyz = uv - 3w, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= (x + y + z)^3 - 3(x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + yz^2 + z^2x) - \\ &\quad - 6xyz = u^3 - 3(uv - 3w) - 6w = u^3 - 3uv + 3w. \end{aligned}$$

Obdobně jako v předchozích příkladech bychom mohli provést úpravy symetrických polynomů tvaru $x^n + y^n + z^n$ s proměnnými x, y, z na polynomy s proměnnými u, v, w i pro $n = 4, 5, \dots$ Ovšem opět značně jednodušší je použití rekurentního vyjádření podle následující věty.

Věta 8 (o rekurentním vyjádření posloupnosti mocninných součtů)

Posloupnost mocninných součtů $s_n = x^n + y^n + z^n$ ($x, y, z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$) lze vyjádřit ve tvaru polynomů proměnných u, v, w rekurentním zadáním (rekurentním vzorcem)

$$\begin{aligned} s_0 &= 3, & s_1 &= u, & s_2 &= u^2 - 2v, \\ s_n &= us_{n-1} - vs_{n-2} + ws_{n-3} & \text{pro } n \in \mathbb{N}, & n \geq 3. \end{aligned} \quad (23)$$

Důkaz. $s_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 3$, $s_1 = x^1 + y^1 + z^1 = u$, $s_2 = u^2 - 2v$ a pro $n \geq 3$ použitím zpětné substituce proměnných u, v, w na x, y, z dostáváme

$$\begin{aligned} us_{n-1} - vs_{n-2} &= (x + y + z)(x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}) - \\ &\quad - (xy + xz + yz)(x^{n-2} + y^{n-2} + z^{n-2}) = \\ &= x^n + y^n + z^n - xyz(x^{n-3} + y^{n-3} + z^{n-3}) = s_n - ws_{n-3}, \end{aligned}$$

odkud plyne platnost rekurentního vzorce (23).

Užitím věty 8 lze postupně získat vyjádření mocninných součtů s_n uvedená ve 2. sloupci tabulky 2.

Tabulka 2

s_n v proměnných x, y, z	s_n v proměnných u, v, w
$s_1 = x + y + z$	$s_1 = u$
$s_2 = x^2 + y^2 + z^2$	$s_2 = u^2 - 2v$
$s_3 = x^3 + y^3 + z^3$	$s_3 = u^3 - 3uv + 3w$
$s_4 = x^4 + y^4 + z^4$	$s_4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2 + 4uw$
$s_5 = x^5 + y^5 + z^5$	$s_5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2 + 5u^2w - 5vw$
$\vdots$	$\vdots$

4. Symetrické soustavy algebraických rovnic o třech neznámých

Symetrická soustava algebraických rovnic s neznámými x, y, z v oboru $\mathbb{C}$ je soustava rovnic, kterou lze zapsat ve tvaru

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad f_3(x, y, z) = 0, \quad (24)$$

kde $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ jsou symetrické polynomy proměnných x, y, z . Z důvodu symetrie pro ni platí: Jestliže je uspořádaná trojice (c_1, c_2, c_3) čísel $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ řešením soustavy rovnic (24), pak také každá permutace prvků c_1, c_2, c_3 je řešením této soustavy rovnic.

Speciální případ symetrické soustavy algebraických rovnic (24)

Zajímavým a významným speciálním případem soustavy rovnic (24) je

$$x + y + z = a_1, \quad xy + xz + yz = a_2, \quad xyz = a_3, \quad (25)$$

kde levými stranami rovnic jsou elementární symetrické polynomy proměnných x, y, z a pravými stranami jsou konstanty $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Řešení soustavy rovnic (25) MPE. Neznámé y, z eliminujeme tak, že vyjádříme z 1. rovnice $y + z = a_1 - x$ a z 3. rovnice $yz = \frac{a_3}{x}$ a dosadíme do 2. rovnice, anebo 1. rovnici vynásobíme x^2 , 2. rovnice vynásobíme x , za xyz dosadíme ze 3. rovnice a získané rovnice $x^3 + x^2y + x^2z = a_1x^2$, $x^2y + x^2z + a_3 = a_2x$ odečteme. Dostaneme tak pro neznámou x kubickou rovnici

$$x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0. \quad (26)$$

Označíme-li její kořeny x_1, x_2, x_3 , pak řešeními (x_i, y_i, z_i) dané soustavy rovnic (25) je všech 6 permutací prvků x_1, x_2, x_3 .

Poznámka 7. Ke kubické rovnici (26) lze dospět též přímo užitím analogie soustavy rovnic (25) s Viětovými vzorci pro kubickou rovnici v normovaném tvaru podle věty 4.

Příklad řešení symetrické soustavy algebraických rovnic tvaru (25)

V oboru komplexních čísel řešte symetrickou soustavu rovnic

$$x + y + z = 9, \quad xy + xz + yz = 26, \quad xyz = 24.$$

Řešení. Užitím MPE eliminací neznámých y, z dostáváme pro neznámou x kubickou rovnici $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, která má kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ (dělitelé 24). Daná symetrická soustava rovnic má proto 6 řešení: $(2; 3; 4)$ a všechny jeho permutace.

Obecný případ symetrické soustavy algebraických rovnic (24), řešení metodou substituce

Pro obecné (složitější) symetrické soustavy algebraických rovnic (24) je možné k řešení použít metodu postupných eliminací neznámých (MPE),

viz článek [5]. Avšak zpravidla je výhodnější na základě její symetrie řešit ji metodou substituce, jež je založena na substituci symetrických polynomů elementárními symetrickými polynomy podle věty 7.

Postup řešení symetrické soustavy algebraických rovnic (24) metodou substituce lze opět rozdělit do 3 kroků.

1. krok: Symetrické polynomy $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ v soustavě rovnic (24) se užitím substitucí (21) neboli

$$x + y + z = u, \quad xy + xz + yz = v, \quad xyz = w \quad (27)$$

upraví na ekvivalentní tvary $g_1(u, v, w)$, $g_2(u, v, w)$, $g_3(u, v, w)$.

2. krok: Získaná ekvivalentní soustava algebraických rovnic (obecně nesymetrických)

$$g_1(u, v, w) = 0, \quad g_2(u, v, w) = 0, \quad g_3(u, v, w) = 0 \quad (28)$$

se obvykle řeší metodou postupných eliminací neznámých (MPE) a její kořeny se značí u_i , v_i , w_i .

3. krok: Zpětným užitím substitucí (27) pro $u = u_i$, $v = v_i$, $w = w_i$, $i = 1, 2, 3$, získáme výstupní soustavy rovnic pro neznámé x , y , z

$$x + y + z = x_i, \quad xy + xz + yz = v_i, \quad xyz = w_i. \quad (29)$$

To jsou soustavy rovnic tvaru (25), ovšem nyní obecně je $u_i, v_i, w_i \in \mathbb{C}$. Eliminací neznámých y , z se z ní obdobně získává pro neznámou x kubická rovnice

$$x^3 - u_i x^2 + v_i x - w_i = 0. \quad (30)$$

Její kořeny x_j a příslušná y_j , z_j jsou (vzhledem k ekvivalenci rovnic) též kořeny dané soustavy rovnic (24).

Poznámka 8. Kubickou rovnicí (30) lze alternativně získat přímo užitím věty 4 (viz poznámku 7).

Příklady řešení symetrických soustav algebraických rovnic tvaru (24) užitím metody substituce

Příklad 7

V oboru komplexních čísel řešte metodou substituce soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 8. \end{aligned}$$

Řešení. Substitute: $x+y+z = u$, $xy+xz+yz = v$, $xyz = w$, $x^2+y^2+z^2 = u^2 - 2v$, $x^3+y^3+z^3 = u^3 - 3uv + 3w$ (tab. 2). Ekvivalentní soustava rovnic pro neznámé u , v , w :

$$u = 2, \quad u^2 - 2v = 6, \quad u^3 - 3uv + 3w = 8.$$

Řešení MPE: Eliminací u z 2. rovnice $4 - 2v = 6 \Rightarrow v = -1$ a z 1. rovnice pak $3w = -6 \Rightarrow w = -2$. Zpětnou substitucí dostáváme pro x , y , z výstupní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ xy + xz + yz &= -1, \\ xyz &= -2. \end{aligned}$$

Užitím MPE eliminací neznámých y , z odtud plyne pro neznámou x kubická rovnice $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, přičemž

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2)(x^2 - 1),$$

takže její kořeny jsou $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Daná soustava rovnic má proto 6 řešení, jimiž jsou všechny permutace čísel 2, 1, -1: (2; 1; -1), ...

Poznámka 9. Alternativní přímé řešení soustavy rovnic z příkladu 7 užitím MPE by bylo značně složitější, viz [5, s. 93–95].

Příklad 8

Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3, \end{aligned}$$

kde a je nenulový reálný parametr.

Řešení metodou substitute této soustavy rovnic je zobecněním postupu řešení užitého v předchozím příkladu 7.

Tytéž substitute převádějí danou soustavu rovnic pro neznámé x , y , z na soustavu rovnic pro u , v , w : $u = a$, $v = 0$, $w = 0$, jíž odpovídá výstupní soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ xy + xz + yz &= 0, \\ xyz &= 0. \end{aligned}$$

Její řešení jsou $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 = a$, $z_2 = 0$; $x_3 = 0$, $y_3 = 0$, $z_3 = a$.

Daná soustava rovnic má tedy řešení: $(a; 0; 0)$, $(0; a; 0)$, $(0; 0; a)$.

V následujícím příkladu ještě ukážeme, jak lze postupovat při řešení symetrických soustav algebraických rovnic metodou substituce, jestliže soustava rovnic není tvaru (24), protože každá rovnice neobsahuje všechny tři neznámé x , y , z , ale jen dvě z nich.

Příklad 9

Užitím metody substituce řešte soustavu rovnic

$$x^2 + xy + y^2 = 37,$$

$$x^2 + xz + z^2 = 28,$$

$$y^2 + yz + z^2 = 19.$$

Řešení. Pro použití metody substituce k řešení dané soustavy rovnic je nutné ji upravit na ekvivalentní tvar, kde rovnice budou obsahovat všechny tři neznámé x , y , z . Jednu z takových rovnic lze získat sečtením všech tří rovnic dané soustavy. Získat další potřebné rovnice je ovšem podstatně obtížnější. Nejvýhodnější je vzít na pomoc metodu faktorizace: V dané soustavě rovnic odečteme od 1. rovnice 2. rovnici a od 2. rovnice 3. rovnici. Dostáváme soustavu rovnic, kterou lze vyjádřit v součinném tvaru

$$(y - z)(x + y + z) = 9,$$

$$(x - y)(x + y + z) = 9.$$

Odtud plyne $x + y + z \neq 0$ a $y - z = x - y$, odkud $2y = x + z$, a tedy $3y = x + y + z$, takže po substituci $x + y + z = u$ dostáváme, že $y = \frac{u}{3}$. Dále pak

$$x - y = \frac{9}{u} \Rightarrow x = \frac{u}{3} + \frac{9}{u} = \frac{u^2 + 27}{3u},$$

$$y - z = \frac{9}{u} \Rightarrow z = \frac{u}{3} - \frac{9}{u} = \frac{u^2 - 27}{3u}.$$

Po dosazení těchto vyjádření x , y , z do kterékoliv rovnice dané soustavy a úpravě vzniklé rovnice pro neznámou u dostáváme bikvadratickou rovnici $u^4 - 84u^2 + 243 = 0$. Užitím substituce $t = u^2$ přechází v kvadratickou rovnici s kořeny $t_1 = 81$, $t_2 = 3$. Odtud zpětnou substitucí je $u_{1,2}^2 = 81$, $u_{3,4}^2 = 3$, a tedy $u_{1,2} = \pm 9$, $u_{3,4} = \pm \sqrt{3}$. Podle výše odvozených vztahů

pro x, y, z jim přísluší řešení $x_{1,2} = \pm 4$, $y_{1,2} = \pm 3$, $z_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm \frac{10\sqrt{3}}{3}$, $y_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, $z_{3,4} = \mp \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Daná soustava má tedy 4 řešení: $(4; 3; 2)$, $(-4; -3; -2)$, $(\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{8\sqrt{3}}{3})$, $(-\frac{10\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{8\sqrt{3}}{3})$.

Poznámka 10. Pozoruhodné jistě je, že každý ze symetrických polynomů rovnic dané soustavy v předchozím příkladu lze vyjádřit pomocí jediného elementárního polynomu $u = x + y + z$.

Závěr

Ukázali jsme, jak užitím symetrických polynomů dvou či tří proměnných a jejich vyjádřením elementárními symetrickými polynomy lze výhodně řešit symetrické soustavy algebraických rovnic se dvěma a třemi neznámými metodou substituce. K seznámení s dalšími algebraickými aplikacemi teorie symetrických polynomů a s jejím zobecněním pro $n \in \mathbb{N}$ proměnných je vhodná literatura [1], [2].

Literatura

- [1] *Boltjanskij, V. G., Vilenkin, N. J.*: Simetrija v algebre. Izdatel'stvo Nauka, Moskva, 1967.
- [2] *Kufner, A.*: Symetrické funkce. Škola mladých matematiků, svazek 52. Nakladatelství Mladá fronta, Praha, 1982.
- [3] *Lidskij, V. B. a kol.*: Úlohy z elementární matematiky. SPN, Praha, 1965. (Překlad z ruského originálu.)
- [4] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. I. část Konkrétní didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2014.
- [5] *Polák, J.*: Řešení soustav polynomiálních rovnic. Matematika–fyzika–informatika, roč. 31 (2022), č. 2, s. 81–100.
- [6] *Svätokrižny, P., Dlouhý, Z., Hruša, K.*: Aritmetika a algebra pre pedagogické fakulty. II. diel Algebra. SPN, Bratislava, 1978.
- [7] *Švrček, J.*: Systems of equations and methods of their solving. Vydavatelství UP, Olomouc, 2019.
- [8] *Tumanov, S. I.*: Poiski rešenija zadači. Izdatel'stvo Prosveščeniye, Moskva, 1969.
- [9] *Vilenkin, N. J. a kol.*: Algebra. Učebnoje posobie dlja srednich škol s matematičeskoj specializacij. Izdatel'stvo Prosveščeniye, Moskva, 1972.