

Jak dokázat, že čtyři body leží na kružnici

JAROSLAV ŠVRČEK – LENKA JUKLOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem článku je popis a prezentace tří základních metod (postupů), pomocí nichž lze prostředky syntetické geometrie (bez použití analytické geometrie) dokázat, že dané 4 body leží na téže kružnici (jsou koncyklické). S tímto úkolem se žáci středních škol setkávají poměrně často – především při řešení tzv. nadstandardních úloh školské planimetrie – zejména pak při řešení úloh MO a dalších matematických soutěží pro středoškoláky.

Náš příspěvek vznikl na základě učitelských i žákovských podnětů, kdy běžní středoškoláci nemají k dispozici potřebnou metodiku, jak řešit podobné úlohy uvedenými prostředky.

Uvažujme v rovině konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Chceme-li ověřit, zda tento čtyřúhelník je *tětivový*, tj. že jeho vrcholy leží na téže kružnici, lze zpravidla využít některý ze tří níže uvedených postupů:

1. Užití vlastností obvodových úhlů.
2. Užití kritéria pro tětivový čtyřúhelník (a jeho ekvivalentní verze).
3. Užití mocnosti bodu ke kružnici.

Jednotlivé postupy nejprve popíšeme a poté nabídneme čtenářům pětiličku úloh, při jejichž řešení využijeme výše uvedené postupy.

1. Užití vlastností obvodových úhlů

Zvolme některou ze stran uvažovaného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, např. AB . Dokážeme-li shodnost úhlů ACB a ADB , lze oba úhly považovat za *obvodové* pro tětivu AB kružnice, na níž tedy leží všechny čtyři vrcholy uvažovaného čtyřúhelníku $ABCD$ (a také naopak).

Poznamenejme ještě, že oba vrcholy C a D čtyřúhelníku $ABCD$ leží v téže polorovině vyřazené přímkou AB .

2. Užití kritéria pro tětivový čtyřúhelník (a ekvivalentní verze)

Zvolme jednu z úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, např. BD . Pokud ověříme, že pro velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A , C , které

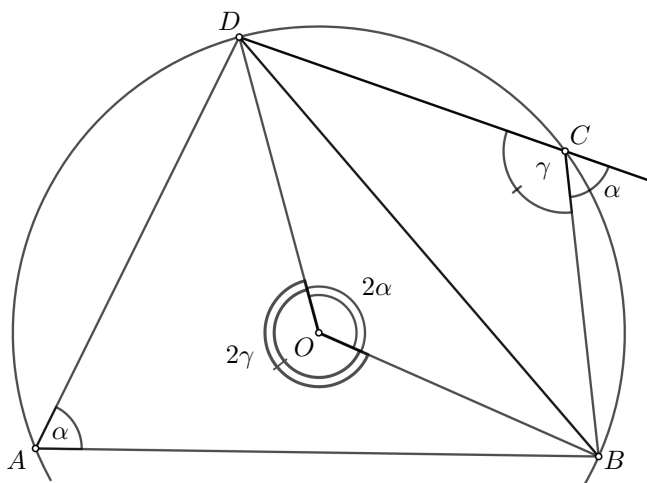
leží v opačných polorovinách vyřatých přímkou BD , platí při obvyklém označení vnitřních úhlů a jejich velikostí $\alpha + \gamma = 180^\circ$, pak čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, což lze považovat za jednu část (jednu z implikací) známého kriteriálního vztahu pro tětivový čtyřúhelník, s nímž se žáci seznámují při výuce planimetrie na středních školách. Stručným shrnutím tohoto odstavce je

Věta 1

Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když pro velikosti jeho vnitřních úhlů platí

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ. \quad (1)$$

Nástin důkazu. Při důkazu nutné podmínky vyjdeme ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem. Platí $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$, tedy $\alpha + \gamma = 180^\circ$ (obr. 1).



Obr. 1

K důkazu skutečnosti, že (1) je také postačující podmínkou, lze pak vhodně kombinovat důkaz sporem s již dokázanou podmínkou nutnou.

Za pozornost však bezesporu stojí další praktické tvrzení, které je ekvivalentní s větou 1, resp. s rovností (1).

Věta 2

Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když některý z jeho vnitřních úhlů je shodný s vnějším úhlem u protějšího vrcholu.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme nejprve, že např. velikost α vnitřního úhlu při vrcholu A konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ je rovna velikosti vnějšího úhlu při vrcholu C . Nechť γ je velikost vnitřního úhlu při vrcholu C . Pak platí

$$\alpha + \gamma = \alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ,$$

což je ale (postačující) podmínka (1), která garantuje skutečnost, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový (obr. 1).

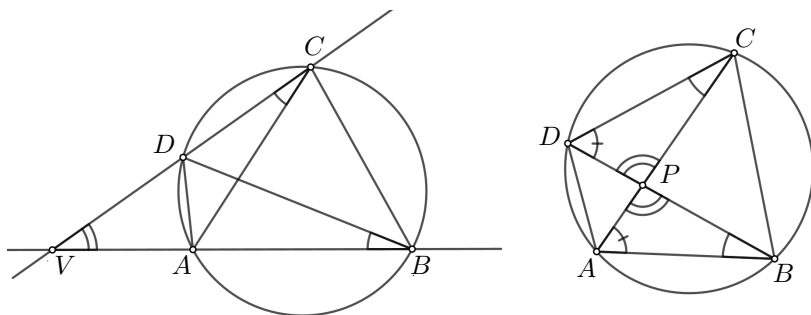
Obrácením postupu snadno ukážeme, že pokud $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, je vnitřní úhel, např. při jeho vrcholu A , shodný s vnějším úhlem u protějšího vrcholu C .

3. Užití mocnosti bodu ke kružnici.

Existuje-li v uvažovaném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ aspoň jedna dvojice protilehlých stran, které nejsou rovnoběžné, protínají se přímkami, na nichž tyto strany leží, ve vnějším bodě V čtyřúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že AB a CD jsou dvě různoběžné strany a V je průsečíkem přímek AB a CD , viz obr. 2 vlevo. Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby vrcholy daného čtyřúhelníku ležely na téže kružnici, je v takovém případě splnění rovnosti

$$|VA| \cdot |VB| = |VC| \cdot |VD|, \quad (2)$$

viz obr. 2 vlevo, která charakterizuje tzv. *mocnost vnějšího bodu V ke kružnici* (opsané čtyřúhelníku $ABCD$), viz např. [1].



Obr. 2

Lze však pracovat také s průsečíkem P úhlopříček AC a BD uvažovaného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, kde P je vnitřním bodem konvex-

ního čtyřúhelníku $ABCD$. Analogický kritériální vztah (rovnost) garantující skutečnost, že $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, má však nyní tvar

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|, \quad (3)$$

viz obr. 2 vpravo.

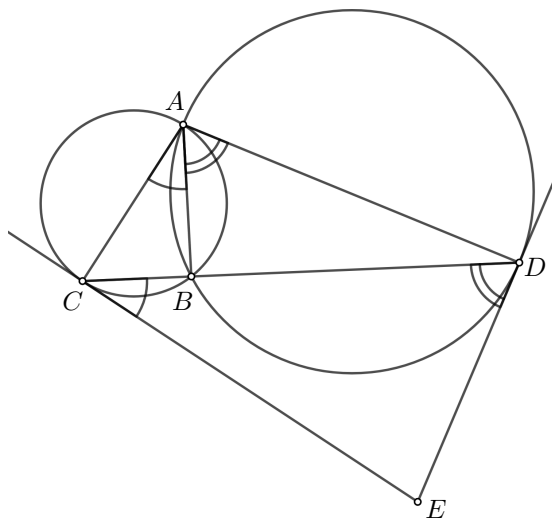
Poznámka. Při důkazech rovností (2) a (3) (jako nutných podmínek) vystačíme s podobnostmi dvojice trojúhelníků VAC a VDB , popř. PAB a PDC , resp. s příslušnými podobnostními poměry.

V následující části uvedeme ukázky použití těchto tří metod (postupů) při řešení konkrétních důkazových planimetrických úloh.

Příklad 1

Dvě kružnice se protínají v bodech A a B ($A \neq B$). Bodem B prochází přímka, která protíná obě kružnice v bodech C a D ($C \neq B \neq D$), viz obr. 3. V bodech C a D jsou sestrojeny tečny k oběma kružnicím, které se protínají v bodě E . Dokažte, že body A , C , D a E leží na téže kružnici.

Řešení. Užitím věty o shodnosti obvodového a úsekové úhlu pro kružnici opsanou trojúhelníku ABC a její tětivu BC obdržíme $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCE|$. Analogicky pak, pro tětivu BD kružnice opsané trojúhelníku ABD platí $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BDE|$, viz obr. 3.



Obr. 3

Pro velikost vnitřního úhlu při vrcholu E čtyřúhelníku $ADEC$ pak platí

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CED| &= 180^\circ - (|\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle EDC|) = \\ &= 180^\circ - (|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCE| = 180^\circ - |\sphericalangle CAD|, \end{aligned}$$

což (po snadné úpravě) odpovídá přímo podmínce (1) z věty 1. Tím je důkaz ukončen.

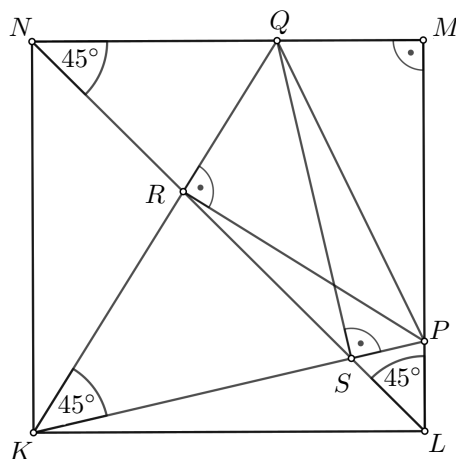
Příklad 2

V rovině je dán čtverec $KLMN$. Uvnitř jeho stran LM a MN jsou zvoleny po řadě body P a Q tak, že $|\sphericalangle PKQ| = 45^\circ$. Úhlopříčka LN daného čtverce protíná úsečky KP a KQ po řadě v bodech S a R .

- Dokažte, že body P , Q , R , S a M leží na téže kružnici.
- Dokažte, že obsah trojúhelníku KSR je roven obsahu čtyřúhelníku $PQRS$.

Řešení.

- Dokážeme, že pětiúhelník $PMQRS$, viz obr. 4, je tětiový.



Obr. 4

Vzhledem k tomu, že jeho vnitřní úhel při vrcholu M je pravý, lze očekávat, že kružnice opsaná uvedenému pětiúhelníku je Thaletova kružnice, jejímž průměrem je úsečka PQ . Je tedy třeba dokázat, že oba úhly PRQ a PSQ jsou pravé.

Nejprve dokážeme, že oba čtyřúhelníky $KNQS$ a $KLPR$ jsou tětiové.

K důkazu těchto tvrzení využijeme první z uvedených postupů. Úhlopříčky čtverce svírají s jeho stranami úhel velikosti 45° , proto platí

$$|\sphericalangle SNQ| = |\sphericalangle SKQ| = 45^\circ = |\sphericalangle PKR| = |\sphericalangle PLR|,$$

což však znamená, že úsečku SQ vidíme z bodů N a K , které leží v téže polorovině vyřaté přímkou SQ , pod stejným úhlem, tj 45° . Analogicky, úsečku PR vidíme pod úhlem 45° z bodů K a L , které leží v téže polorovině vyřaté přímkou PR , a proto jsou oba čtyřúhelníky $KSQN$ a $KLPR$ tětivové.

Protože $|\sphericalangle KLP| = |\sphericalangle QNK| = 90^\circ$, platí podle (1) v tětivových čtyřúhelnících $KSQN$, $KLPR$

$$|\sphericalangle KLP| = |\sphericalangle PRK| = |\sphericalangle PRQ| = 90^\circ$$

$$|\sphericalangle QNK| = |\sphericalangle QSK| = |\sphericalangle QSP| = 90^\circ,$$

což dokazuje tvrzení této části. (Úsečky PR a QS jsou tak výškami z vrcholů P a Q v trojúhelníku KPQ .)

b) Podle věty 2 v tětivovém čtyřúhelníku $PQRS$ platí rovnost $|\sphericalangle KPQ| = |\sphericalangle KRS|$, a trojúhelníky KPQ a KRS jsou tedy podle věty *uu* podobné. Jejich poměr podobnosti je přitom roven $2 : \sqrt{2}$, neboť oba pravoúhlé trojúhelníky KPR a KQS jsou rovnoramenné (s přeponami po řadě KP a KQ). Čtyřúhelníky $KNQS$ a $KLPR$ jsou podle části a) tětivové, takže podle věty 1 v nich platí $45^\circ = |\sphericalangle KLR| = |\sphericalangle KPR|$ a také $45^\circ = |\sphericalangle KNS| = |\sphericalangle KQS|$. S ohledem na výše uvedený poměr ($2 : \sqrt{2}$) podobnosti trojúhelníků KPQ a KRS je obsah prvního z nich dvakrát větší než obsah druhého trojúhelníku, tj. obsah trojúhelníku KSR je roven obsahu čtyřúhelníku $PQRS$, což jsme měli dokázat.

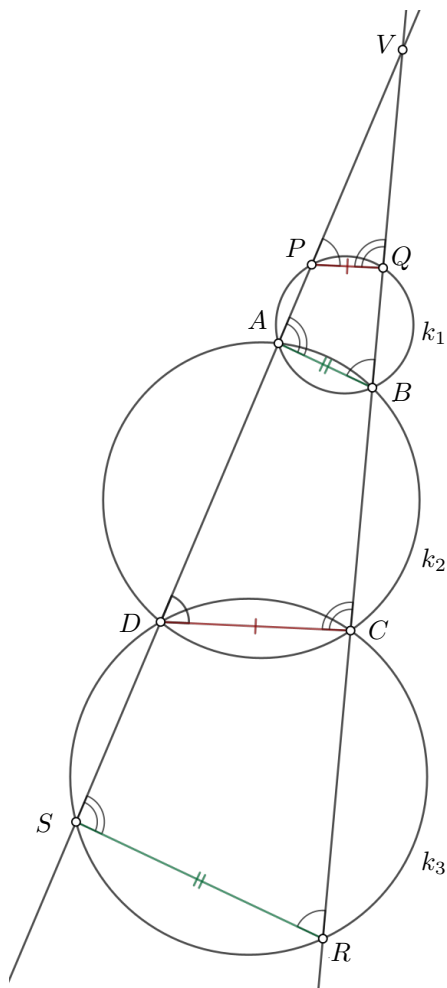
Příklad 3 (Sněhulák)

V rovině je dán konvexní úhel s vrcholem V . Uvažujme trojici kružnic k_1 , k_2 a k_3 situovaných stejně jako na obr. 5. Dokažte, že průsečíky P , Q kružnice k_1 a průsečíky R , S kružnice k_3 s rameny daného úhlu, viz obr. 5, leží na téže kružnici.

Řešení (užitím věty 2). Uvažujme označení průsečíků kružnic k_1 , k_2 , k_3 s rameny daného úhlu stejně jako na obr. 5. Opakovaným užitím věty 2 máme

$$|\sphericalangle VPQ| = |\sphericalangle QBA| = |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle CRS|,$$

což podle téže věty znamená, že čtyřúhelník $PQRS$ je tětivový.



Obr. 5

Jiné řešení (užitím mocnosti bodu ke kružnici). Ze vztahu (2) pro vnější bod V kružnic k_1, k_2, k_3 dostáváme po řadě $|VP| \cdot |VA| = |VQ| \cdot |VB|$, $|VA| \cdot |VD| = |VB| \cdot |VC|$, $|VD| \cdot |VS| = |VC| \cdot |VR|$, odkud plyne

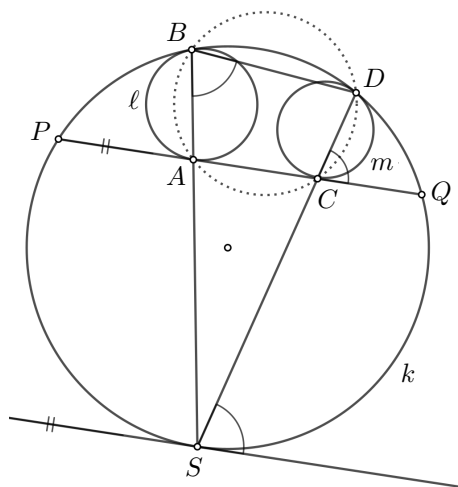
$$\frac{|VP|}{|VQ|} = \frac{|VB|}{|VA|} = \frac{|VD|}{|VC|} = \frac{|VR|}{|VS|}. \quad (4)$$

Z rovnosti obou krajních výrazů ve (4) po úpravě dostáváme $|VP| \cdot |VS| = |VQ| \cdot |VR|$, což podle (2) dokazuje, že body P , Q , R a S leží na téže kružnici.

Poznámka. Za pozornost zde stojí také skutečnost, že dvojice přímek PQ , CD a AB , RS jsou *rovnoběžné*, kdežto každá dvojice „sousedních“ přímek PQ , AB , CD a RS (obr. 5) jsou tzv. *antirovnoběžné*, neboť platí také $|\sphericalangle VQP| = |\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DSR|$, tj. $\Delta VPQ \sim \Delta VBA \sim \Delta VDC \sim \Delta VRS$. Stejnou vlastnost (jsou antirovnoběžné) mají např. také strany *ortického* trojúhelníku daného *ostroúhlého* trojúhelníku vzhledem k jeho stranám.

Příklad 4

Je dána kružnice k a její tětiva PQ . Uvažujme kružnice ℓ , m , které obě leží v téže polorovině vyřatě přímkou PQ tak, že každá z nich se dotýká jak tětivy PQ , tak i zevnitř kružnice k . Dokažte, že obě dvojice A , B a C , D dotykových bodů kružnic ℓ a m po řadě s tětivou PQ a s kružnicí k leží na téže kružnici, viz obr. 6.



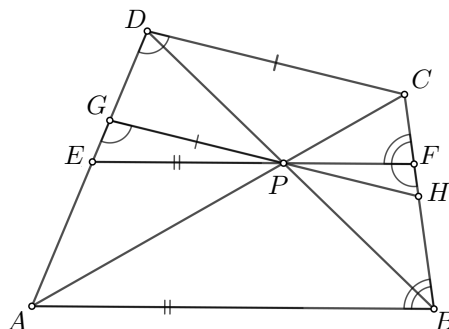
Obr. 6

[*Návod k řešení.* Dotykové body B a D obou menších kružnic ℓ a m s kružnicí k , jsou středy stejnoolehlostí, které zobrazují po řadě kružnice ℓ a m na kružnici k . Dotykové body A a C kružnic ℓ a m s tětivou PQ kružnice k se proto zobrazují na takový bod kružnice k , pro který tečna sestrojená

v odpovídajícím obraze bodu A , resp. C , je *rovnoběžná* s tětivou PQ . Takový bod je pro obrazy bodů A a C v obou stejnolehlostech společný a je jím střed S kružnicového oblouku PQ kružnice k , na němž neleží středy B a D obou uvažovaných stejnolehlostí. Trojice bodů B, A, S , resp. D, C, S , leží tudíž na přímkách procházejících bodem S . Závěrem využijte větu o shodnosti obvodového a úsekového úhlu a větu 2.]

Příklad 5 (viz [2, Problem E5])

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž strany AB a CD nejsou rovnoběžné a P značí je průsečík jeho úhlopříček. Rovnoběžka s AB , která prochází bodem P , protíná strany AD, BC po řadě v bodech E, F . Podobně rovnoběžka s CD , která prochází průsečíkem P , protíná strany AD, BC po řadě v bodech G, H . Pokud platí $|PE| \cdot |PF| = |PG| \cdot |PH|$, je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový (obr. 7). Dokažte.



Obr. 7

[*Návod k řešení.* Užitím vztahu (3) nejprve ukažte, že čtyřúhelník $EHFG$ je *tětivový* – bod P je průsečík jeho úhlopříček EF a GH . Užitím vlastnosti obvodových úhlů (1. metoda) dále ukažte, že $|\sphericalangle HFE| = |\sphericalangle EGH|$. Závěrem využijte souhlasné úhly ve dvojicích přímek $AB \parallel EF$ a $CD \parallel GH$ a vztah (1), viz obr. 7.]

Literatura

- [1] Horák, S.: Kružnice. Škola mladých matematiků, sv. 16. Nakl. Mladá fronta, Praha, 1966.
- [2] Monk, D.: New Problems in Euclidean Geometry. United Kingdom Mathematics Trust, 2009.