

Další vlastnosti netranzitivních ruletek

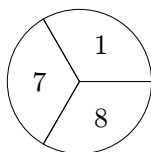
PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, POLSKO

V práci [1] jsme zkoumali trojice netranzitivních ruletek s n sektory a ukázali, jak z takové trojice vytvořit trojici netranzitivních ruletek s $(n + 2)$ sektory. Vzhledem k tomu, že bylo možné uvedený postup libovolně opakovat, odvodili jsme metodu, jak získat trojice netranzitivních ruletek s libovolně mnoha sektory.

V tomto příspěvku zobecníme výchozí trojici netranzitivních ruletek jiným způsobem. Zaměříme pozornost na počet ruletek. Ukážeme si, jak lze ke skupině netranzitivních ruletek přidat další ruletku tak, aby i nově vzniklá skupina představovala skupinu netranzitivních ruletek.

Připomeňme, že ruletka je pomůcka určená k losování čísel. Zatím uvažujeme jen ruletky se stejně velkými sektory (vylosování každého z čísel na ruletce je stejně pravděpodobné). Příklad ruletky se 3 sektory je na obr. 1.



Obr. 1

Takovou 3-sektorovou ruletku lze ztotožnit s množinou $R = \{1, 7, 8\}$.

Definice 1

Soubor k navzájem disjunktních množin $(R_1, R_2, R_3, \dots, R_k)$, kde

$$|R_1| = |R_2| = |R_3| = \dots = |R_k| = n$$

a

$$R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \dots \cup R_k = \{1, 2, 3, \dots, k \cdot n\}$$

nazveme *skupinou k ruletek s n sektory*.

Vyberme dvě ruletky R_{j_1} a R_{j_2} , kde $j_1, j_2 \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ ze skupiny k ruletek. Symbolem $\{R_{j_1} \gg R_{j_2}\}$ označíme jev, že číslo vylosované pomocí ruletky R_{j_1} bude větší než číslo vylosované pomocí ruletky R_{j_2} .

Definice 2

Skupinu k ruletek $(R_1, R_2, R_3, \dots, R_k)$, nazveme *netranzitivní*, pokud existuje taková permutace $(R_{j_1}, R_{j_2}, R_{j_3}, \dots, R_{j_k})$, pro kterou platí:

$$P(R_{j_1} \gg R_{j_2}) > \frac{1}{2}, P(R_{j_2} \gg R_{j_3}) > \frac{1}{2}, \dots, P(R_{j_k} \gg R_{j_1}) > \frac{1}{2}.$$

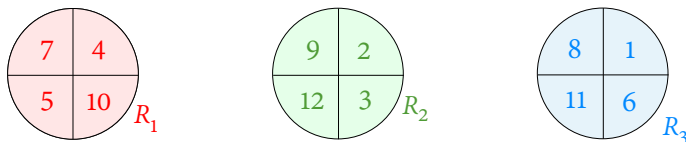
Je-li navíc

$$P(R_{j_1} \gg R_{j_2}) = P(R_{j_2} \gg R_{j_3}) = \dots = P(R_{j_k} \gg R_{j_1}) = p > \frac{1}{2},$$

říkáme, že skupina ruletek je *vyvážená*.

Příklad 1

Na obrázku 2 je skupina tří čtyřsektorových ruletek $R_1 = \{4, 5, 7, 10\}$, $R_2 = \{2, 3, 9, 12\}$, $R_3 = \{1, 6, 8, 11\}$.



Obr. 2

Losujme nejprve dvojici čísel pomocí ruletek R_1 a R_2 . Na obr. 3 jsou znázorněny všechny možné výsledky takového losování. Červeně jsou vyznačeny výsledky příznivé $\{R_1 \gg R_2\}$, zeleně výsledky příznivé jevu $\{R_2 \gg R_1\}$.

12				
9				
3				
2				
	4	5	7	10

Obr. 3

Jevu $\{R_1 \gg R_2\}$ je příznivých 9 výsledků. Vzhledem k tomu, že všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné, dostáváme, že

$$P(R_1 \gg R_2) = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}.$$

V souladu s [1] řekneme, že ruletka R_1 je *lepší* než ruletka R_2 . Analogicky lze ukázat, že

$$P(R_2 \gg R_3) = \frac{9}{16} \quad \text{a} \quad P(R_3 \gg R_1) = \frac{9}{16}.$$

Tedy ruletka R_2 je lepší než ruletka R_3 a ruletka R_3 je lepší než ruletka R_1 . Vzhledem k tomu, že

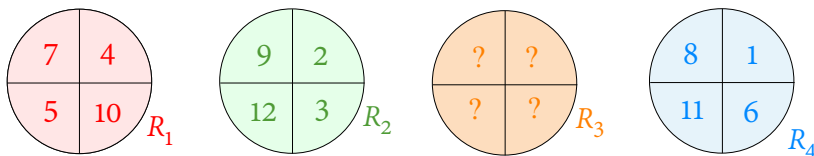
$$P(R_1 \gg R_2) = P(R_2 \gg R_3) = P(R_3 \gg R_1) = \frac{9}{16}$$

je trojice (R_1, R_2, R_3) skupinou vyvážených netranzitivních ruletek.

Nyní ukážeme, jak ze skupiny k netranzitivních n -sektorových ruletek získáme skupinu $(k+1)$ netranzitivních n -sektorových ruletek. Použijeme metodu *vložení a roztažení*.

Uvažujme skupinu (R_1, R_2, R_3) netranzitivních ruletek z příkladu 1 a vytvořme z ní skupinu čtyř netranzitivních ruletek (R_1, R_2, R_3, R_4) .

V prvním kroku („vložení“) přečísloujeme ruletky tak, že z R_3 se stane ruletka R_4 (viz obr. 4) a vložíme novou ruletku R_3 (zatím bez očíslovaných sektorů).



Obr. 4

Sektory ruletky R_3 očísloujeme (na chvíli) desetinnými čísly, z nichž každé je o 0,5 větší než čísla na sektorech ruletky R_4 , tj. $R_1 = \{4, 5, 7, 10\}$, $R_2 = \{2, 3, 9, 12\}$, $R_3 = \{1.5, 6.5, 8.5, 11.5\}$, $R_4 = \{1, 6, 8, 11\}$.

Nyní je zřejmé, že R_1 je lepší než R_2 , R_2 je lepší než R_3 , R_3 je lepší než R_4 a R_4 je lepší než R_1 .

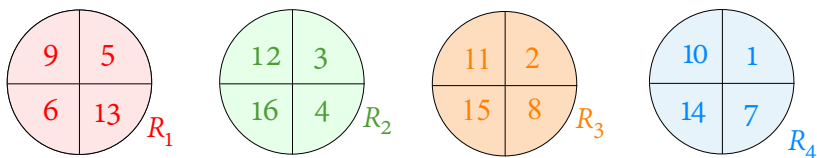
Ve druhém kroku („roztážení“) musíme přiřadit jednotlivým sektorům ruletky R_3 celočíselné hodnoty, ale tak, abychom zachovali „vztahy“ mezi

ruletkami. K tomu stačí přeznačit sektory na všech ruletkách lineárně: uspořádáme všechna čísla ze sektorů vzestupně a následně je nahradíme číslem rovným pořadí, na kterém se dané číslo nachází. Schématicky je postup znázorněn na obr. 5.

PŘED	1	1.5	2	3	4	5	6	6.5	7	8	8.5	9	10	11	11.5	12
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
PO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Obr. 5

Tímto způsobem vzniknou ruletky z obr. 6, který představuje požadovanou skupinu čtyř netrazitivních ruletek.



Obr. 6

Víme, že

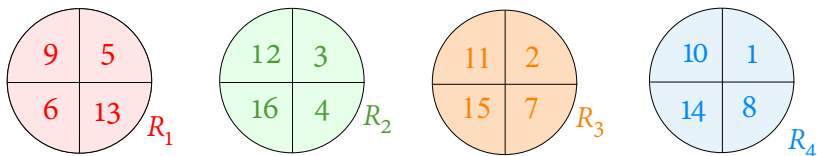
$$P(R_1 \gg R_2) = P(R_2 \gg R_3) = P(R_4 \gg R_1) = \frac{9}{16},$$

ale

$$P(R_3 \gg R_4) = \frac{10}{16},$$

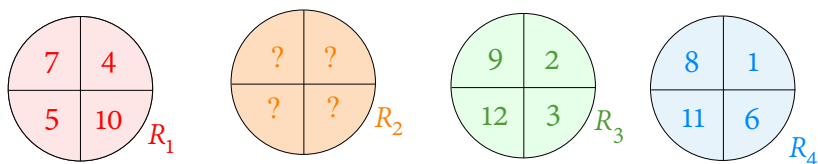
tj. tato skupina čtyř ruletek není vyvážená.

Čtenář si snadno ověří, že pokud vzájemně vyměníme čísla 7 a 8 na ruletkách R_3 a R_4 , dostaneme skupinu netranzitivních vyvážených ruletek z obr. 7.



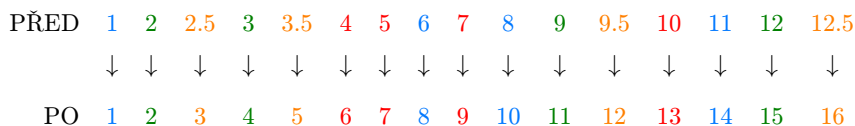
Obr. 7

Vložení nové ruletky do původního souboru netranzitivních ruletek můžeme provést i na jiném místě, tak jako na obr. 8.



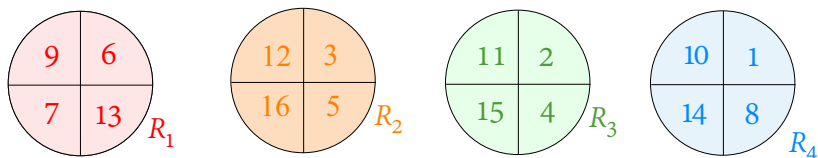
Obr. 8

Výchozí ruletky R_2 a R_3 z obr. 2 se stanou ruletkami R_3 a R_4 a pro novou ruletku R_2 najdeme očíslování sektorů. Po kroku „vložení“ máme posloupnost ruletek: $R_1 = \{4, 5, 7, 10\}$, $R_2 = \{2.5, 3.5, 9.5, 12.5\}$, $R_3 = \{2, 3, 9, 12\}$, $R_4 = \{1, 6, 8, 11\}$. Krok „roztažení“ je znázorněn na obr. 9.



Obr. 9

Tak dostaneme netranzitivní ruletky z obr. 10.



Obr. 10

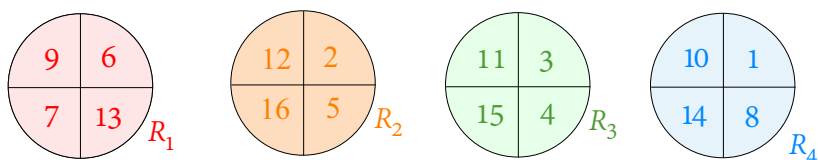
Podobně jako v předchozím příkladu není tato skupina ruletek po etapě „roztažení“ vyvážená, protože

$$P(R_1 \gg R_2) = P(R_3 \gg R_4) = P(R_4 \gg R_1) = \frac{9}{16},$$

ale

$$P(R_2 \gg R_3) = \frac{10}{16}.$$

K získání vyvážené skupiny netranzitivních ruletek stačí jen zaměnit sektory s čísly 2 a 3. Tak vznikne skupina (viz obr. 11), která již má požadované vlastnosti.



Obr. 11

Samozřejmě, že lze tuto metodu používat opakovaně a získat libovolný počet netranzitivních ruletek se stejným počtem sektorů, jako mají výchozí ruletky. Spojení metod z článku [1] a z této práce umožňuje vygenerovat libovolně velkou skupinu vyvážených netranzitivních ruletek s libovolným počtem sektorů.

Literatura

- [1] *Thustý, P., Krech, I.*: O netranzitivních ruletkách. MFI, roč. 35 (2026), č. 2, s. 91–96.
- [2] *Schaefer, A., Schweig, J.*: Balanced nontransitive dice. The College Mathematics Journal, roč. 48 (2017), č. 1, s. 10–16.
- [3] *Savage, R. P.*: The Paradox of Nontransitive Dice. The American Mathematical Monthly, roč. 101 (1994), č. 5, s. 429–436.
- [4] *Rump, C. M.*: Strategies for Rolling the Efron Dice. Mathematics Magazine, roč. 74 (2001), č. 3, s. 212–216.