

Zajímavé matematické úlohy

V dalším čísle našeho časopisu pokračujeme v pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh 311 a 312. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 12. 2026 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

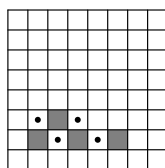
Úloha 311

Určete velikosti vnitřních úhlů všech lichoběžníků $ABCD$ s delší základnou AB , které lze „rozřezat“ na dva rovnoramenné trojúhelníky.

Jaroslav Švrček

Úloha 312

V tabulce je obarveno několik polí. V každém kroku vybereme všechna neobarvená pole, která mají obarveny aspoň dvě strany, a tato pole obarvíme. Určete nejmenší možný počet m polí, která musíme na začátku obarvit, aby po několika krocích byla obarvena celá tabulka. Pro toto m určete nejmenší a největší počet kroků, po nichž to může nastat. (Např. budou-li na počátku obarvena čtyři pole na obrázku vpravo, potom v prvním kroku obarvíme čtyři pole označená tečkou.)



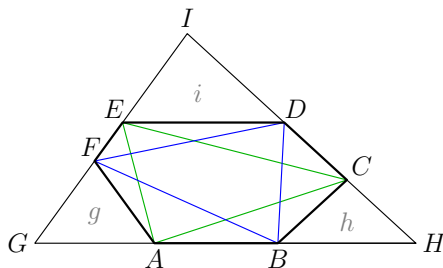
Pavel Calábek

V následující části uvádíme řešení úloh 307 a 308, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle aktuálního (35.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 307

Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má protější dvojice stran rovnoběžné. Dokažte, že trojúhelníky ACE a BDF mají stejné obsahy.

Josef Tkadlec



Řešení (autorské). Označme průsečíky přímek EF , AB , CD podle obrázku G , H , I . Přímký GH (resp. AB) a ED jsou rovnoběžné, trojúhelník EDI je tak podobný s trojúhelníkem GHI v poměru $i : 1$, podobně je trojúhelník GAF podobný s trojúhelníkem GHI v poměru $g : 1$ a trojúhelník BHC je s ním podobný v poměru $h : 1$, kde i , g , h jsou kladná reálná čísla menší než 1.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že trojúhelník GHI má jednotkový obsah, tedy $S_{GHI} = 1$. Výška trojúhelníku EGA ke straně EG je g -násobkem výšky trojúhelníku GHI ke straně GI , délka jeho strany EG je $(1 - i)$ -násobkem délky strany IG , obsah S_{EGA} trojúhelníku EGA je tak roven

$$S_{EGA} = g(1 - i)S_{GHI} = g(1 - i).$$

Podobně jsou obsahy S_{AHC} a S_{CIE} trojúhelníků AHC a CIE rovny

$$S_{AHC} = h(1 - g),$$

$$S_{CIE} = i(1 - h).$$

Obsah S_{ACE} trojúhelníku ACE je tak roven

$$\begin{aligned} S_{ACE} &= S_{GHI} - S_{EGA} - S_{AHC} - S_{CIE} = \\ &= 1 - g(1 - i) - h(1 - g) - i(1 - h) = \\ &= 1 - (g + h + i) + (gh + hi + ig). \end{aligned}$$

Podobně pro obsahy trojúhelníků FGB , BHD , DIF platí

$$S_{FGB} = g(1 - h),$$

$$S_{BHD} = h(1 - i),$$

$$S_{DIF} = i(1 - g).$$

Obsah trojúhelníku BDF je tak roven

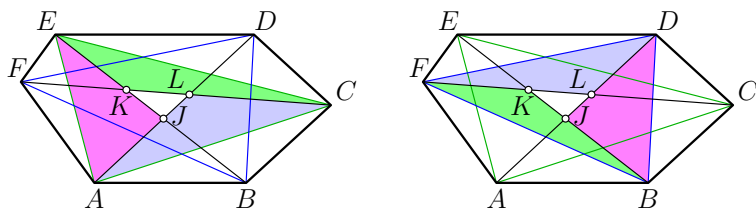
$$\begin{aligned} S_{BDF} &= S_{GHI} - S_{FGB} - S_{BHD} - S_{DIF} = \\ &= 1 - g(1 - h) - h(1 - i) - i(1 - g) = \\ &= 1 - (g + h + i) + (gh + hi + ig). \end{aligned}$$

Vidíme, že obsahy trojúhelníků ACE a BDF si rovny, jak jsme měli dokázat.

Jiné řešení (podle Bartosze Wieczorka). Podobně jako v předcházejícím řešení označme $S_{XY\dots}$ obsah mnohoúhelníku $XY\dots$. Dále označme J, K, L po řadě průsečíky úhlopříček AD a BE , BE a CF , CF a AD . Předpokládejme, že stejně jako na obrázku je trojúhelník JKL v polorovině ADE (v opačném případě stačí vrcholy přeznačit tak, že místo šestiúhelníku $ABCDEF$ uvažujeme šestiúhelník $DEFABC$). Potom platí

$$\begin{aligned} S_{ACE} &= S_{JKL} + S_{ACL} + S_{CEK} + S_{EAJ}, \\ S_{BDF} &= S_{JKL} + S_{DFL} + S_{BFK} + S_{BDJ}. \end{aligned}$$

Aby platilo dokazované tvrzení, stačí ukázat, že obsahy odpovídajících trojúhelníků ACL a JKL , CEK a BFK , EAJ a BDJ jsou shodné.



To opravdu platí. Pro první dvojici to plyne z faktu, že čtyřúhelník $ACDF$ je lichoběžník se základnami CD a AF , obsahy trojúhelníků ACD a FCD jsou tak shodné, tedy jsou shodné i obsahy trojúhelníků ACL a DFL , které vzniknou odebráním jejich průniku, tj. společného trojúhelníku CDL .¹⁾ Podobně to platí i pro zbývající dvojice trojúhelníků.

Správná řešení zaslali: *Michał Fronczek a Bartosz Wieczorek*, oba II LO SS Tarnowskie Góry (Polsko),

Neúplné řešení zaslala *Johanka Pouchová*, G Plzeň, Mikulášské nám.

Úloha 308

Kolika způsoby je možno uspořádat přirozená čísla $1, 2, \dots, n$ do kruhu tak, aby každé číslo bylo dělitelem součtu svých dvou sousedních čísel. Takové způsoby, které lze získat jeden z druhého otočením nebo osovou souměrností, považujeme za jeden způsob. Úlohu řešte pro a) $n = 2025$, b) $n = 2026$.

Jaroslav Zhouf

¹⁾Viz např. článek Motýlí křídla v lichoběžníku L Juklové a J. Švrčka v prvním čísle 34. ročníku našeho časopisu.

Řešení.

a) Sudá čísla dělí jen sudá čísla, pokud by se v kruhu vedle sebe nacházela dvě sudá čísla, musela by tak vedle nich být jen sudá čísla. V kruhu by se tak nacházela jen sudá čísla, což je spor. Vedle každého sudého čísla se tedy musí nacházet dvě čísla lichá.

Mezi přirozenými čísly do 2025 se nachází 1012 sudých čísel a 1013 lichých, při rozmístění čísel do kruhu se proto budou nacházet v jednom místě vedle sebe dvě lichá čísla a ve zbytku se budou lichá a sudá čísla střídát.

Nejprve předpokládejme, že se vedle sebe nachází čísla 2025 a 2024. Jelikož zbývající čísla v kruhu jsou menší než 2025, musí být před číslem 2025 číslo 1. Nejmenší větší číslo než 2024, které je dělitelné číslem 2024, je číslo 4048, vedle čísla 2024 se tak z druhé strany musí nacházet číslo 2023.

Obecně, nechť jsou čísla v kruhu v pořadí

$$\dots, 1, 2025, 2024, \dots, k+1, k, \dots$$

Vpravo vedle čísla k se musí nacházet nějaké číslo menší a součet tohoto čísla s číslem $k+1$ musí být dělitelný k , jediná možnost pro součet je $2k$ a vedle čísla k tak je $k-1$. Proto jsou čísla do kruhu uspořádána v klesajícím pořadí

$$\dots, 1, 2025, 2024, 2023, 2022, \dots$$

Nechť nyní nejsou v kruhu čísla 2024 a 2025 vedle sebe. Předpokládejme, že číslo 2023 neleží vedle čísla 2024. Čísla 2023 a 2025 nemohou ležet vedle sebe, protože by čísla v kruhu byla uspořádána

$$\dots, 2025, 2023, 2021, \dots,$$

a tedy by ležela vedle sebe tři lichá čísla. Aby lichá čísla 2023 a 2025 dělila sudé číslo, musí být toto číslo aspoň 4046. Jelikož vedle těchto čísel leží čísla menší než 2023, je jejich součet menší než 4046. Proto součet čísel vedle nich musí být lichý, a tedy vedle nich musí ležet jedno číslo sudé a jedno liché. Jsme tedy v situaci, kdy se na dvou místech vedle sebe objeví dvě lichá čísla. Tudíž 2024 a 2023 se v kruhu nacházejí vedle sebe.

Z podobných důvodů jako výše jsou čísla v kruhu uspořádána

$$\dots, 1, 2024, 2023, \dots, k+1, k.$$

Součet čísel vedle k musí být dělitelný k , pokud by vpravo bylo číslo menší než k , je jedinou možností pro součet $2k$ a číslo vpravo od k je $k-1$.

Ještě je možné, že by vpravo vedle k stálo 2025, pak by součet jeho sousedů byl různý od $2k$, tedy by byl aspoň $3k$ a muselo by tak platit

$$k + 1 + 2025 \geq 3k, \quad \text{tj. } k \leq 1013.$$

Proto jsou čísla v kruhu uspořádána

$$\dots, 1, 2024, 2023, \dots, 1014, 1013.$$

Pokud by vpravo vedle čísla 1013 bylo 1012, potom by se v úseku $1012, \dots, 1$ nacházela kromě čísla 2025 jen čísla nejvýše rovna 2012, součet žádných dvou z nich ovšem nepřevyšší 2025, tedy 2025 by nemohlo dělit součet svých sousedů. Proto vedle čísla 1013 musí být číslo 2025, vedle něj pak 1012, vedle 1011, a dále už musí bez výjimek posloupnost klesat. Další vyhovující uspořádání čísel tak je

$$\dots, 1, 2024, 2023, \dots, 1014, 1013, 2025, 1012, 1011, \dots$$

a žádná jiná pořadí neexistují.

b) Jak víme z části a), vedle každého sudého čísla musí stát dvě čísla lichá. Mezi čísla $1, 2, \dots, 2026$ je stejný počet sudých a lichých čísel, tedy i vedle libovolného lichého čísla musí stát dvě čísla sudá. Vedle čísla 2025 tak musí stát 2026 a 2024, stejnými úvahami jako výše získáme jediné možné pořadí

$$\dots, 1, 2026, 2025, 2024, \dots$$

Správná řešení zaslal *Michał Fronczek*, II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

Pavel Calábek