Prostorové analogie dvou planimetrických vět

JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V matematické literatuře se hojně setkáváme s analogiemi geometrických tvrzení v rovině a v prostoru. Nejznámější příklady najdeme mezi analogickými tvrzeními platnými v trojúhelníku a ve čtyřstěnu, které jsou nejjednoduššími omezenými rovinnými a prostorovými útvary (tělesy). Jejich hranici tvoří v případě trojúhelníku úsečky (strany) a v případě čtyřstěnu trojúhelníky (stěny). Jedná se tzv. *simplexy* v rovině a v prostoru. Mezi nejobvyklejší analogie patří metrické a polohové vlastnosti těžnic a těžiště v trojúhelníku a ve čtyřstěnu. Mnoho dalších příkladů lze najít např. ve zdařilé publikaci [1].

V tomto příspěvku se zaměříme na méně známé prostorové analogie dvou významných planimetrických tvrzení, které se týkají pravoúhlého trojúhelníku, a to na prostorovou analogii Pythagorovy věty a dále na analogii jisté množiny bodů v rovině, kterou je tzv. Thaletova kružnice. První z nich je spjata se jménem německého matematika *Johannese Faulhabera* (1580–1635) a druhá se jménem významného českého matematika *Miroslava Fiedlera*[1]. Uveďme nejprve pro úplnost znění obou výše zmíněných planimetrických vět, které je možno nalézt v téměř každé učebnici geometrie pro základní a střední školy.

[1]Prof. RNDr. Miroslav Fiedler, DrSc. (1926), vědecký pracovník Matematického ústavu AV ČR v Praze.

Věta 1 (Pythagorova)

Nechť a, b jsou délky odvěsen a c délka přepony v libovolném pravoúhlém trojúhelníku. Pak platí

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Existuje poměrně velké množství odlišných důkazů Pythagorovy věty, naši čtenáři se s některými z nich mohli setkat např. v článku [3]. Nejsnazší je však patrně využití Eukleidových vět o odvěsnách pravoúhlého trojúhelníku.

Připomeňme ještě, že platí rovněž věta obrácená k větě Pythagorově. Tu využíváme především k tomu, abychom rozhodli, zda trojúhelník s danými délkami stran je pravoúhlý či nikoliv.

Druhé planimetrické tvrzení, které se týká speciální množiny bodů dané vlastnosti v rovině, má následující znění:

Věta 2 (Thaletova)

V rovině je dána úsečka AB. Množina všech bodů C této roviny, pro něž je ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, je kružnice sestrojená nad úsečkou AB jako průměrem – s výjimkou obou krajních bodů uvažovaného průměru (tzv. Thaletova kružnice).

Také k důkazu této věty lze přistoupit různými způsoby. Jejich základem je běžné využití vlastností vnitřních úhlů v rovnoramenných trojúhelnících.

Nejprve se budeme zabývat prostorovou analogií Pythagorovy věty. Uvažujme pravoúhlý čtyřstěn (někdy též pravoúhlý trojhran) $ABCD$, v němž jsou hrany vycházející z vrcholu D navzájem kolmé. Označme S_A, S_B, S_C a S_D po řadě obsahy jeho stěn BCD, CAD, ABD a ABC, viz obr. Pak platí následující tvrzení:

Věta 3 (Faulhaberova)

V libovolném pravoúhlém čtyřstěnu $ABCD$ s pravými úhly ve stěnách čtyřstěnu u vrcholu D platí při výše uvedeném označení obsahů jeho stěn

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D^2.$$

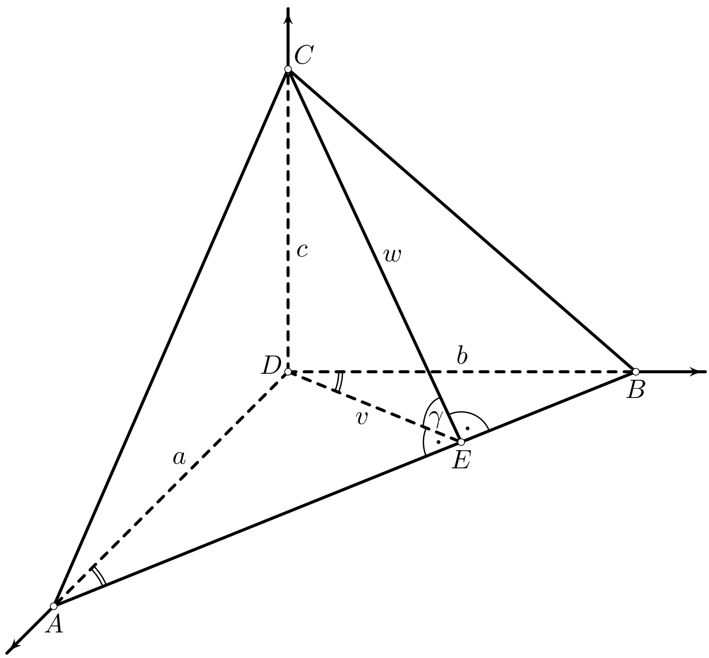
V publikaci [2] soustředil její autor pět různých důkazů této věty. V tomto příspěvku uvedeme jiný důkaz Faulhaberovy věty, který se opírá o následující goniometrickou identitu.

Lemma

Nechť α, β, γ jsou po řadě odchylky rovin BCD, CAD, ABD od roviny ABC v pravoúhlém čtyřstěnu $ABCD$ s pravými úhly v jeho stěnách u vrcholu D. Pak platí

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Důkaz. Uvažujme pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D, který (pro lepší názornost) umístíme do kartézského souřadnicového systému s osami x, y, z tak, že vrchol D ztotožníme s počátkem systému souřadnic a vrcholy A, B, C umístíme po řadě na kladné poloosy x, y, z. Dále nechť $|AD| = a$, $|BD| = b$ a $|CD| = c$.



Označme E patu výšky z vrcholu D v pravoúhlém trojúhelníku ABD. Snadno vidíme, že rovina DCE je kolmá k oběma rovinám ABD i ABC, tudíž pro odchylku γ rovin ABD a ABC platí $\gamma = |\sphericalangle DEC|$. Nechť $|ED| = v$ a $|EC| = w$ a dále v pravoúhlém trojúhelníku ABD označme

$$\varphi = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BDE|.$$

Z podobných pravoúhlých trojúhelníků ADE a DBE pak plyne

$$\frac{v}{a} = \sin\varphi \qquad \text{a} \qquad \frac{v}{b} = \cos\varphi.$$

Umocněním obou stran posledních dvou rovností na druhou, jejich sečtením a využitím goniometrické identity $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ po snadné úpravě dostaneme

$$v^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku CDE s přeponou EC a využitím poslední rovnosti pak máme

$$w^2 = v^2 + c^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + c^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2+b^2}$$

a odtud

$$\cos^2\gamma = \frac{v^2}{w^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}. \tag{1}$$

Užitím principu cyklické záměny dále obdržíme

$$\cos^2\alpha = \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \tag{2}$$

$$\cos^2\beta = \frac{c^2a^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}. \tag{3}$$

Sečtením vztahů (1)–(3) konečně dostaneme

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$$
$$= \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + \frac{c^2a^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = 1.$$

Tím je důkaz lemmatu uzavřen.

Poznámka. Dosadíme-li do naší identity za $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, za $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$ a za $\cos^2\gamma = 1 - \sin^2\gamma$, dostaneme navíc po snadné úpravě jinou identitu (ekvivalentní s danou)

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$$

Nyní již můžeme přikročit k vlastnímu *důkazu* Faulhaberovy věty.

Předně si uvědomme, že platí (viz obr.)

$$S_A = S_D \cos\alpha, \qquad S_B = S_D \cos\beta, \qquad S_C = S_D \cos\gamma$$

Umocněním každé z těchto tří rovností na druhou, jejich sečtením a užitím dokázaného lemmatu dostaneme bezprostředně

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D^2 \cos^2\alpha + S_D^2 \cos^2\beta + S_D^2 \cos^2\gamma =$$
$$= S_D^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = S_D^2,$$

což jsme chtěli dokázat.

Prostorová analogie věty 2 (o Thaletově kružnici) se objevila ve školním roce 1971/72 v tehdejším 50. ročníku časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální jako soutěžní úloha v jeho pravidelné řešitelské rubrice „Naše soutěž“. Autorem této úlohy byl *Miroslav Fiedler*. Uveďme nyní modifikovanou verzi této úlohy ve formě matematického tvrzení.

Věta 4

V rovině ρ je dána kružnice $k(S; r)$. Množina všech bodů prostoru, které jsou vrcholy pravoúhlého čtyřstěnu (trojhranu) $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D a dále s vlastností, že k je kružnicí vepsanou stěně ABC, je kulová plocha $\kappa(S; r\sqrt{2})$ s vyjmutou hlavní kružnicí v rovině ρ.

Zhruba za rok po zveřejnění této úlohy se ukázalo, že tato úloha byla nad síly většiny řešitelů z řad středoškoláků (vyřešil ji jediný soutěžící). V čísle 5 následujícího ročníku, viz [4], bylo s odstupem jednoho roku uvedeno autorovo řešení této úlohy, které využívá prostředků analytické geometrie a metody souřadnic a které je početně poměrně náročné.

Zájemce o uvedenou problematiku si proto dovolujeme vyzvat k tomu, aby se samostatně pokusili o důkaz věty 4 jinými prostředky než užitím analytické geometrie v prostoru. Vaše řešení, která zašlete do redakce MFI, rádi zveřejníme.

Literatura

[1] *Erdnijev, P. M.*: Srovněnije i obobščenije pri obučeniji matematike (rusky). Učpedgiz, Moskva, 1960.

[2] *Kuřina, F.*: Matematika a řešení úloh. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, České Budějovice, 2011.

[3] *Pradlová, J.*: Patnáct důkazů Pythagorovy věty. MFI, roč. 10 (2000/01), č. 6, 7, 8.

[4] Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 51 (1972/73), č. 5, s. 230–232.