Souvislosti v matematice

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

I když to z výuky matematiky není vždycky patrné, pravý smysl matematického vzdělání je v tom, abychom za pomoci matematiky dovedli řešit praktické problémy. K tomu potřebujeme dvě věci, znát matematiku a vědět, jak ji používat – a umět to. Proto se žáci a studenti vzdělávají v matematice, a to na úrovni a v zaměření příslušného stupně a typu školy. Uvedené pořadí je samozřejmé, abych matematické znalosti mohl používat, musím je mít, a abych je měl, musím se je naučit a naučit se také to, jak je použít. Nejprve tedy několik myšlenek o průběhu výuky.

Z dálky se matematika jeví jako jeden celek a skutečně to jeden celek je. Když však žáci začínají do matematiky vnikat, tak po čase (už v nižších ročnících ZŠ) objevují, že se matematika nějak rozpadá na části. Nejprve se setkávají s algebrou a geometrií, jak tyto dvě části pro jednoduchost nazýváme, přičemž se obě tyto části často učí souběžně, avšak v různých vyučovacích hodinách v různých dnech v týdnu a na algebru a geometrii mívají žáci různé sešity. Mnohdy tak mohou mít pocit, že jde vlastně o dva různé, i když navzájem související školní předměty, skryté spolu pod formálním názvem *matematika*. Je na učiteli, aby spojkou mezi algebrou a geometrií nebyla jen jeho osobnost vyučujícího, ale aby při své výuce řešením vhodně volených úloh neformálně propojoval obě tyto části v myslích a zkušenostech žáků.

S postupem „od primy do oktávy“ proces „rozpadu“ školské matematiky formálně dále pokračuje. Studenti (samozřejmě i studentky, ale dále jen „studenti“) začínají zjišťovat, že se matematika dále rozděluje na jakési relativně samostatné části; nahrávají tomu i samostatné učebnice, každá z nichž se zabývá něčím jiným. Opět je na vyučujícím, aby tuto zdánlivou izolaci narušoval.

Je pravda, že v matematice sice existují takové jakoby relativně samostatné disciplíny, ale na druhé straně v ní existují, fungují a jsou významné spousty základních souvislostí a vazeb mezi poznatky, někdy i docela nečekaných. Pro úspěšné zvládnutí matematiky by se proto měl student s takovými souvislostmi a vazbami neformálně setkávat zejména při řešení úloh, a uvědomovat si je. Jde o to, aby se v jeho mysli nové poznatky správně a ve všech základních souvislostech sřetězovaly a zapojovaly do vytvářeného systému „jeho“ matematiky, a konečným výsledkem aby bylo jeho *celistvé matematické vzdělání na úrovni a v zaměření školy.* V tomto procesu, má-li být úspěšný, je třeba dodržovat určitá pravidla, zdají se samozřejmá, ale jsou učitelé, kteří pomíjejí realitu, že v jejich třídě nesedí sami Gaussové, ale i děti, kterým chvíli trvá, než do probíraného učiva proniknou.

Začne-li se probírat nová látka, je prvním cílem, aby studenti tuto látku pochopili a pak aby se ji naučili používat. Proto by mělo být zásadou, že *úvodní úlohy (příklady) nejsou příliš obtížné a jsou zaměřeny přímo na tuto látku* a její základní problémy. Soustředění řešitele na tuto látku a na její pochopení by neměly narušovat nějaké jiné (pro tuto látku nepodstatné) problémy zbytečně přimíchané do zvolených úloh. Uveďme jen drobný příklad. Začnou se probírat rovnice s parametrem a hned do prvních úloh nasází učitel plno zlomků (možná v dobé vůli, aby práci se zlomky zopakoval), ale při souboji se zlomky může žákovi unikat význam parametru, nebo u těch „slabších“ může dokonce dojít k falešnému spojení, že k rovnicím s parametrem přináležejí zlomky.

Až v následující etapě výuky, po zvládnutí podstaty toho nového, se pak do úloh přidává vhodné matematické okolí, látka se rozšiřuje, nastupují další varianty nového učiva s různou obtížností a nakonec přicházejí úlohy, v nichž nová látka je už jen jednou ze složek jejich řešení. Přitom obtížnost úloh by měla být přiměřená matematické úrovni studentů a lépe je hodně obtížné úlohy při výuce vůbec nepoužívat, snad jen jako dobrovolnou domácí úlohu pro „jedničkáře“.

Součástí tohoto procesu musí být ze strany učitele uvědomělé připomínání a využívání souvislostí a vztahů s dalšími, již dříve probranými tematickými celky. Nejde jen o „vracení se k předchozímu učivu“, to jistě ano, je to důležité, ale v návaznosti na předchozí postup mají přicházet neformální kombinované úlohy, které cíleně narušují onu zdánlivou izolovanost jednotlivých tematických celků. Řečeno pozitivně, je třeba soustavně a uvědoměle pěstovat jejich vzájemné vztahy, a nato pak i vztahy s jinými vědami a s praxí.

Některé takové vztahy jsou zcela samozřejmé, například v úlohách na řešení trojúhelníku se mohou propojovat jeho planimetrické vlastnosti s goniometrií, také třeba kombinatorika a pravděpodobnost k sobě mají v úlohách blízko. V učebnicích a sbírkách příkladů nalezneme mnoho vhodných úloh, ale chce-li učitel použít i některé jiné vztahy, může občas nějakou potřebnou úlohu sám vytvořit. V další části článku nyní různé takové matematické souvislosti připomínáme a komentujeme.

Úloha 1

Stanovte definiční obor funkce

$$f\colon y = \frac{1}{\log \dfrac{2x-1}{x+3}}.$$

Komentář: Úlohy na definiční obor funkcí spojují učivo o funkcích s řešením rovnic a nerovnic. V této úloze je třeba o funkci vědět, že $\log V$ je definován pro $V > 0$ a je roven nule pro $V = 1$, přičemž ve jmenovateli zlomku nesmí být 0. Současně se zde řeší nerovnice typu $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$, užívají se pojmy sjednocení a průnik množin a zápisy intervalů. Je však určité nebezpečí v tom, že zadaná funkce tu má jen formální postavení a výsledek nás vlastně vůbec nezajímá. Proto lze doporučit, aby se řešitel po vyřešení úlohy pokusil alespoň zhruba naznačit průběh této funkce.

Úloha 2

Soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 7, \\ 2x - 5y &= 10 \end{aligned}$$

řešte v oboru reálných čísel graficky i početně.

Komentář: Je to běžný typ úloh řešených početně i graficky, která jsou velmi užitečné právě tím, že na daný problém vrhají dvojí pohled a vytvářejí u řešitele potřebné zkušenosti

Úloha 3

Sestrojte graf funkce $y = |x+2| - 3$ a dále početně i graficky zjistěte, kde je funkce kladná, nulová a záporná.

Komentář: Zde se řešitel setkává s jedním z elementů vyšetřování průběhu funkcí, jehož znalost patří k významným žádoucím výsledkům středoškolského vzdělání v matematice. Přitom, jako u úlohy 2, jsou opět uplatněny dva způsoby řešení, početní a grafické. Úloha nekončí jen formálně, ale navazuje v ní analýza „znaménka“ funkce v jednotlivých intervalech číselné osy.

Úloha 4

Pro celá nezáporná čísla x, y platí

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5, \\ &x + 2y \leq 7, \\ &x \leq 4,\ \ y \leq 3. \end{aligned}$$

a) Najděte a graficky znázorněte všechna řešení (x, y) této soustavy čtyř nerovnic.

b) Zjistěte, pro které řešení (x, y) nabývá výraz $A = 3x + 4y$ největší hodnoty.

Komentář: Jde tu o grafické řešení soustavy nerovnic o dvou neznámých. Řešitel zde nachází vztah mezi nerovnicemi a jejich geometrickým významem; používá geometrické vyjadřování – přímky, poloroviny a jejich průniky. Zjišťování největší nebo nejmenší hodnoty patří k akcím matematiky důležitým pro praxi, zde navíc dostáváme řešení problému blízkého lineárnímu programování.

Úloha 5

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami délky $|AB| = 7{,}6$ cm, $|CD| = 5{,}3$ cm a s výškou 3,5 cm. Vypočtěte jeho obvod a obsah.

Komentář: Běžný typ úlohy, kde jde opět o pěstování souvislosti algebry a geometrie, tentokrát je prvotní geometrická konstrukce a pak se provádějí požadované výpočty.

Úloha 6

Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně a, K, L jsou středy hran GH, HE. Zobrazte řez krychle rovinou $\varrho = CKL$. (Kterou vlastnost rovnoběžných rovin přitom využijete?) Dále vypočtěte obvod a obsah řezu a odchylku roviny ϱ od roviny ABC.

Komentář: Je to úloha na stejném principu jako úloha 5, jen na vyšší úrovni. Po konstrukci ve volném rovnoběžném promítání (užitím požadované stereometrické věty) se provádějí výpočty v podstatě planimetrickými metodami a s využitím goniometrických funkcí.

Úloha 7

Zobrazte kvádr $ABCDEFGH$, kde D je v počátku, $A[4; 0; 0]$, $C[0; 6; 0]$, $H[0; 0; 4]$, přímku $p = MC$ a rovinu $\varrho = BGD$, kde M je střed hrany EH.

a) Najděte parametrické vyjádření přímky p.
b) Najděte obecnou rovnici roviny ϱ.
c) Vypočtěte a znázorněte průsečík R přímky p s rovinou ϱ.

Komentář: Je to typická úloha spojující učivo stereometrické s analytickou geometrií, tedy opět spojení grafického znázornění a výpočtů, tentokrát analyticko-geometrických.

Úloha 8

Je dána přímka $p = KL$, $K[5;-1;1]$, $L[11;1;-2]$ a rovina

$$\varrho\colon 2x - y - 2z + 7 = 0.$$

Určete jejich průsečík a odchylku s přesností na minuty.

Komentář: Tato úloha spojuje analytickou geometrii s goniometrií, je jednou z mnoha analyticko-geometrických úloh, v nichž se počítá velikost odchylky.

Úloha 9

Je dán pravidelný trojboký jehlan $ABCV$, jehož podstava ABC leží v rovině ϱ. Vypočtěte odchylku φ přímky $p = AS$ od roviny ϱ (s přesností na úhlové minuty), kde S je střed hrany CV; velikost podstavné hrany $a = 6{,}8$ cm, výška jehlanu $v = 9{,}5$ cm.

Komentář: Toto je zástupce úloh, v nichž vyniká vztah mezi stereometrií a goniometrií. Studenti také zjistí, že výsledek nezávisí na poloze roviny ϱ. Všechny čtyři poslední úlohy jsou významné pro pěstování prostorové představivosti řešitelů.

Úloha 10

Sestrojte trojúhelník ABC ($A[0;-3]$, $B[2;0]$, $C[-1;1]$) a jeho obraz $A'B'C'$ v zobrazení $U\colon M[x,y] \to M'[x',y']$, kde

$$\begin{aligned} x' &= 1 - 2y, \\ y' &= 2 - 2x. \end{aligned}$$

Užitím Pythagorovy věty vypočtěte velikost stran obou trojúhelníků a ověřte, že U je podobné zobrazení; vypočtěte poměr podobnosti.

Komentář: Tato úloha je méně obvyklá, ale velmi užitečná. Spojuje několik jednodušších úloh: sestrojení trojúhelníků v souřadnicové soustavě, výpočet souřadnic vrcholů $\triangle A'B'C'$, dále je tu Pythagorova věta, výpočet délek stran (vzdálenosti dvou bodů), odmocniny (částečné odmocňování), důkaz podobnosti trojúhelníků, poměr podobnosti.

Úloha 11

Je dána množina $D = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ a funkce

$$f_1: y = x + 1, \quad f_2: y = 1 - x^3, \quad f_3: y = 2 - |x + 1|.$$

Ve Vennově diagramu znázorněte množiny $A = \{x \in D;\ f_1(x) > 0\}$, $B = \{x \in D;\ f_2(x) > 0\}$, $C = \{x \in D;\ f_3(x) > 0\}$.

Komentář: Zde se drobně propojuje učivo o funkcích s Vennovými diagramy. Lze použít i jiné vhodné funkce a tímto způsobem zpracovat a znázornit například jejich definiční obory.

Úloha 12

Na číselné ose jsou dány body: $O[0]$, $A[-2]$, $B[5]$, $C[2]$. Vyznačte na ní, pojmenujte a zapište výsledné množiny $CB \cup \overrightarrow{OB}$, $AC \cup OB$, $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} \cap CB$; vyjádřete je též pomocí intervalů.

Komentář: Při učivu o množinách lze takto osvěžit pojmy úsečka, polopřímka i zápisy intervalů.

Úloha 13

Pro $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ určete definiční obor D a obory pravdivosti $P(n)$ výrokových forem $V(n)$: Pětimístné číslo $825x4$ je dělitelné číslem n. Dále určete obory pravdivosti výrokových forem: $V(3) \wedge V(4)$, $V(8) \vee V(9)$, $V(4) \Rightarrow V(6)$, $V(7) \Leftrightarrow V(5)$.

Komentář: Méně obvyklá úloha, kde se využije výrokových forem ke zopakování znaků dělitelnosti a naopak znaků dělitelnosti se využije k lepšímu pochopení pravdivosti složených výroků.

Úloha 14

V prostoru je dána množina M bodů se 13 prvky, žádné 3 body neleží na téže přímce a žádné 4 v téže rovině.

a) Kolik přímek

b) Kolik rovin

je určeno těmito body a kolik % z toho prochází daným bodem $A \in M$?

c) Kolik trojbokých jehlanů (čtyřstěnů) má všechny vrcholy z M a kolik procent z toho má za jeden vrchol daný bod $A \in M$?

Komentář: Využití geometrie při formulaci úloh z kombinatoriky je vhodné a běžné; navíc se zde znovu připomenou i procenta.

Úloha 15

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{3x-5}{5} = 1 + \frac{x}{10} + \frac{x^2}{10^2} + \frac{x^3}{10^3} + \dots$$

Komentář: I tato úloha je vhodná a běžná, spojuje se tu konvergence a součet nekonečné geometrické řady s řešením rovnice s neznámou ve jmenovateli a pak i kvadratickou rovnicí. Avšak toto spojení je poněkud formální, jde jen o cvičnou úlohu.

Úloha 16

Délky stran a, b, c trojúhelníku ABC jsou členy aritmetické posloupnosti; $a_1 = a$, $a_3 = b$, $a_6 = c$, diference d je přirozené číslo, $a = 9$, všechny délky jsou v cm. Vypočtěte obsah $\triangle ABC$ s přesností na desetiny cm^2 a úhel při vrcholu C s přesností na úhlové minuty.

Komentář: Užití vlastnosti aritmetických posloupností, trojúhelníkové nerovnosti, kosinové věty, stanovení úhlu z hodnoty kosinu (II. kvadrant), vzorec pro obsah trojúhelníku – Heronův nebo užitím dvou stran a úhlu jimi sevřeného, práce s kalkulátorem, zaokrouhlování. Tato úloha propojuje mimořádné množství matematických poznatků a navíc musí řešitel ze získaných poznatků přijít na to, že úloha má dvě řešení.

Úloha 17

V rovině znázorněte grafy funkcí $y = x^2$, $y = \dfrac{8}{x}$ a vypočtěte velikost úhlu, pod kterým se dané křivky protínají.

Komentář: Řešitel musí vědět, o jaké grafy půjde (tj. o grafy funkce kvadratické a nepřímé úměrnosti) a znázornit je, zjistit jejich průsečík, tedy řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, zjistit derivace funkcí v daném budě a jejich užitím pak stanovit hledanou velikost úhlu tečen v průsečíku.

Při procvičování učiva může učitel v úlohách zkombinovat i ty části matematiky, které spolu zdánlivě nesouvisejí, a nemusí ani jít o žádné dlouhé výpočty, jak ukazují následující dvě úlohy.

Úloha 18

Jsou dána čísla a, b, c větší než 1. Rozhodněte, zda platí výrok: „Jestliže čísla a, b, c splňují trojúhelníkovou nerovnost, pak ji splňují i logaritmy těchto čísel.“

Úloha 19

Náhodně zvolím číslo d, jeden z celých dělitelů čísla 6. Jaká je pravděpodobnost toho, že posloupnost $((d-2)^n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí?

Někdy se může zdát, jako by komplexní čísla stála trochu stranou od ostatních matematických disciplín, i když třeba na goniometrii mají vazbu velmi silnou. Významně také doplňují předchozí poznatky o řešení kvadratických rovnic, když objasňují případ záporného diskriminantu, a dávají nahlédnout i do algebraických rovnic vyšších stupňů (binomické rovnice).

Úloha 20

Užitím Moivreovy věty odvoďte vzorec pro vyjádření $\sin 5\alpha$ pomocí $\sin \alpha$. Odvozený vzorec ověřte pro $\alpha = 60°$.

Komentář: Moivreova věta, významná část učiva o komplexních číslech, s použitím binomické věty zde navazuje na vztahy mezi funkcemi kosinus a sinus, které jsou podstatné zase pro goniometrii, a navíc se zde ověřování výsledku připomenou konkrétní hodnoty těchto funkcí.

Hledejme však i další souvislosti. Víme, že v Gaussově rovině je násobení komplexní jednotkou velmi vydatným geometrickým nástrojem, když zprostředkovává otočení o její argument. Tohoto nástroje lze však využít i v planimetrii nebo v souvislosti s analytickou geometrií.

Úloha 21

V rovině je dán trojúhelník ABC, $A[-2; -1{,}5]$, $B[4; 1{,}5]$, $C[0; 4]$. Sestrojte jeho obraz v otočení se středem $O[0; 0]$ a úhlem otočení $\varphi = -90°$.

Komentář: Při využití komplexních čísel vyjádříme bod A jako komplexní číslo $a = -2 - 1{,}5\mathrm{i}$, otočení o úhel $\varphi = -90°$ znamená násobení komplexní jednotkou $-\mathrm{i}$, takže $a' = (-2 - 1{,}5\mathrm{i}) \cdot (-\mathrm{i}) = -1{,}5 + 2\mathrm{i}$, obrazem bodu A je tedy $A'[-1{,}5; 2]$, ...

Lze ovšem vyžadovat i klasické planimetrické řešení. V zadání můžeme volit i jiné úhly otočení, zejména takové, pro něž studenti znají hodnoty funkcí kosinus a sinus.

Úloha 22

Vyšetřete vzájemnou polohu (společné body) přímky $p\colon y = x + 3$ a hranice čtverce $ABCD$, který je dán středem $S[0{,}5; 1]$ a vrcholem $A[-2{,}5; -0{,}5]$. Čtverec i přímku znázorněte graficky.

Komentář: Při řešení se pracuje s vektory a s vektorovými rovnicemi, s analytickým vyjádřením úsečky a určuje se vzájemná poloha přímky a úsečky. Analytické výsledky se porovnávají s grafickým výsledkem. Při stanovování vrcholů čtverce lze využít komplexní čísla. Např. tak, že vektor $\boldsymbol{u} = A - S = (-3; -1{,}5)$ vyjádříme jako komplexní číslo $u = -3 - 1{,}5\mathrm{i}$, takže vektor $\boldsymbol{v} = B - S$ dostaneme z násobení $(-3 - 1{,}5\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} = 1{,}5 - 3\mathrm{i}$, tedy $\boldsymbol{v} = (1{,}5; -3)$ a $B = S + \boldsymbol{v} = \dots$

Možná se někomu takové řešení nelíbí, že není „čisté“. V této chvíli se vraťme k úvodu tohoto článku, kde jsme formulovali smysl matematického vzdělání – abychom s pomocí matematiky dovedli řešit praktické problémy Při řešení praktických úloh, tedy úloh přímo z praxe, však není povětšinou řečeno nic o tom, jaká metoda řešení má být použita. Jsou to problémy (úlohy), kde *jediným* cílem je najít jejich řešení. Řešitel musí sám vhodnou metodu objevit a někdy přitom i opakovaně zkoušet, „jak na to“ (viz [1]). Proto je tak důležité, aby měl „ve své brašně“ kompletní sadu matematických znalostí i s jejich souvislostmi. Z tohoto hlediska lze posuzovat i řešení úloh 21 a 22; prostě „někdo“ při řešení postupoval takto. V podmínkách školy takovými úlohami bývají úlohy matematických soutěží, například Matematické olympiády.

Řešit úlohy z „opravdové praxe“ při výuce matematiky není reálné, ale lze vytvořit jiné modelové úlohy, kde jediným cílem je také jen jejich vyřešení. Studenti by se s úlohami, kde metoda řešení spočívá na jejich „objevu“ nebo výběru, měli během studia občas setkávat. Podívejme se na dvě ukázky úloh s matematickou formulací a jako poslední ukázku úlohy z praxe.

Úloha 23

Vrchol paraboly leží na ose x a její osa je rovnoběžná s osou y. Body $T_1[0; -2]$, $T_2[5; -4{,}5]$ jsou dotykové body tečen vedených k parabole z jistého bodu M. Zjistěte úhel těchto tečen.

Komentář: Jde o úlohu méně obvyklou. Řešitel tu musí samostatně volit postup a vhodné metody řešení jednotlivých fází postupu. Nabízí se analytická geometrie a diferenciální počet i kombinaci obou těchto metod. (Tato úloha je i početně zajímavá.)

Úloha 24

Je dána kružnice $k = (S; r)$ a bod M tak, že $|SM| = p$. Dotykové body tečen z bodu M ke kružnici k jsou T_1, T_2.

a) Vypočtěte obsah P trojúhelníku MT_1T_2. Vyčíslete jeho hodnotu pro $r = 3$, $p = 5$.

b) Kolik % tohoto trojúhelníku leží v daném kruhu?

Komentář: Úloha není zcela jednoduchá a nabízí řešiteli dokonce několik způsobů řešení.

Úloha 25

Jízda kabinky lanovky stojí 3 600 Kč. K lanovce přišla skupina turistů v počtu kolem deseti a vyžádala si zvláštní jízdu. Bylo jim to umožněno, ale každý z nich musel zaplatit o 40 Kč víc než by stála normální jízdenka. Kolik těch turistů bylo?

Komentář: Možná se vám bude zdát, že to zadání není zcela jasné a přesné, ale i takové bývají úlohy z praxe, v nichž zadavatel „samozřejmosti“ neuvádí. Tato úloha má dvě řešení.

Literatura

[1] *Trávníček, S.*: Pojďme na to s matematikou (a někdy i s počítačem). Vydavatelství UP Olomouc, 2014, v tisku.

Zavedení pomocného prvku – užitečná heuristická strategie

JIŘÍ PŘIBYL – JIŘINA ONDRUŠOVÁ

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

Tímto příspěvkem volně navazujeme na článek [5], přičemž oba spadají do série článků zabývajících se možnostmi využití heuristických strategií na základní a střední škole.