Úloha 24

Je dána kružnice $k = (S; r)$ a bod M tak, že $|SM| = p$. Dotykové body tečen z bodu M ke kružnici k jsou T_1, T_2.

a) Vypočtěte obsah P trojúhelníku MT_1T_2. Vyčíslete jeho hodnotu pro $r = 3$, $p = 5$.

b) Kolik % tohoto trojúhelníku leží v daném kruhu?

Komentář: Úloha není zcela jednoduchá a nabízí řešiteli dokonce několik způsobů řešení.

Úloha 25

Jízda kabinky lanovky stojí 3 600 Kč. K lanovce přišla skupina turistů v počtu kolem deseti a vyžádala si zvláštní jízdu. Bylo jim to umožněno, ale každý z nich musel zaplatit o 40 Kč víc než by stála normální jízdenka. Kolik těch turistů bylo?

Komentář: Možná se vám bude zdát, že to zadání není zcela jasné a přesné, ale i takové bývají úlohy z praxe, v nichž zadavatel „samozřejmosti" neuvádí. Tato úloha má dvě řešení.

Literatura

[1] *Trávníček, S.*: Pojďme na to s matematikou (a někdy i s počítačem). Vydavatelství UP Olomouc, 2014, v tisku.

Zavedení pomocného prvku – užitečná heuristická strategie

JIŘÍ PŘIBYL – JIŘINA ONDRUŠOVÁ

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

Tímto příspěvkem volně navazujeme na článek [5], přičemž oba spadají do série článků zabývajících se možnostmi využití heuristických strategií na základní a střední škole.

Základní idea této strategie spočívá v tom, že zavedením tzv. *pomocného prvku* se řešení pro řešitele stane snadněji dosažitelné. Ve shodě s [9] vymezujeme pomocný prvek jako objekt, který se na první pohled v úloze nevyskytuje, a my jej do úlohy vpravíme s nadějí, že nám usnadní přístup k řešení. Polya tuto strategii nazývá *Auxiliary elements* a chápe ji v širším kontextu, než v jakém ji budeme prezentovat my, neboť zde jsme se zaměřili výhradně na školské úlohy. Při zavedení pomocného prvku u geometrických úloh se obvykle jedná o doplnění přímek, úseček, kružnicových oblouků či dalších různých obrazců, v případě algebraických úloh přičítáme vhodné číslo k oběma stranám rovnice. Protože tento prvek není v úloze explicitně uveden a my jej do úlohy vnášíme, nazýváme tento způsob řešení strategií *Zavedení pomocného prvku* (budeme též značit ZPP). Tato strategie se ve školské matematice často užívá, aniž bychom si tuto skutečnost uvědomovali. V následujících úlohách budeme ukazovat jak obvyklé použití ZPP, tak i takové, kde to není na první pohled zřejmé.

V některých případech může být pomocný prvek v úloze již obsažen, avšak není přímo uveden v zadání úlohy. Potom hovoříme o tzv. *skrytém (pomocném) prvku* a obvykle se jedná o nějaký objekt, jehož existence je dána přímo povahou objektů vyskytujících se v úloze – například úhlopříčka v páté úloze.

Věříme, že budeme-li o strategii *zavedení pomocného prvku* hovořit a ilustrovat ji na typických úlohách, potom můžeme docílit jejího častějšího aktivního používání i v těch případech, kdy její užití zjevné není.

Tuto heuristickou strategii budeme prezentovat při řešení několika úloh odlišného charakteru.

Poznamenejme ještě, že mnohé v textu uvedené ilustrující úlohy lze řešit i jinak, buď standardní cestou, nebo jinou heuristickou strategií. U každé úlohy uvádíme pouze řešení námi prezentovanou strategií. Výhodnost jejího použití vysvitne samozřejmě nejvíce tam, kde je jako způsob řešení nejefektivnější, či dokonce jedinou cestou k vyřešení daného problému.

V rámci námi budované teorie heuristických strategií také hovoříme o „cestách“ řešení dané úlohy, přičemž vymezujeme následující tři základní kategorie:

- *algebraická cesta* – spočívá v algebraickém řešení dané úlohy, opírajícím se o zavedení neznámé;
- *aritmetická cesta* – je založena na číselném způsobu řešení (bez zavedení neznámé);
- *grafická cesta* – opírá se o „obrázek“, umožňující vyřešit danou úlohu.

O těchto cestách se zmiňujeme z toho důvodu, že budeme ukazovat použití jednotlivých pomocných prvků ve všech třech případech.

Následující tři úlohy ilustrují tuto strategii při řešení algebraických úloh, v nichž budeme využívat různé substituce.

Úloha 1

V oboru reálných čísel řešte rovnici $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

Řešení. Uvedená algebraická rovnice je řešitelná v reálných číslech, avšak přímé nalezení kořenů může být nesnadné. Povšimneme-li si, že exponenty u neznáme jsou sudá čísla, může nám to evokovat zavedení *pomocného prvku* pomocí substituce $y = x^2$.

Řešením takto získané rovnice $y^2 - 5y + 6 = 0$ jsou reálná čísla $y_1 = 2$ a $y_2 = 3$.

Vraťme se nyní k naší substituci. Namísto jedné bikvadratické rovnice máme dvě rovnice kvadratické, přičemž nalezení jejich řešení je rutinní záležitostí a s ohledem na zvolenou substituci získáme čtyři řešení původní rovnice.

Odpověď: Řešením rovnice jsou reálná čísla: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a $-\sqrt{3}$.

Ve výše uvedené úloze byla substituce patrná na první pohled. I ve druhé úloze je možné použití substituce snadno nahlédnutelné a právě jejím použitím se stává úloha snadněji řešitelnou.

Úloha 2

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} &= -1, \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} &= 4. \end{aligned}$$

Řešení. Danou soustavu rovnic můžeme řešit standardním způsobem. Zde si ukážeme, že zavedením vhodných pomocných prvků se řešení původní soustavy stane pro nás snáze dosažitelné.

Užitím substitucí

$$u = \frac{1}{x} \quad \text{a} \quad v = \frac{1}{y} \qquad (x \neq 0,\ y \neq 0)$$

zavedeme do úlohy *pomocné prvky* u a v, s jejichž pomocí vytvoříme novou soustavu rovnic

$$\begin{aligned} u + 2v &= -1, \\ 3u - v &= 4. \end{aligned}$$

Řešení soustavy dvou lineárních rovnic o neznámých u a v je již rutinní úlohou, řešením jsou čísla $u = 1$ a $v = -1$. Vrátíme-li se k našim substitucím, snadno najdeme řešení původní soustavy rovnic.

Odpověď: Řešením soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $(x, y) = (1; -1)$.

V předchozích dvou úlohách se zavedení pomocného prvku pomocí substituce nabízelo relativně samo. Následující úloha nám ukazuje, že někdy nemůžeme pomocný prvek do úlohy zavést hned na začátku procesu řešení, ale musíme mu trochu „vyjít naproti“. Na tuto skutečnost poukazuje např. následující obtížnější úloha.

Úloha 3

V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$x^4 + 10x^3 + 38x^2 + 65x + 36 = 0.$$

Řešení. Způsob řešení pouze načrtneme. Nejprve danou rovnici upravíme na vhodnější tvar

$$x^4 + 10x^3 + 38x^2 + 65x + 36 = (x^2 + 5x + 6)^2 + (x^2 + 5x + 6) - 6 = 0.$$

Substitucí zavedeme *pomocný prvek* y, pro který platí $y = x^2 + 5x + 6$. Původní rovnici můžeme poté nahradit novou rovnicí

$$y^2 + y - 6 = 0,$$

jejímž řešením jsou reálná čísla $y_1 = 2$ a $y_2 = -3$. Vrátíme-li se k naší substituci, získáme dvojici kvadratických rovnic:

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \quad \text{a} \quad x^2 + 5x + 9 = 0,$$

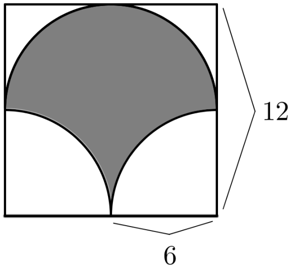
přičemž pouze první z nich má řešení (v oboru reálných čísel).

Odpověď: Reálnými kořeny dané rovnice jsou čísla $x_1 = -1$ a $x_2 = -4$ a jiné reálné kořeny nemá.

Podívejme se nyní na úlohy, v nichž se vyskytuje pomocný prvek geometrického typu.

Úloha 4

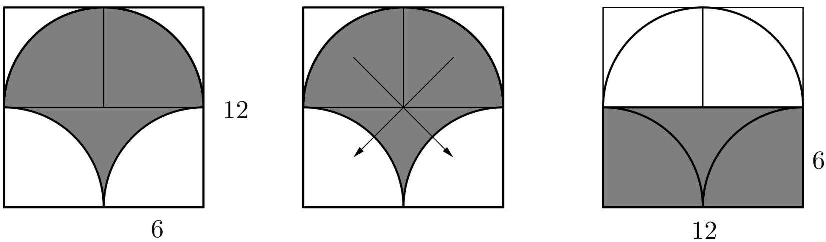
Vypočítejte obsah rovinného obrazce, jehož hranici tvoří vyznačené kružnicové oblouky. Údaje v obr. 1 jsou uvedeny v centimetrech (úloha je převzata z [7]).



Obr. 1

Řešení. Kromě obvyklého početního řešení založeného na použití vzorců pro obsah čtverce a kruhu můžeme tuto úlohu velice elegantně vyřešit právě pomocí strategie Zavedení pomocného prvku.

Budeme pracovat s obrazcem, který je znázorněn v obr. 1. Do něj si umístíme několik *pomocných prvků* – úseček – způsobem patrným z obr. 2. Tyto úsečky nám rozdělí obrazec na několik částí a následně snadnou manipulací ukážeme, že jeho obsah je roven obsahu obdélníku o stranách 6 a 12 centimetrů.



Obr. 2

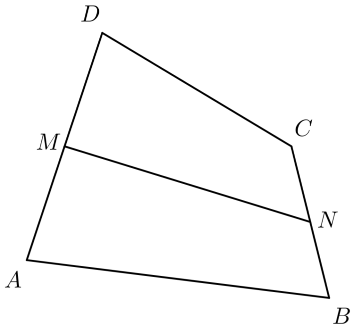
Odpověď: Obsah uvažovaného rovinného obrazce je 72 cm^2.

Úloha 5

V rovině je dán libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Označme M, N po řadě středy stran AD a BC. Dokažte nerovnost

$$|MN| \leq \frac{1}{2}\left(|AB| + |CD|\right).$$

Řešení. Zadání úlohy si můžeme vhodně ilustrovat obr. 3.

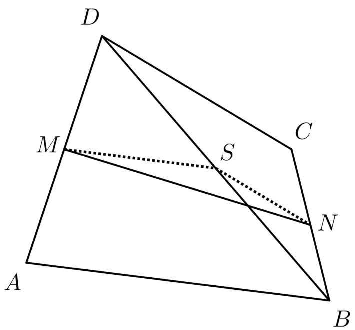


Obr. 3

Idea důkazu je zřetelnější po zavedení *pomocného prvku* – úhlopříčky BD, na které sestrojíme její střed S (viz obr. 4).

Stručně již jen okomentujme ideu důkazu. Úsečky MS a NS jsou po řadě střední příčky v trojúhelnících ABD a CDB, proto platí

$$|MS| = \frac{1}{2}|AB|, \qquad |NS| = \frac{1}{2}|CD|.$$



Obr. 4

Odtud plyne

$$|MN| \leq |MS| + |NS| = \frac{1}{2}\left(|AB| + |CD|\right),$$

přičemž rovnost nastává, právě když S leží na úsečce MN.

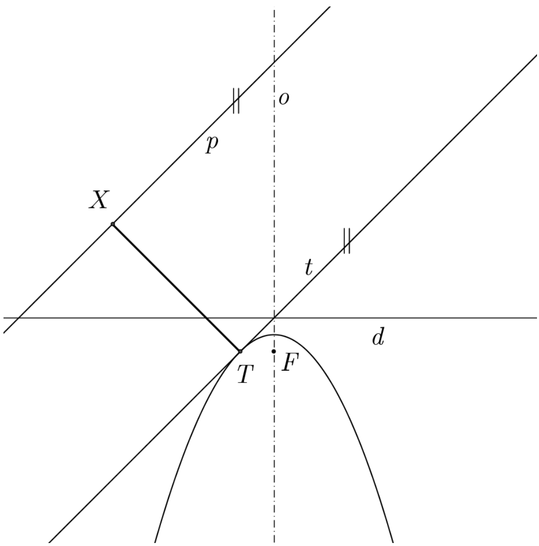
Otázka pro čtenáře: Kdy nastavá situace, že bod S je bodem úsečky MN?

Následující ukázka představuje typickou školskou úlohu.

Úloha 6

Je dána parabola $y = 4 - x^2$ a přímka $p\colon y = x + 8$. Na dané parabole najděte bod, jehož vzdálenost od přímky p je nejmenší.

Řešení. Kromě obvyklého řešení pomocí diferenciálního počtu můžeme tuto úlohu efektivně vyřešit i námi prezentovanou strategií. Jako *pomocný prvek* zavedeme tečnu k zadané parabole, která je rovnoběžná s přímkou p (viz obr. 5).



Obr. 5

Je zřejmé, že bod dotyku T této tečny k parabole je hledaným bodem ze zadání úlohy. Protože rovnice přímky p je $y = x + 8$ a hledáme rovnoběžku k dané přímce, potom rovnice hledané tečny t je ve tvaru $y = x + c$.

Protože bod T je průsečíkem tečny t a zadané paraboly, můžeme sestavit následující rovnici

$$x + c = 4 - x^2,$$

tj.

$$x^2 + x + (c - 4) = 0, \tag{1}$$

kde reálné číslo c je parametrem v rovnici (1).

Přímka t bude tečnou, právě když diskriminant rovnice (1) bude roven nule. Uvědomme si, že nás nezajímá, pro kterou hodnotu reálného parametru c se tak stane.

Potom pro x-ovou souřadnici t_1 bodu T platí

$$t_1 = -\frac{1}{2}.$$

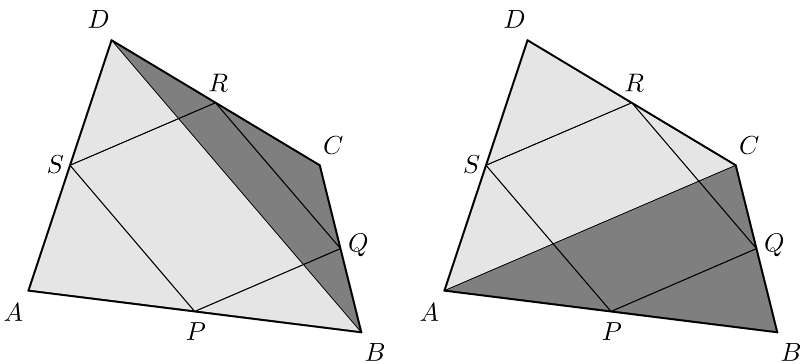
Dosazením do rovnice paraboly již snadno určíme druhou souřadnici bodu T.

Odpověď: Hledaný bod T má souřadnice $\left[-\frac{1}{2}; \frac{15}{4}\right]$.

Úloha 7

V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Nechť P, Q, R a S jsou po řadě středy stran AB, BC, CD a DA. Dokažte, že čtyřúhelník $PQRS$ je rovnoběžník.

Řešení. K nalezení důkazu využijeme obr. 6.



Obr. 6

Uvažujme v daném čtyřúhelníku jako pomocné prvky obě úhlopříčky. Vzniknou tak trojúhelníky ABD, BCD, ACD a ABC. Ukažme nyní, že úsečky SP a QR jsou rovnoběžné. Protože bod S je středem úsečky AD a bod P je středem úsečky AB, úsečka SP je střední příčkou trojúhelníka ABD rovnoběžnou se základnou BD. Bod R je středem strany CD a bod Q je středem strany BC, tudíž úsečka QR je střední příčkou trojúhelníka BCD rovnoběžnou se základnou BD. Protože SP je rovnoběžná s BD a QR je rovnoběžná se BD, tak SP je rovnoběžná s QR. Obdobně dokážeme rovnoběžnost i pro úsečky PQ a SR.

Povšimněme si následující skutečnosti. Vzhledem k tomu, že strany uvažovaného rovnoběžníka jsou střední příčky v trojúhelnících ABD, BCD, ACD a ABC, potom délky stran jsou poloviční délkám příslušných úhlopříček, které tvoří přepony trojúhelníků.

Otázka pro čtenáře: Kdy bude rovnoběžník obdélníkem popř. čtvercem?

Otázka pro čtenáře: Zabývejte se případem, kdy je původní čtyřúhelník $ABCD$ nekonvexní. Bude čtyřúhelník $PQRS$ rovnoběžníkem? Pokud ano, tak proč?

Poznámka. Uvedené tvrzení se nazývá *Varignonova*[1] *věta*, kterou můžeme najít v celé řadě prací. Velmi dobrý úvod do dané problematiky můžeme najít např. v [3].

Na závěr uvádíme historickou úlohu, jejíž autorství je připisováno Isaacu Newtonovi. Její zadání lze najít v celé řadě publikací. Zde přebíráme konkrétní hodnoty z publikace [6, s. 54]. Zadání v obecnější podobě můžeme najít [4, s. 9], nebo můžeme jít přímo k prameni [8, s. 89].

[1] *Pierre Varignon* (1654–1722) byl francouzským matematikem a duchovním, který nejprve vystudoval jezuitskou kolej v Caen a v roce 1676 byl vysvěcen na kněze. Ve studiu pokračoval dál na univerzitě v Caen a v roce 1682 získal titul M.A. (S touto univerzitou jsou také spjata jména Pierre-Simon Laplace (1749–1827) a Henri Poincaré (1854–1912)). Po přečtení Eukleidových Základů pokračoval studiem Descartesovy Geometrie a zřejmě tato dvě díla nadále určila další směr jeho bádání. Přestože zůstal věren svému řádu, pustil se do studia matematiky. Roku 1688 nastoupil na post profesora Mazarinovy koleje a téhož roku byl také přijat za člena královské akademie věd (Francouzská akademie věd), v roce 1713 se stal členem Královské Pruské akademie věd (Berlínská akademie) a v roce 1718 byl přijat za člena Královské společnosti (Královská Londýnská společnost na podporu přírodních věd). Byl důvěrným přítelem jak Newtona a Leibnize, tak i rodiny Bernoulliů. Po l'Hospitalovi převzal nadšení pro diferenciální počet a ve své době se stal jedním z nejmocnějších obhájců nově vznikající matematické disciplíny ve Francii.

Úloha 8

Tráva na louce roste stále stejně rychle a je všude stejně hustá. Víme, že 60 krav by spáslo všechnu trávu za 24 dnů a 30 krav za 60 dnů. Kolik krav by spáslo trávu za 100 dnů?

Řešení. Předpokládejme, že každá kráva spase za den stejné množství trávy. Jako pomocný prvek zavedeme množství trávy, které spase jedna kráva za jeden den. Toto množství nazveme porce.

Na konci 24. dne spáslo 60 krav 1440 porcí. Na konci 60. dne spáslo 30 krav 1800 porcí. Za 36 dnů proto vyrostlo na louce 360 porcí, tzn. 10 porcí za den. Na začátku tak muselo být na louce 1200 porcí. Do konce stého dne musí krávy spást 2200 porcí. Hledaný počet krav je proto

$$\frac{2200}{100} = 22.$$

Odpověď: Trávu by spáslo 22 krav.

Poznámka 1. Newton řeší úlohu v obecné podobě a jeho řešení je čistě algebraické. Po vyřešení úlohy ukazuje řešení pro konkrétní hodnoty.

Poznámka 2. Pro zajímavost zde zmiňme fakt, že Newton se ve své úloze nevyjadřuje o kravách, nýbrž o volech, jak správně zmiňuje [2, s. 227], na rozdíl od anglicky psané literatury.

Tento článek byl zpracován za podpory grantu GA ČR č. 407/12/1939.

Literatura

[1] *Ball, R. W. W.*: A Short Account of the History of Mathematics. Dover Publication, New York, 1960.

[2] *Bečvář, J., Fuchs, E.* (*eds.*): Matematika v 16. a 17. století. Prometheus, Praha, 1999.

[3] *Coxeter, H. S. M, Greitzer, S. L.*: Geometry Revisited. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.

[4] *Dörrie, H.*: 100 Great Problems of Elementary Mathematics. Translated by David Antin. Dover Publications, Inc., New York, 1965.

[5] *Eisenmann, P., Břehovský, J.*: Vypuštění podmínky – užitečná heuristická strategie. MFI roč. 22 (2013), č. 3.

[6] *Kopka, J.*: Umění řešit matematické problémy. RNDr. Karel Hoza – HAV, Praha, 2013.

[7] *Maláč, J., Kurfürst, J.*: Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ. SPN, Praha, 1981.

[8] *Newton, I.*: Arithmetica Universalis; Sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber. 1707.

[9] *Polya, G.*: How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press, Princeton, 2004.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 6. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 203

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a D pata jeho výšky z vrcholu A na stranu BC. Dokažte, že osa úhlu CAB je rovněž osou úhlu DAO.

Erich Windischbacher (Graz)

Úloha 204

Nechť pro reálná čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2014}$ současně platí

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{2014} \geq 0 \quad \text{a} \quad a_{54}^2 + a_{55}^2 + \ldots + a_{2014}^2 \geq \frac{19}{2}.$$

Dokažte, že platí nerovnost

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014} \geq \sqrt{2014}.$$

Může v této nerovnosti nastat rovnost?

Jozef Mészáros

Dále uvádíme řešení úloh 197 a 198, jejichž zadání byla zveřejněna ve čtvrtém čísle loňského (22.) ročníku našeho časopisu.