[8] *Newton, I.*: Arithmetica Universalis; Sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber. 1707.
[9] *Polya, G.*: How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press, Princeton, 2004.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 6. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: `mfi@upol.cz`. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 203

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a D pata jeho výšky z vrcholu A na stranu BC. Dokažte, že osa úhlu CAB je rovněž osou úhlu DAO.

Erich Windischbacher (Graz)

Úloha 204

Nechť pro reálná čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2014}$ současně platí

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{2014} \geq 0 \quad \text{a} \quad a_{54}^2 + a_{55}^2 + \ldots + a_{2014}^2 \geq \frac{19}{2}.$$

Dokažte, že platí nerovnost

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014} \geq \sqrt{2014}.$$

Může v této nerovnosti nastat rovnost?

Jozef Mészáros

Dále uvádíme řešení úloh 197 a 198, jejichž zadání byla zveřejněna ve čtvrtém čísle loňského (22.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 197

Dokažte, že pro libovolné liché číslo n je

$$20n^4 + 14n^2 + 2014$$

dělitelné šestnácti.

Martin Panák

Řešení. Úpravou zadaného výrazu dostaneme

$$20n^4 + 14n^2 + 2014 = 2(2n^4 - n^2 - 1) + 16(n^4 + n^2 + 126).$$

Nyní stačí ukázat, že výraz

$$2n^4 - n^2 - 1 = (2n^2 + 1)(n - 1)(n + 1)$$

je pro každé liché číslo n dělitelný osmi.

Ovšem $(n - 1)(n + 1)$ je součin dvou po sobě jdoucích sudých čísel, proto je jedno z nich sudé a druhé dělitelné čtyřmi. Jejich součin je tedy dělitelný osmi, což jsme chtěli dokázat.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Filip Bialas* z G v Praze 4, Konstantinova, *Markéta Calábková*, *Petr Vincena* a *Marian Poljak*, všichni z GJŠ v Přerově, *Antonín Češík* ze SPŠE v Pardubicích, *Martin Hora* z G v Plzni, Mikulášské nám. 23, *Ondřej Hübsch* z G v Praze 6, Arabská, *Lukáš Knob* z G v Kojetíně, *Jan Krejčí* a *Jan Šarman*, oba z GMK v Bílovci, *Karolína Kuchyňová* z GML v Brně, *Tomáš Lysoněk* z G v Uherském Hradišti, *Viktor Němeček* z G v Jihlavě, J. Masaryka, *Tomáš Novotný* z G v České Lípě, *Milan Pultar* z GJK v Praze 6, Parléřova, *Martin Raszyk* z G v Karviné, *Jakub Svovoda* z G v Havířově, Komenského a *Jan Šorm* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Pavel Turek* z G v Olomouci–Hejčíně a *Martin Zahradníček* z G ve Šlapanicích.

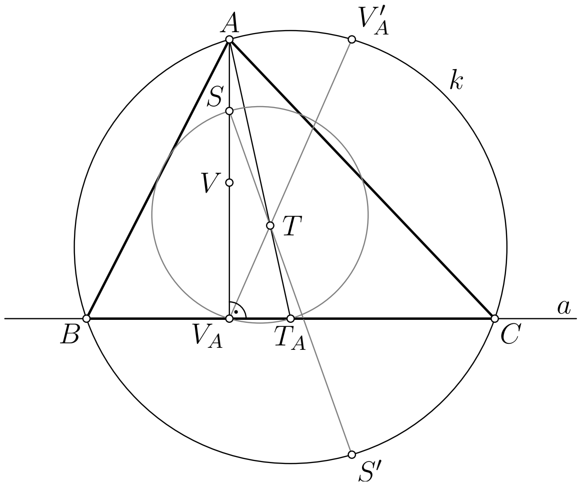
Úloha 198

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán vrchol A, průsečík výšek V a střed T_A strany BC. Přitom předpokládejme, že A, V, T_A jsou tři navzájem různé body.

Šárka Gergelitsová

Řešení. Označme V_A patu výšky trojúhelníku ABC z vrcholu A, T jeho těžiště a S střed úsečky AV. Při řešení úlohy užijeme vlastností Feuerbachovy kružnice. Tato kružnice je stejnolehlá s kružnicí trojúhelníku

ABC opsanou se středem stejnolehlosti T a keficientem -2. Přitom na této Feurbachově kružnici leží body T_A, V_A a S.



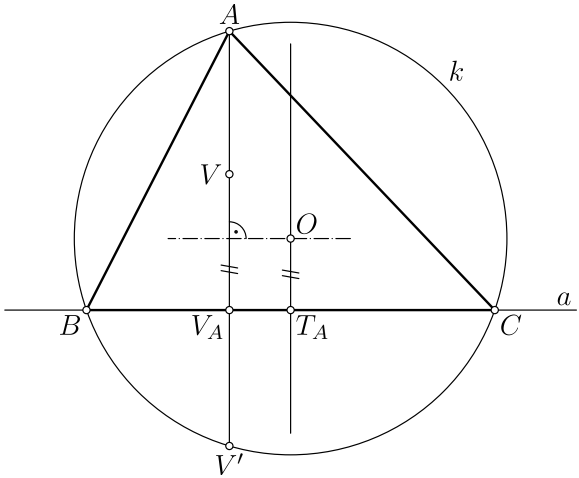
Obr. 1

Odtud již plyne konstrukce. Sestrojíme bod V_A jako průsečík přímky VA s kolmicí a procházející bodem T_A. Sestrojíme těžiště T jako bod, který dělí úsečku AT_A v poměru $2 : 1$ a sestrojíme střed S úsečky AV. Pokud $A = V_A$, nemá úloha řešení. Sestrojíme body S', V'_A jako obrazy bodů S a V_A ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2. V případě $A = V'_A$ je kružnicí k trojúhelníku opsanou kružnice s průměrem AS', jinak je to kružnice procházející body A, V'_A a S'. Pokud kružnice k protíná přímku a ve dvou bodech, jsou jimi vrcholy B a C (bez určení pořadí), jinak úloha nemá řešení.

Jiné řešení (*podle Františka Jáchima*). Využijeme vlastnost Eulerovy přímky, na které leží V, T a střed O kružnice k trojúhelníku opsané, přičemž bod T dělí úsečku VO v poměru $2 : 1$.

Odtud již plyne konstrukce. Stejně jako v předcházejícím řešení sestrojíme bod T a přímku a. Bod O bude obrazem bodu V ve stejnolehlosti se středem v bodě T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Sestrojíme kružnici k se středem v bodě O procházející bodem A. Pokud má tato kružnice dva průsečíky s přímkou a, jsou jimi vrcholy B a C, jinak úloha nemá řešení.

Jiné řešení (*podle Jana Šarmana*). Využijeme vlastnosti bodu V' souměrně sdruženého s ortocentrem V podle přímky BC. Tento bod leží na kružnici k trojúhelníku ABC opsané, tedy AV' je tětivou této kružnice. Dále víme, že střed O kružnice k leží na kolmici k přímce BC, tedy na rovnoběžce s přímkou AV a současně na ose úsečky AV'. Odtud již plyne konstrukce.



Obr. 2

Poznámka. Antonín Češík použil podobnou ideu jako v předcházejícím řešení, jen si uvědomil, že bod S' souměrně sdružený s ortocentrem V podle středu T_A strany AB leží také na kružnici k opsané trojúhelníku ABC a AS' je průměrem kružnice k.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Antonín Češík* ze SPŠE v Pardubicích, *Jan Krejčí* a *Jan Šarman*, oba z GMK v Bílovci, *Karolína Kuchyňová* z GML v Brně, *Tomáš Lysoněk* z G v Uherském Hradišti, *Marian Poljak* z GJŠ v Přerově, *Martin Raszyk* z G v Karviné, *Jan Šorm* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně, *Petr Vincena* z GJŠ v Přerově a *Martin Zahradníček* z G ve Šlapanicích.

Pavel Calábek