MATEMATIKA

Prostorové analogie dvou planimetrických vět

JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V matematické literatuře se hojně setkáváme s analogiemi geometrických tvrzení v rovině a v prostoru. Nejznámější příklady najdeme mezi analogickými tvrzeními platnými v trojúhelníku a ve čtyřstěnu, které jsou nejjednoduššími omezenými rovinnými a prostorovými útvary (tělesy). Jejich hranici tvoří v případě trojúhelníku úsečky (strany) a v případě čtyřstěnu trojúhelníky (stěny). Jedná se tzv. *simplexy* v rovině a v prostoru. Mezi nejobvyklejší analogie patří metrické a polohové vlastnosti těžnic a těžiště v trojúhelníku a ve čtyřstěnu. Mnoho dalších příkladů lze najít např. ve zdařilé publikaci [1].

V tomto příspěvku se zaměříme na méně známé prostorové analogie dvou významných planimetrických tvrzení, které se týkají pravoúhlého trojúhelníku, a to na prostorovou analogii Pythagorovy věty a dále na analogii jisté množiny bodů v rovině, kterou je tzv. Thaletova kružnice. První z nich je spjata se jménem německého matematika *Johannese Faulhabera* (1580–1635) a druhá se jménem významného českého matematika *Miroslava Fiedlera*[1]. Uveďme nejprve pro úplnost znění obou výše zmíněných planimetrických vět, které je možno nalézt v téměř každé učebnici geometrie pro základní a střední školy.

[1]Prof. RNDr. Miroslav Fiedler, DrSc. (1926), vědecký pracovník Matematického ústavu AV ČR v Praze.

Věta 1 (Pythagorova)

Nechť a, b jsou délky odvěsen a c délka přepony v libovolném pravoúhlém trojúhelníku. Pak platí

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Existuje poměrně velké množství odlišných důkazů Pythagorovy věty, naši čtenáři se s některými z nich mohli setkat např. v článku [3]. Nejsnazší je však patrně využití Eukleidových vět o odvěsnách pravoúhlého trojúhelníku.

Připomeňme ještě, že platí rovněž věta obrácená k větě Pythagorově. Tu využíváme především k tomu, abychom rozhodli, zda trojúhelník s danými délkami stran je pravoúhlý či nikoliv.

Druhé planimetrické tvrzení, které se týká speciální množiny bodů dané vlastnosti v rovině, má následující znění:

Věta 2 (Thaletova)

V rovině je dána úsečka AB. Množina všech bodů C této roviny, pro něž je ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, je kružnice sestrojená nad úsečkou AB jako průměrem – s výjimkou obou krajních bodů uvažovaného průměru (tzv. Thaletova kružnice).

Také k důkazu této věty lze přistoupit různými způsoby. Jejich základem je běžné využití vlastností vnitřních úhlů v rovnoramenných trojúhelnících.

Nejprve se budeme zabývat prostorovou analogií Pythagorovy věty. Uvažujme pravoúhlý čtyřstěn (někdy též pravoúhlý trojhran) $ABCD$, v němž jsou hrany vycházející z vrcholu D navzájem kolmé. Označme S_A, S_B, S_C a S_D po řadě obsahy jeho stěn BCD, CAD, ABD a ABC, viz obr. Pak platí následující tvrzení:

Věta 3 (Faulhaberova)

V libovolném pravoúhlém čtyřstěnu $ABCD$ s pravými úhly ve stěnách čtyřstěnu u vrcholu D platí při výše uvedeném označení obsahů jeho stěn

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D^2.$$

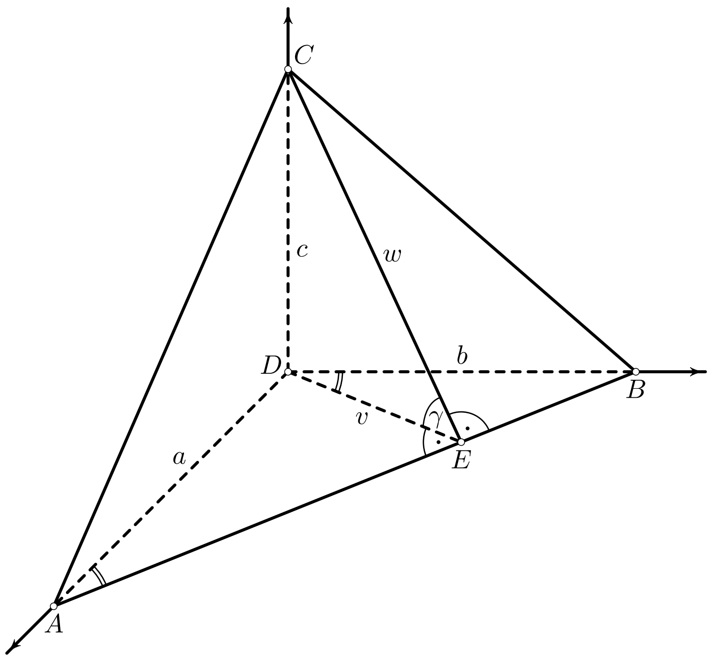
V publikaci [2] soustředil její autor pět různých důkazů této věty. V tomto příspěvku uvedeme jiný důkaz Faulhaberovy věty, který se opírá o následující goniometrickou identitu.

Lemma

Nechť α, β, γ jsou po řadě odchylky rovin BCD, CAD, ABD od roviny ABC v pravoúhlém čtyřstěnu $ABCD$ s pravými úhly v jeho stěnách u vrcholu D. Pak platí

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Důkaz. Uvažujme pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D, který (pro lepší názornost) umístíme do kartézského souřadnicového systému s osami x, y, z tak, že vrchol D ztotožníme s počátkem systému souřadnic a vrcholy A, B, C umístíme po řadě na kladné poloosy x, y, z. Dále nechť $|AD| = a$, $|BD| = b$ a $|CD| = c$.



Označme E patu výšky z vrcholu D v pravoúhlém trojúhelníku ABD. Snadno vidíme, že rovina DCE je kolmá k oběma rovinám ABD i ABC, tudíž pro odchylku γ rovin ABD a ABC platí $\gamma = |\sphericalangle DEC|$. Nechť $|ED| = v$ a $|EC| = w$ a dále v pravoúhlém trojúhelníku ABD označme

$$\varphi = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BDE|.$$

Z podobných pravoúhlých trojúhelníků ADE a DBE pak plyne

$$\frac{v}{a} = \sin\varphi \qquad \text{a} \qquad \frac{v}{b} = \cos\varphi.$$

Umocněním obou stran posledních dvou rovností na druhou, jejich sečtením a využitím goniometrické identity $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ po snadné úpravě dostaneme

$$v^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku CDE s přeponou EC a využitím poslední rovnosti pak máme

$$w^2 = v^2 + c^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + c^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2+b^2}$$

a odtud

$$\cos^2\gamma = \frac{v^2}{w^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}. \tag{1}$$

Užitím principu cyklické záměny dále obdržíme

$$\cos^2\alpha = \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \tag{2}$$

$$\cos^2\beta = \frac{c^2a^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}. \tag{3}$$

Sečtením vztahů (1)–(3) konečně dostaneme

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$$
$$= \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + \frac{c^2a^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = 1.$$

Tím je důkaz lemmatu uzavřen.

Poznámka. Dosadíme-li do naší identity za $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, za $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$ a za $\cos^2\gamma = 1 - \sin^2\gamma$, dostaneme navíc po snadné úpravě jinou identitu (ekvivalentní s danou)

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$$

Nyní již můžeme přikročit k vlastnímu *důkazu* Faulhaberovy věty.

Předně si uvědomme, že platí (viz obr.)

$$S_A = S_D \cos\alpha, \qquad S_B = S_D \cos\beta, \qquad S_C = S_D \cos\gamma$$

Umocněním každé z těchto tří rovností na druhou, jejich sečtením a užitím dokázaného lemmatu dostaneme bezprostředně

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D^2 \cos^2\alpha + S_D^2 \cos^2\beta + S_D^2 \cos^2\gamma =$$
$$= S_D^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = S_D^2,$$

což jsme chtěli dokázat.

Prostorová analogie věty 2 (o Thaletově kružnici) se objevila ve školním roce 1971/72 v tehdejším 50. ročníku časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální jako soutěžní úloha v jeho pravidelné řešitelské rubrice „Naše soutěž". Autorem této úlohy byl *Miroslav Fiedler*. Uveďme nyní modifikovanou verzi této úlohy ve formě matematického tvrzení.

Věta 4

V rovině ρ je dána kružnice $k(S; r)$. Množina všech bodů prostoru, které jsou vrcholy pravoúhlého čtyřstěnu (trojhranu) $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D a dále s vlastností, že k je kružnicí vepsanou stěně ABC, je kulová plocha $\kappa(S; r\sqrt{2})$ s vyjmutou hlavní kružnicí v rovině ρ.

Zhruba za rok po zveřejnění této úlohy se ukázalo, že tato úloha byla nad síly většiny řešitelů z řad středoškoláků (vyřešil ji jediný soutěžící). V čísle 5 následujícího ročníku, viz [4], bylo s odstupem jednoho roku uvedeno autorovo řešení této úlohy, které využívá prostředků analytické geometrie a metody souřadnic a které je početně poměrně náročné.

Zájemce o uvedenou problematiku si proto dovolujeme vyzvat k tomu, aby se samostatně pokusili o důkaz věty 4 jinými prostředky než užitím analytické geometrie v prostoru. Vaše řešení, která zašlete do redakce MFI, rádi zveřejníme.

Literatura

[1] *Erdnijev, P. M.*: Srovněnije i obobščenije pri obučeniji matematike (rusky). Učpedgiz, Moskva, 1960.

[2] *Kuřina, F.*: Matematika a řešení úloh. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, České Budějovice, 2011.

[3] *Pradlová, J.*: Patnáct důkazů Pythagorovy věty. MFI, roč. 10 (2000/01), č. 6, 7, 8.

[4] Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 51 (1972/73), č. 5, s. 230–232.

Souvislosti v matematice

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

I když to z výuky matematiky není vždycky patrné, pravý smysl matematického vzdělání je v tom, abychom za pomoci matematiky dovedli řešit praktické problémy. K tomu potřebujeme dvě věci, znát matematiku a vědět, jak ji používat – a umět to. Proto se žáci a studenti vzdělávají v matematice, a to na úrovni a v zaměření příslušného stupně a typu školy. Uvedené pořadí je samozřejmé, abych matematické znalosti mohl používat, musím je mít, a abych je měl, musím se je naučit a naučit se také to, jak je použít. Nejprve tedy několik myšlenek o průběhu výuky.

Z dálky se matematika jeví jako jeden celek a skutečně to jeden celek je. Když však žáci začínají do matematiky vnikat, tak po čase (už v nižších ročnících ZŠ) objevují, že se matematika nějak rozpadá na části. Nejprve se setkávají s algebrou a geometrií, jak tyto dvě části pro jednoduchost nazýváme, přičemž se obě tyto části často učí souběžně, avšak v různých vyučovacích hodinách v různých dnech v týdnu a na algebru a geometrii mívají žáci různé sešity. Mnohdy tak mohou mít pocit, že jde vlastně o dva různé, i když navzájem související školní předměty, skryté spolu pod formálním názvem *matematika.* Je na učiteli, aby spojkou mezi algebrou a geometrií nebyla jen jeho osobnost vyučujícího, ale aby při své výuce řešením vhodně volených úloh neformálně propojoval obě tyto části v myslích a zkušenostech žáků.

S postupem „od primy do oktávy“ proces „rozpadu“ školské matematiky formálně dále pokračuje. Studenti (samozřejmě i studentky, ale dále jen „studenti“) začínají zjišťovat, že se matematika dále rozděluje na jakési relativně samostatné části; nahrávají tomu i samostatné učebnice, každá z nichž se zabývá něčím jiným. Opět je na vyučujícím, aby tuto zdánlivou izolaci narušoval.

Je pravda, že v matematice sice existují takové jakoby relativně samostatné disciplíny, ale na druhé straně v ní existují, fungují a jsou významné spousty základních souvislostí a vazeb mezi poznatky, někdy i docela nečekaných. Pro úspěšné zvládnutí matematiky by se proto měl student s takovými souvislostmi a vazbami neformálně setkávat zejména při řešení úloh, a uvědomovat si je. Jde o to, aby se v jeho mysli nové poznatky správně a ve všech základních souvislostech sřetězovaly a zapojovaly do vytvářeného systému „jeho“ matematiky, a konečným výsledkem aby bylo jeho *celistvé matematické vzdělání na úrovni a v zaměření školy.* V tomto procesu, má-li být úspěšný, je třeba dodržovat určitá pravidla, zdají se samozřejmá, ale jsou učitelé, kteří pomíjejí realitu, že v jejich třídě nesedí sami Gaussové, ale i děti, kterým chvíli trvá, než do probíraného učiva proniknou.

Začne-li se probírat nová látka, je prvním cílem, aby studenti tuto látku pochopili a pak aby se ji naučili používat. Proto by mělo být zásadou, že *úvodní úlohy (příklady) nejsou příliš obtížné a jsou zaměřeny přímo na tuto látku* a její základní problémy. Soustředění řešitele na tuto látku a na její pochopení by neměly narušovat nějaké jiné (pro tuto látku nepodstatné) problémy zbytečně přimíchané do zvolených úloh. Uveďme jen drobný příklad. Začnou se probírat rovnice s parametrem a hned do prvních úloh nasází učitel plno zlomků (možná v dobé vůli, aby práci se zlomky zopakoval), ale při souboji se zlomky může žákovi unikat význam parametru, nebo u těch „slabších“ může dokonce dojít k falešnému spojení, že k rovnicím s parametrem přináležejí zlomky.

Až v následující etapě výuky, po zvládnutí podstaty toho nového, se pak do úloh přidává vhodné matematické okolí, látka se rozšiřuje, nastupují další varianty nového učiva s různou obtížností a nakonec přicházejí úlohy, v nichž nová látka je už jen jednou ze složek jejich řešení. Přitom obtížnost úloh by měla být přiměřená matematické úrovni studentů a lépe je hodně obtížné úlohy při výuce vůbec nepoužívat, snad jen jako dobrovolnou domácí úlohu pro „jedničkáře“.

Součástí tohoto procesu musí být ze strany učitele uvědomělé připomínání a využívání souvislostí a vztahů s dalšími, již dříve probranými tematickými celky. Nejde jen o „vracení se k předchozímu učivu“, to jistě ano, je to důležité, ale v návaznosti na předchozí postup mají přicházet neformální kombinované úlohy, které cíleně narušují onu zdánlivou izolovanost jednotlivých tematických celků. Řečeno pozitivně, je třeba soustavně a uvědoměle pěstovat jejich vzájemné vztahy, a nato pak i vztahy s jinými vědami a s praxí.

Některé takové vztahy jsou zcela samozřejmé, například v úlohách na řešení trojúhelníku se mohou propojovat jeho planimetrické vlastnosti s goniometrií, také třeba kombinatorika a pravděpodobnost k sobě mají v úlohách blízko. V učebnicích a sbírkách příkladů nalezneme mnoho vhodných úloh, ale chce-li učitel použít i některé jiné vztahy, může občas nějakou potřebnou úlohu sám vytvořit. V další části článku nyní různé takové matematické souvislosti připomínáme a komentujeme.

Úloha 1

Stanovte definiční obor funkce

$$f\colon y = \frac{1}{\log \dfrac{2x-1}{x+3}}.$$

Komentář: Úlohy na definiční obor funkcí spojují učivo o funkcích s řešením rovnic a nerovnic. V této úloze je třeba o funkci vědět, že $\log V$ je definován pro $V > 0$ a je roven nule pro $V = 1$, přičemž ve jmenovateli zlomku nesmí být 0. Současně se zde řeší nerovnice typu $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$, užívají se pojmy sjednocení a průnik množin a zápisy intervalů. Je však určité nebezpečí v tom, že zadaná funkce tu má jen formální postavení a výsledek nás vlastně vůbec nezajímá. Proto lze doporučit, aby se řešitel po vyřešení úlohy pokusil alespoň zhruba naznačit průběh této funkce.

Úloha 2

Soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 7, \\ 2x - 5y &= 10 \end{aligned}$$

řešte v oboru reálných čísel graficky i početně.

Komentář: Je to běžný typ úloh řešených početně i graficky, která jsou velmi užitečné právě tím, že na daný problém vrhají dvojí pohled a vytvářejí u řešitele potřebné zkušenosti

Úloha 3

Sestrojte graf funkce $y = |x + 2| - 3$ a dále početně i graficky zjistěte, kde je funkce kladná, nulová a záporná.

Komentář: Zde se řešitel setkává s jedním z elementů vyšetřování průběhu funkcí, jehož znalost patří k významným žádoucím výsledkům středoškolského vzdělání v matematice. Přitom, jako u úlohy 2, jsou opět uplatněny dva způsoby řešení, početní a grafické. Úloha nekončí jen formálně, ale navazuje v ní analýza „znaménka“ funkce v jednotlivých intervalech číselné osy.

Úloha 4

Pro celá nezáporná čísla x, y platí

$$
\begin{aligned}
&x + y \le 5,\\
&x + 2y \le 7,\\
&x \le 4,\ \ y \le 3.
\end{aligned}
$$

a) Najděte a graficky znázorněte všechna řešení (x, y) této soustavy čtyř nerovnic.

b) Zjistěte, pro které řešení (x, y) nabývá výraz $A = 3x + 4y$ největší hodnoty.

Komentář: Jde tu o grafické řešení soustavy nerovnic o dvou neznámých. Řešitel zde nachází vztah mezi nerovnicemi a jejich geometrickým významem; používá geometrické vyjadřování – přímky, poloroviny a jejich průniky. Zjišťování největší nebo nejmenší hodnoty patří k akcím matematiky důležitým pro praxi, zde navíc dostáváme řešení problému blízkého lineárnímu programování.

Úloha 5

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami délky $|AB| = 7{,}6$ cm, $|CD| = 5{,}3$ cm a s výškou 3,5 cm. Vypočtěte jeho obvod a obsah.

Komentář: Běžný typ úlohy, kde jde opět o pěstování souvislosti algebry a geometrie, tentokrát je prvotní geometrická konstrukce a pak se provádějí požadované výpočty.

Úloha 6

Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně a, K, L jsou středy hran GH, HE. Zobrazte řez krychle rovinou $\varrho = CKL$. (Kterou vlastnost rovnoběžných rovin přitom využijete?) Dále vypočtěte obvod a obsah řezu a odchylku roviny ϱ od roviny ABC.

Komentář: Je to úloha na stejném principu jako úloha 5, jen na vyšší úrovni. Po konstrukci ve volném rovnoběžném promítání (užitím požadované stereometrické věty) se provádějí výpočty v podstatě planimetrickými metodami a s využitím goniometrických funkcí.

Úloha 7

Zobrazte kvádr $ABCDEFGH$, kde D je v počátku, $A[4; 0; 0]$, $C[0; 6; 0]$, $H[0; 0; 4]$, přímku $p = MC$ a rovinu $\varrho = BGD$, kde M je střed hrany EH.

a) Najděte parametrické vyjádření přímky p.
b) Najděte obecnou rovnici roviny ϱ.
c) Vypočtěte a znázorněte průsečík R přímky p s rovinou ϱ.

Komentář: Je to typická úloha spojující učivo stereometrické s analytickou geometrií, tedy opět spojení grafického znázornění a výpočtů, tentokrát analyticko-geometrických.

Úloha 8

Je dána přímka $p = KL$, $K[5; -1; 1]$, $L[11; 1; -2]$ a rovina

$$\varrho\colon 2x - y - 2z + 7 = 0.$$

Určete jejich průsečík a odchylku s přesností na minuty.

Komentář: Tato úloha spojuje analytickou geometrii s goniometrií, je jednou z mnoha analyticko-geometrických úloh, v nichž se počítá velikost odchylky.

Úloha 9

Je dán pravidelný trojboký jehlan $ABCV$, jehož podstava ABC leží v rovině ϱ. Vypočtěte odchylku φ přímky $p = AS$ od roviny ϱ (s přesností na úhlové minuty), kde S je střed hrany CV; velikost podstavné hrany $a = 6{,}8$ cm, výška jehlanu $v = 9{,}5$ cm.

Komentář: Toto je zástupce úloh, v nichž vyniká vztah mezi stereometrií a goniometrií. Studenti také zjistí, že výsledek nezávisí na poloze roviny ϱ. Všechny čtyři poslední úlohy jsou významné pro pěstování prostorové představivosti řešitelů.

Úloha 10

Sestrojte trojúhelník ABC ($A[0; -3]$, $B[2; 0]$, $C[-1; 1]$) a jeho obraz $A'B'C'$ v zobrazení $U\colon M[x, y] \to M'[x', y']$, kde

$$\begin{aligned} x' &= 1 - 2y, \\ y' &= 2 - 2x. \end{aligned}$$

Užitím Pythagorovy věty vypočtěte velikost stran obou trojúhelníků a ověřte, že U je podobné zobrazení; vypočtěte poměr podobnosti.

Komentář: Tato úloha je méně obvyklá, ale velmi užitečná. Spojuje několik jednodušších úloh: sestrojení trojúhelníků v souřadnicové soustavě, výpočet souřadnic vrcholů $\triangle A'B'C'$, dále je tu Pythagorova věta, výpočet délek stran (vzdálenosti dvou bodů), odmocniny (částečné odmocňování), důkaz podobnosti trojúhelníků, poměr podobnosti.

Úloha 11

Je dána množina $D = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ a funkce

$$f_1\colon y = x + 1, \quad f_2\colon y = 1 - x^3, \quad f_3\colon y = 2 - |x + 1|.$$

Ve Vennově diagramu znázorněte množiny $A = \{x \in D;\ f_1(x) > 0\}$, $B = \{x \in D;\ f_2(x) > 0\}$, $C = \{x \in D;\ f_3(x) > 0\}$.

Komentář: Zde se drobně propojuje učivo o funkcích s Vennovými diagramy. Lze použít i jiné vhodné funkce a tímto způsobem zpracovat a znázornit například jejich definiční obory.

Úloha 12

Na číselné ose jsou dány body: $O[0]$, $A[-2]$, $B[5]$, $C[2]$. Vyznačte na ní, pojmenujte a zapište výsledné množiny $CB \cup \overrightarrow{OB}$, $AC \cup OB$, $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} \cap CB$; vyjádřete je též pomocí intervalů.

Komentář: Při učivu o množinách lze takto osvěžit pojmy úsečka, polopřímka i zápisy intervalů.

Úloha 13

Pro $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ určete definiční obor D a obory pravdivosti $P(n)$ výrokových forem $V(n)$: Pětimístné číslo $825x4$ je dělitelné číslem n. Dále určete obory pravdivosti výrokových forem: $V(3) \wedge V(4)$, $V(8) \vee V(9)$, $V(4) \Rightarrow V(6)$, $V(7) \Leftrightarrow V(5)$.

Komentář: Méně obvyklá úloha, kde se využije výrokových forem ke zopakování znaků dělitelnosti a naopak znaků dělitelnosti se využije k lepšímu pochopení pravdivosti složených výroků.

Úloha 14

V prostoru je dána množina M bodů se 13 prvky, žádné 3 body neleží na téže přímce a žádné 4 v téže rovině.

a) Kolik přímek

b) Kolik rovin

je určeno těmito body a kolik % z toho prochází daným bodem $A \in M$?

c) Kolik trojbokých jehlanů (čtyřstěnů) má všechny vrcholy z M a kolik procent z toho má za jeden vrchol daný bod $A \in M$?

Komentář: Využití geometrie při formulaci úloh z kombinatoriky je vhodné a běžné; navíc se zde znovu připomenou i procenta.

Úloha 15

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{3x-5}{5} = 1 + \frac{x}{10} + \frac{x^2}{10^2} + \frac{x^3}{10^3} + \dots$$

Komentář: I tato úloha je vhodná a běžná, spojuje se tu konvergence a součet nekonečné geometrické řady s řešením rovnice s neznámou ve jmenovateli a pak i kvadratickou rovnicí. Avšak toto spojení je poněkud formální, jde jen o cvičnou úlohu.

Úloha 16

Délky stran a, b, c trojúhelníku ABC jsou členy aritmetické posloupnosti; $a_1 = a$, $a_3 = b$, $a_6 = c$, diference d je přirozené číslo, $a = 9$, všechny délky jsou v cm. Vypočtěte obsah $\triangle ABC$ s přesností na desetiny cm^2 a úhel při vrcholu C s přesností na úhlové minuty.

Komentář: Užití vlastnosti aritmetických posloupností, trojúhelníkové nerovnosti, kosinové věty, stanovení úhlu z hodnoty kosinu (II. kvadrant), vzorec pro obsah trojúhelníku – Heronův nebo užitím dvou stran a úhlu jimi sevřeného, práce s kalkulátorem, zaokrouhlování. Tato úloha propojuje mimořádné množství matematických poznatků a navíc musí řešitel ze získaných poznatků přijít na to, že úloha má dvě řešení.

Úloha 17

V rovině znázorněte grafy funkcí $y = x^2$, $y = \dfrac{8}{x}$ a vypočtěte velikost úhlu, pod kterým se dané křivky protínají.

Komentář: Řešitel musí vědět, o jaké grafy půjde (tj. o grafy funkce kvadratické a nepřímé úměrnosti) a znázornit je, zjistit jejich průsečík, tedy řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, zjistit derivace funkcí v daném budě a jejich užitím pak stanovit hledanou velikost úhlu tečen v průsečíku.

Při procvičování učiva může učitel v úlohách zkombinovat i ty části matematiky, které spolu zdánlivě nesouvisejí, a nemusí ani jít o žádné dlouhé výpočty, jak ukazují následující dvě úlohy.

Úloha 18

Jsou dána čísla a, b, c větší než 1. Rozhodněte, zda platí výrok: „Jestliže čísla a, b, c splňují trojúhelníkovou nerovnost, pak ji splňují i logaritmy těchto čísel.“

Úloha 19

Náhodně zvolím číslo d, jeden z celých dělitelů čísla 6. Jaká je pravděpodobnost toho, že posloupnost $((d-2)^n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí?

Někdy se může zdát, jako by komplexní čísla stála trochu stranou od ostatních matematických disciplín, i když třeba na goniometrii mají vazbu velmi silnou. Významně také doplňují předchozí poznatky o řešení kvadratických rovnic, když objasňují případ záporného diskriminantu, a dávají nahlédnout i do algebraických rovnic vyšších stupňů (binomické rovnice).

Úloha 20

Užitím Moivreovy věty odvoďte vzorec pro vyjádření $\sin 5\alpha$ pomocí $\sin \alpha$. Odvozený vzorec ověřte pro $\alpha = 60°$.

Komentář: Moivreova věta, významná část učiva o komplexních číslech, s použitím binomické věty zde navazuje na vztahy mezi funkcemi kosinus a sinus, které jsou podstatné zase pro goniometrii, a navíc se zde ověřování výsledku připomenou konkrétní hodnoty těchto funkcí.

Hledejme však i další souvislosti. Víme, že v Gaussově rovině je násobení komplexní jednotkou velmi vydatným geometrickým nástrojem, když zprostředkovává otočení o její argument. Tohoto nástroje lze však využít i v planimetrii nebo v souvislosti s analytickou geometrií.

Úloha 21

V rovině je dán trojúhelník ABC, $A[-2; -1{,}5]$, $B[4; 1{,}5]$, $C[0; 4]$. Sestrojte jeho obraz v otočení se středem $O[0; 0]$ a úhlem otočení $\varphi = -90°$.

Komentář: Při využití komplexních čísel vyjádříme bod A jako komplexní číslo $a = -2 - 1{,}5\mathrm{i}$, otočení o úhel $\varphi = -90°$ znamená násobení komplexní jednotkou $-\mathrm{i}$, takže $a' = (-2 - 1{,}5\mathrm{i}) \cdot (-\mathrm{i}) = -1{,}5 + 2\mathrm{i}$, obrazem bodu A je tedy $A'[-1{,}5; 2]$, ...

Lze ovšem vyžadovat i klasické planimetrické řešení. V zadání můžeme volit i jiné úhly otočení, zejména takové, pro něž studenti znají hodnoty funkcí kosinus a sinus.

Úloha 22

Vyšetřete vzájemnou polohu (společné body) přímky $p\colon\ y = x+3$ a hranice čtverce $ABCD$, který je dán středem $S[0{,}5;\,1]$ a vrcholem $A[-2{,}5;\,-0{,}5]$. Čtverec i přímku znázorněte graficky.

Komentář: Při řešení se pracuje s vektory a s vektorovými rovnicemi, s analytickým vyjádřením úsečky a určuje se vzájemná poloha přímky a úsečky. Analytické výsledky se porovnávají s grafickým výsledkem. Při stanovování vrcholů čtverce lze využít komplexní čísla. Např. tak, že vektor $\boldsymbol{u} = A - S = (-3;\,-1{,}5)$ vyjádříme jako komplexní číslo $u = -3 - 1{,}5\mathrm{i}$, takže vektor $\boldsymbol{v} = B - S$ dostaneme z násobení $(-3 - 1{,}5\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} = 1{,}5 - 3\mathrm{i}$, tedy $\boldsymbol{v} = (1{,}5;\,-3)$ a $B = S + \boldsymbol{v} = \ldots$

Možná se někomu takové řešení nelíbí, že není „čisté“. V této chvíli se vraťme k úvodu tohoto článku, kde jsme formulovali smysl matematického vzdělání – abychom s pomocí matematiky dovedli řešit praktické problémy Při řešení praktických úloh, tedy úloh přímo z praxe, však není povětšinou řečeno nic o tom, jaká metoda řešení má být použita. Jsou to problémy (úlohy), kde *jediným* cílem je najít jejich řešení. Řešitel musí sám vhodnou metodu objevit a někdy přitom i opakovaně zkoušet, „jak na to“ (viz [1]). Proto je tak důležité, aby měl „ve své brašně“ kompletní sadu matematických znalostí i s jejich souvislostmi. Z tohoto hlediska lze posuzovat i řešení úloh 21 a 22; prostě „někdo“ při řešení postupoval takto. V podmínkách školy takovými úlohami bývají úlohy matematických soutěží, například Matematické olympiády.

Řešit úlohy z „opravdové praxe“ při výuce matematiky není reálné, ale lze vytvořit jiné modelové úlohy, kde jediným cílem je také jen jejich vyřešení. Studenti by se s úlohami, kde metoda řešení spočívá na jejich „objevu“ nebo výběru, měli během studia občas setkávat. Podívejme se na dvě ukázky úloh s matematickou formulací a jako poslední ukázku úlohy z praxe.

Úloha 23

Vrchol paraboly leží na ose x a její osa je rovnoběžná s osou y. Body $T_1[0;\,-2]$, $T_2[5;\,-4{,}5]$ jsou dotykové body tečen vedených k parabole z jistého bodu M. Zjistěte úhel těchto tečen.

Komentář: Jde o úlohu méně obvyklou. Řešitel tu musí samostatně volit postup a vhodné metody řešení jednotlivých fází postupu. Nabízí se analytická geometrie a diferenciální počet i kombinaci obou těchto metod. (Tato úloha je i početně zajímavá.)

Úloha 24

Je dána kružnice $k = (S; r)$ a bod M tak, že $|SM| = p$. Dotykové body tečen z bodu M ke kružnici k jsou T_1, T_2.

a) Vypočtěte obsah P trojúhelníku MT_1T_2. Vyčíslete jeho hodnotu pro $r = 3$, $p = 5$.

b) Kolik % tohoto trojúhelníku leží v daném kruhu?

Komentář: Úloha není zcela jednoduchá a nabízí řešiteli dokonce několik způsobů řešení.

Úloha 25

Jízda kabinky lanovky stojí 3 600 Kč. K lanovce přišla skupina turistů v počtu kolem deseti a vyžádala si zvláštní jízdu. Bylo jim to umožněno, ale každý z nich musel zaplatit o 40 Kč víc než by stála normální jízdenka. Kolik těch turistů bylo?

Komentář: Možná se vám bude zdát, že to zadání není zcela jasné a přesné, ale i takové bývají úlohy z praxe, v nichž zadavatel „samozřejmosti“ neuvádí. Tato úloha má dvě řešení.

Literatura

[1] *Trávníček, S.*: Pojďme na to s matematikou (a někdy i s počítačem). Vydavatelství UP Olomouc, 2014, v tisku.

Zavedení pomocného prvku – užitečná heuristická strategie

JIŘÍ PŘIBYL – JIŘINA ONDRUŠOVÁ

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

Tímto příspěvkem volně navazujeme na článek [5], přičemž oba spadají do série článků zabývajících se možnostmi využití heuristických strategií na základní a střední škole.

Základní idea této strategie spočívá v tom, že zavedením tzv. *pomocného prvku* se řešení pro řešitele stane snadněji dosažitelné. Ve shodě s [9] vymezujeme pomocný prvek jako objekt, který se na první pohled v úloze nevyskytuje, a my jej do úlohy vpravíme s nadějí, že nám usnadní přístup k řešení. Polya tuto strategii nazývá *Auxiliary elements* a chápe ji v širším kontextu, než v jakém ji budeme prezentovat my, neboť zde jsme se zaměřili výhradně na školské úlohy. Při zavedení pomocného prvku u geometrických úloh se obvykle jedná o doplnění přímek, úseček, kružnicových oblouků či dalších různých obrazců, v případě algebraických úloh přičítáme vhodné číslo k oběma stranám rovnice. Protože tento prvek není v úloze explicitně uveden a my jej do úlohy vnášíme, nazýváme tento způsob řešení strategií *Zavedení pomocného prvku* (budeme též značit ZPP). Tato strategie se ve školské matematice často užívá, aniž bychom si tuto skutečnost uvědomovali. V následujících úlohách budeme ukazovat jak obvyklé použití ZPP, tak i takové, kde to není na první pohled zřejmé.

V některých případech může být pomocný prvek v úloze již obsažen, avšak není přímo uveden v zadání úlohy. Potom hovoříme o tzv. *skrytém (pomocném) prvku* a obvykle se jedná o nějaký objekt, jehož existence je dána přímo povahou objektů vyskytujících se v úloze – například úhlopříčka v páté úloze.

Věříme, že budeme-li o strategii *zavedení pomocného prvku* hovořit a ilustrovat ji na typických úlohách, potom můžeme docílit jejího častějšího aktivního používání i v těch případech, kdy její užití zjevné není.

Tuto heuristickou strategii budeme prezentovat při řešení několika úloh odlišného charakteru.

Poznamenejme ještě, že mnohé v textu uvedené ilustrující úlohy lze řešit i jinak, buď standardní cestou, nebo jinou heuristickou strategií. U každé úlohy uvádíme pouze řešení námi prezentovanou strategií. Výhodnost jejího použití vysvitne samozřejmě nejvíce tam, kde je jako způsob řešení nejefektivnější, či dokonce jedinou cestou k vyřešení daného problému.

V rámci námi budované teorie heuristických strategií také hovoříme o „cestách“ řešení dané úlohy, přičemž vymezujeme následující tři základní kategorie:

- *algebraická cesta* – spočívá v algebraickém řešení dané úlohy, opírajícím se o zavedení neznámé;
- *aritmetická cesta* – je založena na číselném způsobu řešení (bez zavedení neznámé);
- *grafická cesta* – opírá se o „obrázek“, umožňující vyřešit danou úlohu.

O těchto cestách se zmiňujeme z toho důvodu, že budeme ukazovat použití jednotlivých pomocných prvků ve všech třech případech.

Následující tři úlohy ilustrují tuto strategii při řešení algebraických úloh, v nichž budeme využívat různé substituce.

Úloha 1

V oboru reálných čísel řešte rovnici $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

Řešení. Uvedená algebraická rovnice je řešitelná v reálných číslech, avšak přímé nalezení kořenů může být nesnadné. Povšimneme-li si, že exponenty u neznáme jsou sudá čísla, může nám to evokovat zavedení *pomocného prvku* pomocí substituce $y = x^2$.

Řešením takto získané rovnice $y^2 - 5y + 6 = 0$ jsou reálná čísla $y_1 = 2$ a $y_2 = 3$.

Vraťme se nyní k naší substituci. Namísto jedné bikvadratické rovnice máme dvě rovnice kvadratické, přičemž nalezení jejich řešení je rutinní záležitostí a s ohledem na zvolenou substituci získáme čtyři řešení původní rovnice.

Odpověď: Řešením rovnice jsou reálná čísla: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a $-\sqrt{3}$.

Ve výše uvedené úloze byla substituce patrná na první pohled. I ve druhé úloze je možné použití substituce snadno nahlédnutelné a právě jejím použitím se stává úloha snadněji řešitelnou.

Úloha 2

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} &= -1, \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} &= 4. \end{aligned}$$

Řešení. Danou soustavu rovnic můžeme řešit standardním způsobem. Zde si ukážeme, že zavedením vhodných pomocných prvků se řešení původní soustavy stane pro nás snáze dosažitelné.

Užitím substitucí

$$u = \frac{1}{x} \quad \text{a} \quad v = \frac{1}{y} \qquad (x \neq 0,\ y \neq 0)$$

zavedeme do úlohy *pomocné prvky* u a v, s jejichž pomocí vytvoříme novou soustavu rovnic

$$\begin{aligned} u + 2v &= -1,\\ 3u - v &= 4. \end{aligned}$$

Řešení soustavy dvou lineárních rovnic o neznámých u a v je již rutinní úlohou, řešením jsou čísla $u = 1$ a $v = -1$. Vrátíme-li se k našim substitucím, snadno najdeme řešení původní soustavy rovnic.

Odpověď: Řešením soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $(x, y) = (1; -1)$.

V předchozích dvou úlohách se zavedení pomocného prvku pomocí substituce nabízelo relativně samo. Následující úloha nám ukazuje, že někdy nemůžeme pomocný prvek do úlohy zavést hned na začátku procesu řešení, ale musíme mu trochu „vyjít naproti“. Na tuto skutečnost poukazuje např. následující obtížnější úloha.

Úloha 3

V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$x^4 + 10x^3 + 38x^2 + 65x + 36 = 0.$$

Řešení. Způsob řešení pouze načrtneme. Nejprve danou rovnici upravíme na vhodnější tvar

$$x^4 + 10x^3 + 38x^2 + 65x + 36 = (x^2 + 5x + 6)^2 + (x^2 + 5x + 6) - 6 = 0.$$

Substitucí zavedeme *pomocný prvek* y, pro který platí $y = x^2 + 5x + 6$. Původní rovnici můžeme poté nahradit novou rovnicí

$$y^2 + y - 6 = 0,$$

jejímž řešením jsou reálná čísla $y_1 = 2$ a $y_2 = -3$. Vrátíme-li se k naší substituci, získáme dvojici kvadratických rovnic:

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \quad \text{a} \quad x^2 + 5x + 9 = 0,$$

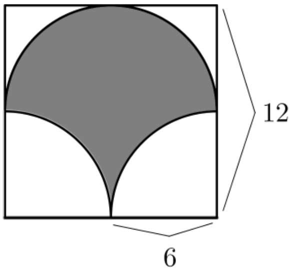
přičemž pouze první z nich má řešení (v oboru reálných čísel).

Odpověď: Reálnými kořeny dané rovnice jsou čísla $x_1 = -1$ a $x_2 = -4$ a jiné reálné kořeny nemá.

Podívejme se nyní na úlohy, v nichž se vyskytuje pomocný prvek geometrického typu.

Úloha 4

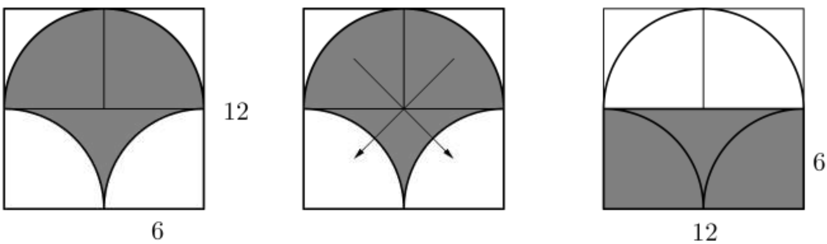
Vypočítejte obsah rovinného obrazce, jehož hranici tvoří vyznačené kružnicové oblouky. Údaje v obr. 1 jsou uvedeny v centimetrech (úloha je převzata z [7]).



Obr. 1

Řešení. Kromě obvyklého početního řešení založeného na použití vzorců pro obsah čtverce a kruhu můžeme tuto úlohu velice elegantně vyřešit právě pomocí strategie Zavedení pomocného prvku.

Budeme pracovat s obrazcem, který je znázorněn v obr. 1. Do něj si umístíme několik *pomocných prvků* – úseček – způsobem patrným z obr. 2. Tyto úsečky nám rozdělí obrazec na několik částí a následně snadnou manipulací ukážeme, že jeho obsah je roven obsahu obdélníku o stranách 6 a 12 centimetrů.



Obr. 2

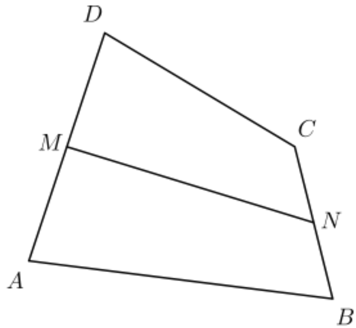
Odpověď: Obsah uvažovaného rovinného obrazce je 72 cm^2.

Úloha 5

V rovině je dán libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Označme M, N po řadě středy stran AD a BC. Dokažte nerovnost

$$|MN| \leq \frac{1}{2}\left(|AB| + |CD|\right).$$

Řešení. Zadání úlohy si můžeme vhodně ilustrovat obr. 3.

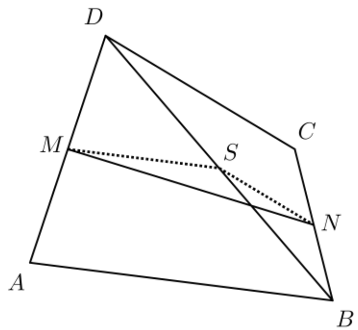


Obr. 3

Idea důkazu je zřetelnější po zavedení *pomocného prvku* – úhlopříčky BD, na které sestrojíme její střed S (viz obr. 4).

Stručně již jen okomentujme ideu důkazu. Úsečky MS a NS jsou po řadě střední příčky v trojúhelnících ABD a CDB, proto platí

$$|MS| = \frac{1}{2}|AB|, \qquad |NS| = \frac{1}{2}|CD|.$$



Obr. 4

Odtud plyne

$$|MN| \leq |MS| + |NS| = \frac{1}{2}\left(|AB| + |CD|\right),$$

přičemž rovnost nastává, právě když S leží na úsečce MN.

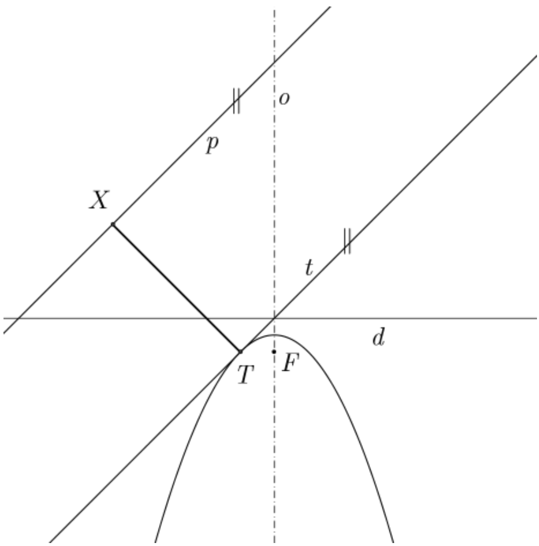
Otázka pro čtenáře: Kdy nastavá situace, že bod S je bodem úsečky MN?

Následující ukázka představuje typickou školskou úlohu.

Úloha 6

Je dána parabola $y = 4 - x^2$ a přímka $p\colon y = x + 8$. Na dané parabole najděte bod, jehož vzdálenost od přímky p je nejmenší.

Řešení. Kromě obvyklého řešení pomocí diferenciálního počtu můžeme tuto úlohu efektivně vyřešit i námi prezentovanou strategií. Jako *pomocný prvek* zavedeme tečnu k zadané parabole, která je rovnoběžná s přímkou p (viz obr. 5).



Obr. 5

Je zřejmé, že bod dotyku T této tečny k parabole je hledaným bodem ze zadání úlohy. Protože rovnice přímky p je $y = x + 8$ a hledáme rovnoběžku k dané přímce, potom rovnice hledané tečny t je ve tvaru $y = x + c$.

Protože bod T je průsečíkem tečny t a zadané paraboly, můžeme sestavit následující rovnici

$$x + c = 4 - x^2,$$

tj.

$$x^2 + x + (c - 4) = 0, \tag{1}$$

kde reálné číslo c je parametrem v rovnici (1).

Přímka t bude tečnou, právě když diskriminant rovnice (1) bude roven nule. Uvědomme si, že nás nezajímá, pro kterou hodnotu reálného parametru c se tak stane.

Potom pro x-ovou souřadnici t_1 bodu T platí

$$t_1 = -\frac{1}{2}.$$

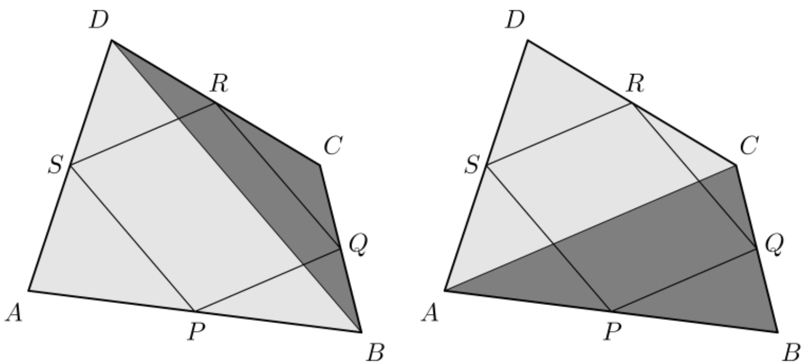
Dosazením do rovnice paraboly již snadno určíme druhou souřadnici bodu T.

Odpověď: Hledaný bod T má souřadnice $\left[-\frac{1}{2}; \frac{15}{4}\right]$.

Úloha 7

V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Nechť P, Q, R a S jsou po řadě středy stran AB, BC, CD a DA. Dokažte, že čtyřúhelník $PQRS$ je rovnoběžník.

Řešení. K nalezení důkazu využijeme obr. 6.



Obr. 6

Uvažujme v daném čtyřúhelníku jako pomocné prvky obě úhlopříčky. Vzniknou tak trojúhelníky ABD, BCD, ACD a ABC. Ukažme nyní, že úsečky SP a QR jsou rovnoběžné. Protože bod S je středem úsečky AD a bod P je středem úsečky AB, úsečka SP je střední příčkou trojúhelníka ABD rovnoběžnou se základnou BD. Bod R je středem strany CD a bod Q je středem strany BC, tudíž úsečka QR je střední příčkou trojúhelníka BCD rovnoběžnou se základnou BD. Protože SP je rovnoběžná s BD a QR je rovnoběžná se BD, tak SP je rovnoběžná s QR. Obdobně dokážeme rovnoběžnost i pro úsečky PQ a SR.

Povšimněme si následující skutečnosti. Vzhledem k tomu, že strany uvažovaného rovnoběžníka jsou střední příčky v trojúhelnících ABD, BCD, ACD a ABC, potom délky stran jsou poloviční délkám příslušných úhlopříček, které tvoří přepony trojúhelníků.

Otázka pro čtenáře: Kdy bude rovnoběžník obdélníkem popř. čtvercem?

Otázka pro čtenáře: Zabývejte se případem, kdy je původní čtyřúhelník $ABCD$ nekonvexní. Bude čtyřúhelník $PQRS$ rovnoběžníkem? Pokud ano, tak proč?

Poznámka. Uvedené tvrzení se nazývá *Varignonova*[1] *věta*, kterou můžeme najít v celé řadě prací. Velmi dobrý úvod do dané problematiky můžeme najít např. v [3].

Na závěr uvádíme historickou úlohu, jejíž autorství je připisováno Isaacu Newtonovi. Její zadání lze najít v celé řadě publikací. Zde přebíráme konkrétní hodnoty z publikace [6, s. 54]. Zadání v obecnější podobě můžeme najít [4, s. 9], nebo můžeme jít přímo k prameni [8, s. 89].

---

[1] *Pierre Varignon* (1654–1722) byl francouzským matematikem a duchovním, který nejprve vystudoval jezuitskou kolej v Caen a v roce 1676 byl vysvěcen na kněze. Ve studiu pokračoval dál na univerzitě v Caen a v roce 1682 získal titul M.A. (S touto univerzitou jsou také spjata jména Pierre-Simon Laplace (1749–1827) a Henri Poincaré (1854–1912)). Po přečtení Eukleidových Základů pokračoval studiem Descartesovy Geometrie a zřejmě tato dvě díla nadále určila další směr jeho bádání. Přestože zůstal věren svému řádu, pustil se do studia matematiky. Roku 1688 nastoupil na post profesora Mazarinovy koleje a téhož roku byl také přijat za člena královské akademie věd (Francouzská akademie věd), v roce 1713 se stal členem Královské Pruské akademie věd (Berlínská akademie) a v roce 1718 byl přijat za člena Královské společnosti (Královská Londýnská společnost na podporu přírodních věd). Byl důvěrným přítelem jak Newtona a Leibnize, tak i rodiny Bernoulliů. Po l'Hospitalovi převzal nadšení pro diferenciální počet a ve své době se stal jedním z nejmocnějších obhájců nově vznikající matematické disciplíny ve Francii.

Úloha 8

Tráva na louce roste stále stejně rychle a je všude stejně hustá. Víme, že 60 krav by spáslo všechnu trávu za 24 dnů a 30 krav za 60 dnů. Kolik krav by spáslo trávu za 100 dnů?

Řešení. Předpokládejme, že každá kráva spase za den stejné množství trávy. Jako pomocný prvek zavedeme množství trávy, které spase jedna kráva za jeden den. Toto množství nazveme porce.

Na konci 24. dne spáslo 60 krav 1440 porcí. Na konci 60. dne spáslo 30 krav 1800 porcí. Za 36 dnů proto vyrostlo na louce 360 porcí, tzn. 10 porcí za den. Na začátku tak muselo být na louce 1200 porcí. Do konce stého dne musí krávy spást 2200 porcí. Hledaný počet krav je proto

$$\frac{2200}{100} = 22.$$

Odpověď: Trávu by spáslo 22 krav.

Poznámka 1. Newton řeší úlohu v obecné podobě a jeho řešení je čistě algebraické. Po vyřešení úlohy ukazuje řešení pro konkrétní hodnoty.

Poznámka 2. Pro zajímavost zde zmiňme fakt, že Newton se ve své úloze nevyjadřuje o kravách, nýbrž o volech, jak správně zmiňuje [2, s. 227], na rozdíl od anglicky psané literatury.

Tento článek byl zpracován za podpory grantu GA ČR č. 407/12/1939.

Literatura

[1] *Ball, R. W. W.*: A Short Account of the History of Mathematics. Dover Publication, New York, 1960.

[2] *Bečvář, J., Fuchs, E.* (*eds.*): Matematika v 16. a 17. století. Prometheus, Praha, 1999.

[3] *Coxeter, H. S. M, Greitzer, S. L.*: Geometry Revisited. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.

[4] *Dörrie, H.*: 100 Great Problems of Elementary Mathematics. Translated by David Antin. Dover Publications, Inc., New York, 1965.

[5] *Eisenmann, P., Břehovský, J.*: Vypuštění podmínky – užitečná heuristická strategie. MFI roč. 22 (2013), č. 3.

[6] *Kopka, J.*: Umění řešit matematické problémy. RNDr. Karel Hoza – HAV, Praha, 2013.

[7] *Maláč, J., Kurfürst, J.*: Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ. SPN, Praha, 1981.

[8] *Newton, I.*: Arithmetica Universalis; Sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber. 1707.
[9] *Polya, G.*: How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press, Princeton, 2004.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 6. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 203

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a D pata jeho výšky z vrcholu A na stranu BC. Dokažte, že osa úhlu CAB je rovněž osou úhlu DAO.

Erich Windischbacher (Graz)

Úloha 204

Nechť pro reálná čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2014}$ současně platí

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{2014} \geq 0 \quad \text{a} \quad a_{54}^2 + a_{55}^2 + \ldots + a_{2014}^2 \geq \frac{19}{2}.$$

Dokažte, že platí nerovnost

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014} \geq \sqrt{2014}.$$

Může v této nerovnosti nastat rovnost?

Jozef Mészáros

Dále uvádíme řešení úloh 197 a 198, jejichž zadání byla zveřejněna ve čtvrtém čísle loňského (22.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 197

Dokažte, že pro libovolné liché číslo n je

$$20n^4 + 14n^2 + 2014$$

dělitelné šestnácti.

Martin Panák

Řešení. Úpravou zadaného výrazu dostaneme

$$20n^4 + 14n^2 + 2014 = 2(2n^4 - n^2 - 1) + 16(n^4 + n^2 + 126).$$

Nyní stačí ukázat, že výraz

$$2n^4 - n^2 - 1 = (2n^2 + 1)(n - 1)(n + 1)$$

je pro každé liché číslo n dělitelný osmi.

Ovšem $(n - 1)(n + 1)$ je součin dvou po sobě jdoucích sudých čísel, proto je jedno z nich sudé a druhé dělitelné čtyřmi. Jejich součin je tedy dělitelný osmi, což jsme chtěli dokázat.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Filip Bialas* z G v Praze 4, Konstantinova, *Markéta Calábková*, *Petr Vincena* a *Marian Poljak*, všichni z GJŠ v Přerově, *Antonín Češík* ze SPŠE v Pardubicích, *Martin Hora* z G v Plzni, Mikulášské nám. 23, *Ondřej Hübsch* z G v Praze 6, Arabská, *Lukáš Knob* z G v Kojetíně, *Jan Krejčí* a *Jan Šarman*, oba z GMK v Bílovci, *Karolína Kuchyňová* z GML v Brně, *Tomáš Lysoněk* z G v Uherském Hradišti, *Viktor Němeček* z G v Jihlavě, J. Masaryka, *Tomáš Novotný* z G v České Lípě, *Milan Pultar* z GJK v Praze 6, Parléřova, *Martin Raszyk* z G v Karviné, *Jakub Svovoda* z G v Havířově, Komenského a *Jan Šorm* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Pavel Turek* z G v Olomouci–Hejčíně a *Martin Zahradníček* z G ve Šlapanicích.

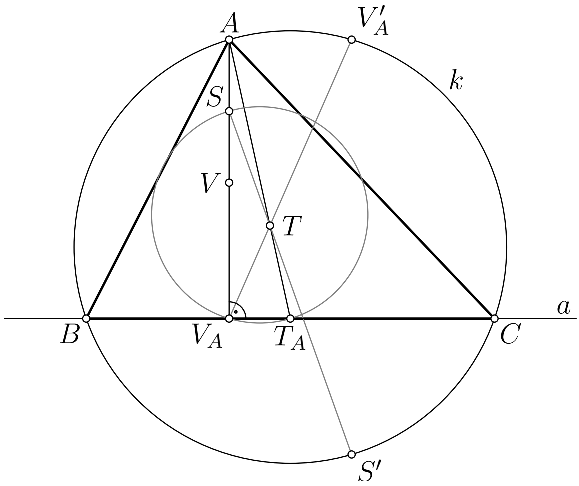
Úloha 198

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán vrchol A, průsečík výšek V a střed T_A strany BC. Přitom předpokládejme, že A, V, T_A jsou tři navzájem různé body.

Šárka Gergelitsová

Řešení. Označme V_A patu výšky trojúhelníku ABC z vrcholu A, T jeho těžiště a S střed úsečky AV. Při řešení úlohy užijeme vlastností Feuerbachovy kružnice. Tato kružnice je stejnolehlá s kružnicí trojúhelníku

ABC opsanou se středem stejnolehlosti T a keficientem -2. Přitom na této Feurbachově kružnici leží body T_A, V_A a S.



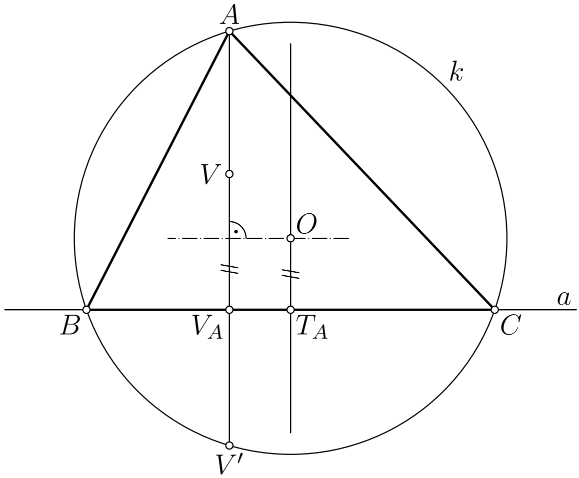
Obr. 1

Odtud již plyne konstrukce. Sestrojíme bod V_A jako průsečík přímky VA s kolmicí a procházející bodem T_A. Sestrojíme těžiště T jako bod, který dělí úsečku AT_A v poměru $2:1$ a sestrojíme střed S úsečky AV. Pokud $A = V_A$, nemá úloha řešení. Sestrojíme body S', V'_A jako obrazy bodů S a V_A ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2. V případě $A = V'_A$ je kružnicí k trojúhelníku opsanou kružnice s průměrem AS', jinak je to kružnice procházející body A, V'_A a S'. Pokud kružnice k protíná přímku a ve dvou bodech, jsou jimi vrcholy B a C (bez určení pořadí), jinak úloha nemá řešení.

Jiné řešení (podle Františka Jáchima). Využijeme vlastnost Eulerovy přímky, na které leží V, T a střed O kružnice k trojúhelníku opsané, přičemž bod T dělí úsečku VO v poměru $2:1$.

Odtud již plyne konstrukce. Stejně jako v předcházejícím řešení sestrojíme bod T a přímku a. Bod O bude obrazem bodu V ve stejnolehlosti se středem v bodě T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Sestrojíme kružnici k se středem v bodě O procházející bodem A. Pokud má tato kružnice dva průsečíky s přímkou a, jsou jimi vrcholy B a C, jinak úloha nemá řešení.

Jiné řešení (*podle Jana Šarmana*). Využijeme vlastnosti bodu V' souměrně sdruženého s ortocentrem V podle přímky BC. Tento bod leží na kružnici k trojúhelníku ABC opsané, tedy AV' je tětivou této kružnice. Dále víme, že střed O kružnice k leží na kolmici k přímce BC, tedy na rovnoběžce s přímkou AV a současně na ose úsečky AV'. Odtud již plyne konstrukce.



Obr. 2

Poznámka. Antonín Češík použil podobnou ideu jako v předcházejícím řešení, jen si uvědomil, že bod S' souměrně sdružený s ortocentrem V podle středu T_A strany AB leží také na kružnici k opsané trojúhelníku ABC a AS' je průměrem kružnice k.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Antonín Češík* ze SPŠE v Pardubicích, *Jan Krejčí* a *Jan Šarman*, oba z GMK v Bílovci, *Karolína Kuchyňová* z GML v Brně, *Tomáš Lysoněk* z G v Uherském Hradišti, *Marian Poljak* z GJŠ v Přerově, *Martin Raszyk* z G v Karviné, *Jan Šorm* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně, *Petr Vincena* z GJŠ v Přerově a *Martin Zahradníček* z G ve Šlapanicích.

Pavel Calábek

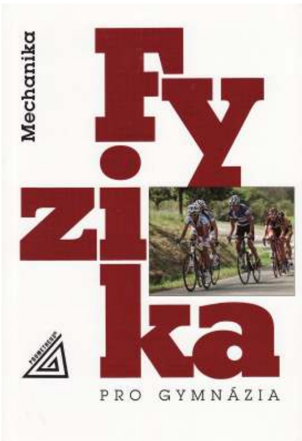
FYZIKA

K učebnici MECHANIKA pro gymnázia

EMANUEL SVOBODA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Nakladatelství PROMETHEUS, spol. s r.o. vydalo v roce 2013 jako své páté přepracované vydání učebnici pro výuku mechaniky na gymnáziích [1]. Oproti dosavadním čtyřem vydáním došlo k několika změnám a to jednak v uspořádání učebnice, jednak v didaktickém zpracování některých částí učiva mechaniky.



Oproti předcházejícím vydáním učebnice „zeštíhlela“. Její papírová forma totiž obsahuje jen učivo, které odpovídá požadavkům Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia [2], (dále jen RVP G), obor Fyzika. *Rozšiřující učivo*, které jde nad rámec učiva a očekávaných výstupů podle RVP G, je na přiloženém CD jako součásti učebnice.

Toto rozšiřující učivo (označené pro orientaci písmenem **R**) obsahuje 15 námětů:

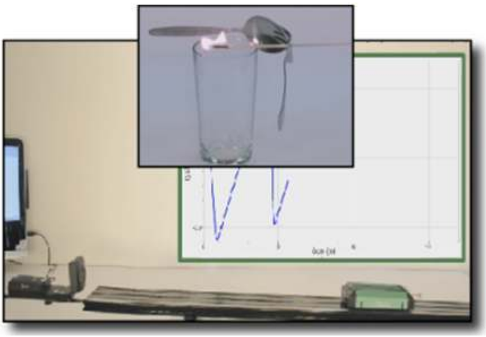
R1 Okamžitá rychlost hmotného bodu
R2 Rovnoměrný pohyb hmotného bodu s nenulovými počátečními podmínkami
R3 Rovnoměrně zrychlený pohyb s nenulovými počátečními podmínkami
R4 Zrychlení při rovnoměrném pohybu po kružnici
R5 Zrychlení při nerovnoměrném křivočarém pohybu
R6 Časový účinek síly. Impuls síly
R7 Pružný a nepružný přímý ráz dvou těles
R8 Valivý odpor
R9 Neinerciální vztažné soustavy. Setrvačné síly
R10 Otáčející se vztažné soustavy
R11 Jednoduché stroje
R12 Bernoulliova rovnice
R13 Měření rychlosti proudění tekutin
R14 Proudění reálné kapaliny
R15 Obtékání těles reálnou kapalinou

Dále jsou na přiloženém CD uvedena *teoretická a laboratorní cvičení.* Výběr, zaměření a zpracování jsou stejná jako v předchozích vydáních učebnice Mechanika. Teoretická cvičení (označení TC) obsahují jednak řešené příklady, jednak soubory dalších úloh, řada z nich je nových. Cílem těchto cvičení, kterých je celkem 13, je prohloubení poznatků získaných ve výukových hodinách a jejich využití k řešení konkrétních problémů. Podobný úkol má šest laboratorních cvičení (označení LC).

Přiložené CD obsahuje i další doplňující a obrazové materiály. Jsou jimi:

- *Historické poznámky* k 16 významným osobnostem mechaniky (označení H); ke zpracování tohoto námětu byla mimo jiné využita publikace [3] se svolením autora publikace Dějiny fyziky *doc. Ing. Ivana Štolla, CSc.* Uvedení historických poznámek bylo vedeno snahou podpořit naplňování hodnotových cílů při výuce fyziky, především úctu k historii fyziky jako nezastupitelné součásti kulturního dědictví a prohlubování zájmu o přírodní vědy. V neposlední řadě pak poskytnout náměty pro realizaci průřezového tématu Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech.

- *Slovníček fyzikálních pojmů*, který přehledně shrnuje důležité fyzikální pojmy
- *Animace k učivu mechaniky* (označení A), jejichž autorem je *RNDr. Petr Janeček*; celkem je na přiloženém CD umístěno 11 animací s náměty na rovnoměrné a nerovnoměrné přímočaré pohyby, rovnoměrný pohyb po kružnici, volný pád, zákon zachování mechanické energie a na vrhy v tíhovém poli Země.
- Videozáznamy (označení V), jejichž autory jsou *Mgr. Lucie Filipenská*, *Mgr. Jakub Jermář* a hlavní autor učebnice; náměty videozáznamů jsou beztížný stav, těžiště, třecí síla, rovnoměrný přímočarý pohyb, rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený přímočarý pohyb a Newtonovo kyvadlo.



- *Literatura a webové stránky*, ze kterých lze čerpat další poznatky z klasické mechaniky.

Odkazy na doplňující materiály jsou v textu učebnice vyznačeny barevnou značkou, např. ↗A2-7, což je v tomto případě odkaz na animaci rovnoměrného pohybu po kružnici.

Z hlediska metodického zpracování učiva mechaniky došlo také ke změnám. Uveďme si některé:

a) Byl upřesněn výklad pojmu *průměrná rychlost* jako skalární veličiny v návaznosti na základní školu, tj. vztahem $v_\mathrm{p} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ pro daný úsek trajektorie, resp. $v_\mathrm{p} = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots}$ pro určení průměrné rychlosti na celé trajektorii, známe-li délky jednotlivých úseků $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots$ a jim odpovídající doby $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots$ Je zdůrazněno, že tedy neplatí, že bychom postupovali při určování průměrné rychlosti tak, že vypočítáme průměrné rychlosti na jednotlivých úsecích trajektorie pohybujícího se tělesa a z nich pak vytvoříme aritmetický průměr. K tomuto upozornění, které v dřívější učebnici nebylo zdůrazněno, je pak uveden názorný příklad.

b) Aby bylo důsledně dodrženo výše uvedené upozornění, bylo nutné změnit postup při odvozování vztahu pro *dráhu rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu*. V předchozích učebnicích mechaniky pro gymnázia [viz např. 4, str. 44] bylo totiž při odvození dráhy $s = \frac{1}{2}at^2$ použito vztahu pro průměrnou rychlost ve tvaru $v_\mathrm{p} = \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}at$ a vztahu pro dráhu $s = v_\mathrm{p}t$. V nové učebnici je využito poznatku známého žákům z předchozího tématu, a sice toho, že z grafu závislosti velikosti rychlosti na čase u rovnoměrného pohybu lze dráhu vypočítat jako obsah pod grafem této závislosti. Využitím metody analogie je proto proveden rozbor grafu závislosti velikosti okamžité rychlosti v na čase t pro nulovou počáteční rychlost a při daném zrychlení a, jak je uvedeno na obr. 1a. Předpokládáme, že čas se postupně zvětšuje z počáteční hodnoty 0 o tak malé přírůstky Δt, že velikosti okamžité rychlosti $v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_n$ v každém intervalu Δt lze považovat prakticky za konstantní. Potom odpovídající dráhy $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n$ můžeme vyjádřit vztahy $s_1 = v_1\Delta t$, $s_2 = v_2\Delta t$, $\ldots$, $s_i = v_i\Delta t$, $\ldots$, $s_n = v_n\Delta t$. Součet

$$s = v_1\Delta t + v_2\Delta t + \ldots + v_i\Delta t + \ldots + v_n\Delta t$$

tedy udává celkovou dráhu, kterou vozík ujel za celkový čas t.

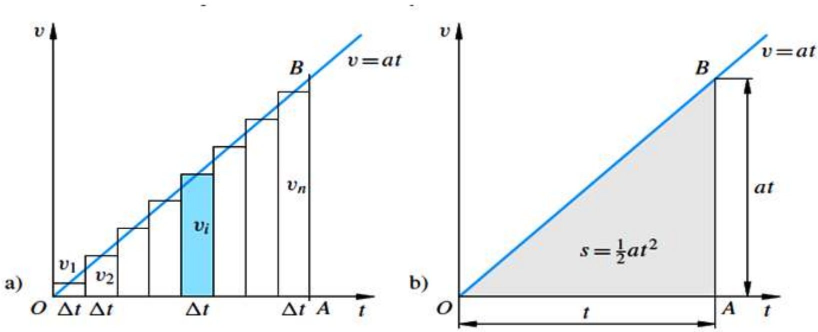
Je uvedena poznámka, že výše uvedený postup není úplně přesný, protože velikost rychlosti se přece jen i na intervalu délky Δt trochu mění, ale můžeme tuto přesnost zvýšit, když Δt volíme dosti malé, tedy celkový čas rozdělíme na větší počet velmi krátkých časových intervalů.

Dráhu $s_i = v_i\Delta t$, kterou hmotný bod urazí za velmi malý čas Δt, znázorňuje obsah barevného obdélníku na obr. 1a. Náš odhad celkové dráhy je dán součtem obsahů všech obdélníků, tedy obsahem plochy pod „zubatou křivkou“. Dělíme-li celkový čas na větší a větší počet kratších a kratších intervalů, splyne „zubatá křivka“ s polopřímkou $v = at$. Celkový obsah plochy pak snadno určíme jako obsah trojúhelníku OAB na obr. 1b. Celková dráha s, kterou vozík ujede rovnoměrně zrychleným pohybem za celkový čas t, je tedy rovna obsahu plochy trojúhelníku OAB, neboli

$$s = \frac{at \cdot t}{2} = \frac{1}{2}at^2.$$

Na CD v rozšiřujícím učivu **R3** *Rovnoměrně zrychlený pohyb s nenulovými počátečními podmínkami* je pak analogicky odvozen vztah pro dráhu

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$



Obr. 1

c) Pokud se týká pojmu *okamžitá rychlost*, je v upravené učebnici [1] definován analogicky jako v předchozí učebnici [4], tedy nejdříve velikost tohoto vektoru formulací: „Velikost okamžité rychlosti v daném bodu trajektorie a v daném čase je definována jako průměrná rychlost ve velmi malém časovém intervalu na odpovídajícím úseku trajektorie daného bodu“. V základním textu učebnice je pak uvedeno tvrzení, že „vektor okamžité rychlosti leží v tečně v uvažovaném bodě trajektorie a jeho směr je určen směrem pohybu“. Tvrzení je doloženo jednak animací na přiloženém CD, jednak uvedením příkladu odlétávání jisker ve směru tečen k obvodu brusného kotouče při broušení. V rozšiřujícím učivu je v **R1** *Okamžitá rychlost hmotného bodu* pak odvozena okamžitá rychlost v pomocí časové změny polohového vektoru Δr (stejně jako v učebnici [4]).

d) V učebnici [1] je podrobněji zpracováno smykové tření, je rozlišena klidová třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ (včetně mezní – kritické) od třecí síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ za pohybu. Pro stručnost vyjadřování se pak používá jen názvu třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$. Měření součinitele smykového tření je námětem laboratorní práce a k jeho určení s použitím počítače je také uveden videozáznam. O třecí síle vznikající při valení pevného tělesa kruhového průřezu po podložce je pojednáno v rozšiřujícím učivu **R8** *Valivý odpor*.

e) V tématu *Gravitační pole* je v matematickém zápisu *Newtonova gravitačního zákona* pro dvě stejnorodá tělesa tvaru koule označena gravitační konstanta písmenem G. Dřívější označování této fyzikální konstanty řeckým písmenem $\varkappa$ (kapa) již neodpovídá současné normě ČSN ISO 80 000. Značka G se užívá v celém světě. Problémem u nás je to, že stejnou značku používáme již delší dobu pro velikost tíhy tělesa. Proto je na to v učebnici upozorněno v článku 5.4 Tíhová síla a tíha tělesa.

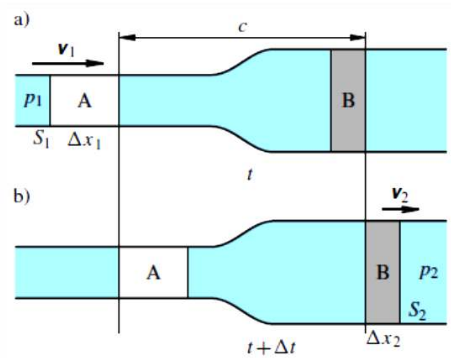
V témže tématu je v článku *Pohyby těles v centrálním gravitačním poli Země* věnována pozornost geostacionárním družicím a také geosynchronním družicím, připomenut je také navigační systém Galileo společně budovaný Evropskou komisí a Evropskou kosmickou agenturou. Centrum pro tento systém je v Praze.

f) V tématu *Mechanika kapalin a plynů* bylo také provedeno několik změn. Především v článku *Tlak v kapalinách vyvolaný tíhovou silou* směřuje výklad ke vztahu $p = p_o + h\varrho g$, kde p se nazývá absolutní tlak v hloubce h, je-li nad kapalinou hustoty ϱ atmosférický tlak p_a. Rozdíl $p - p_\mathrm{a}$ se pak označuje jako *hydrostatický tlak* $p_\mathrm{h} = h\varrho g$. V návaznosti na tento postup je pak upřesněna formulace Pascalova zákona: *Působí-li na kapalinu v uzavřené nádobě vnější tlaková síla, zvýší se tlak ve všech místech kapaliny o stejnou hodnotu.* A je také připojeno sdělení, že když působí na kapalinu v nepříliš velké uzavřené nádobě dostatečně velká vnější tlaková síla, je tlak vyvolaný působením této síly mnohem větší než hydrostatický tlak uvnitř kapaliny. Pak nemusíme s hydrostatickým tlakem vůbec počítat a ve všech bodech kapaliny je téměř stejný tlak. Odkaz je na tradiční pokus demonstrace Pascalova zákona – působení síly na píst kulové nádoby s otvory (tzv. „ježek"), kterými vystřikuje voda přibližně stejně prudce všemi směry a vždy kolmo ke stěnám nádoby.

g) Při odvozování *Bernoulliovy rovnice pro vodorovnou trubici* měnícího se průřezu není z hlediska energetické bilance v nové učebnici mechaniky zavedena veličina tlaková potenciální energie. Za pomoci obr. 2 se provádí rozbor průběhu vstupu proudící vrstvy A kapaliny do trubice a výstupu vrstvy B z ní za dobu Δt. Na proudění uvažovaných vrstev kapaliny je aplikován poznatek, že změna kinetické energie uvažovaného kapalného tělesa se rovná celkové práci, kterou vykonají všechny síly působící na toto těleso. Na vrstvy A, B působí tíhová síla, síla od stěn trubice, tlaková síla $\boldsymbol{F}_1$ od kapaliny přiléhající k vrstvě A zleva a tlaková síla $\boldsymbol{F}_2$ od kapaliny přiléhající k vrstvě B zprava. Protože práce od tíhové síly a síly stěn trubice je nulová, spočítá se práce sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a celková práce. Porovnáním této práce a změny kinetické energie se dospěje ke vztahu

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2.$$

Po rozboru významu jednotlivých členů v rovnici následuje formulace Bernoulliovy rovnice.



Obr. 2

V rozšiřující části učiva je na přiloženém CD v námětu **R12** uvedeno odvození Bernoulliovy rovnice pro stacionární proudění nestlačitelné kapaliny skloněnou trubicí různého průřezu. Výklad se opírá podle obr. 3 o vyjádření *přírůstku kinetické energie*

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\varrho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

o výpočet *práce*

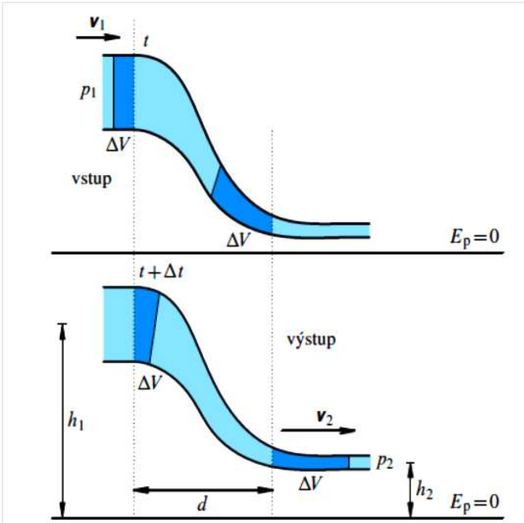
$$W_\mathrm{G} = \varrho g \Delta V (h_1 - h_2)$$

tíhové síly vynaložené na přemístění kapaliny o hmotnosti Δm od vstupu do trubice k jejímu výstupu z trubice v tíhovém poli Země, a o výpočet *tlakové práce*

$$W_\mathrm{p} = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V$$

spotřebované na to, aby se kapalina z levého konce zatlačila do trubice a u pravého konce vystoupila. Protože $W_\mathrm{G} + W_\mathrm{p} = \Delta E_\mathrm{k}$, dostaneme po úpravách vztah

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + h_1\varrho g + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + h_2\varrho g + p_2.$$



Obr. 3

Byl bych velmi rád, kdyby upravené vydání učebnice Mechanika jak v tištěné „papírové“ podobě, tak i obsahem na přiloženém CD, přispělo k úspěšnému naplňování cílů výuky fyziky. Aby bylo vhodným didaktickým prostředkem pro výuku gymnaziální fyziky a ve spojení s dalšími moderními informačními zdroji přispělo k zájmu o fyzikální poznávání. Budu také rád za všechny připomínky, které by mohly přispět k dalšímu zlepšení učebnice i doplňujících materiálů na CD.

Literatura

[1] *Svoboda, E. a kol.*: Fyzika pro gymnázia. Mechanika. Prometheus Praha, 2013.

[2] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. VÚP v Praze, 2007. Dostupné na: http://www.nuv.cz/ramcove-vzdelavaci-programy/rvp-pro-gymnazia

[3] *Štoll, I.*: Dějiny fyziky. Prometheus Praha, 2009.

[4] *Bednařík, M., Široká, M.*: Fyzika pro gymnázia. Mechanika. 4. vydání. Prometheus Praha, 2009.

Ceny PRÆMIUM BOHEMIÆ za zisk medailí v roce 2013

BOHUMIL VYBÍRAL

Univerzita Hradec Králové

Každoročně se dne 4. prosince stalo již tradicí, že se na státním zámku Sychrov udělují nadační ceny Præmium Bohemiæ. Tak tomu bylo i ve středu 4. 12. 2013, kdy se laureáty těchto cen stali studenti, medailisté ze světových středoškolských přírodovědných olympiád, konaných v roce 2013. Ceny od roku 2001 uděluje *Nadace Bohuslava Jana Horáčka Českému ráji* v den výročí narození svého zřizovatele B. J. Horáčka. Roku 2013 tedy proběhl již 13. ročník této významné a jedinečné motivující akce na podporu špičkového zájmu talentované mládeže o vědecký růst v přírodních vědách, matematice a informatice. Oceněno bylo 16 studentů a 2 studentky, kteří na mezinárodních (de facto světových) olympiádách ve fyzice, chemii, biologii, matematice, informatice a astronomii s astrofyzikou získali v roce 2013 celkem 19 medailí, z toho 1 zlatou, 7 stříbrných a 11 bronzových. Jeden student (*Štěpán Šimsa*) získal medaile dvě (zlatou v matematice a bronzovou v informatice) a obdržel tedy dvojitou cenu Præmium Bohemiæ. Hodnota ceny v roce 2013 za zlatou medaili je 35 tisíc Kč, za stříbrnou 20 tisíc Kč a za bronzovou 15 tisíc Kč. Nadace tedy na odměnách studentům vyplatila 340 tisíc Kč a k tomu laureáti obdrželi medaile Præmium Bohemiæ z odpovídajícího kovu, na jejichž rubu je vyryto jejich jméno. Šlo o 1 zlatou, 7 stříbrných a 10 bronzových medailí s diplomem. Za 13 ročníků bylo studentům za příkladnou reprezentaci České republiky uděleno 277 cen Præmium Bohemiæ v celkové výši 4 miliony 740 tisíc Kč.

Světové přírodovědné olympiády v roce 2013

Přírodovědné olympiády se konají každoročně, zpravidla v červenci nebo srpnu (v délce trvání asi 7 až 9 dní) na různých místech světa. Zejména asijské státy vždy vítají tuto příležitost ke své mezinárodní prezentaci a ochotně pořádají tuto prestižní, avšak organizačně a finančně náročnou soutěž na svém území. V roce 2013 však místy pořádání dominovala Evropa (Dánsko, Rusko, Švýcarsko a Řecko), střední Amerika (Kolumbie) a Austrálie.

- *44. Mezinárodní fyzikální olympiáda* se konala v Dánsku, v Kodani, u příležitosti 100. výročí vypracování polokvantového modelu atomu vodíku Nielsem Bohrem. Zúčastnilo se jí 381 soutěžících z 83 států a teritorií pěti kontinentů. Pět českých reprezentantů přivezlo 1 stříbrnou a 2 bronzové medaile a 1 čestné uznání.
- *45. Mezinárodní chemická olympiáda* se konala v Rusku, na Lomonosovově univerzitě v Moskvě, za účasti 291 soutěžících ze 77 států a teritorií světa. Čtyřčlenná česká reprezentace získala 3 stříbrné a 1 bronzovou medaili.
- *24. Mezinárodní biologickou olympiádu* uspořádalo Švýcarsko v Bernu pro 240 soutěžících z 62 států a teritorií světa. Čtyři čeští reprezentanti přivezli 2 stříbrné a 2 bronzové medaile.
- Největší a nejstarší olympiádu – *54. Mezinárodní matematickou olympiádu* – uspořádala ve městech Barranquilla a Santa Marta Kolumbie za rekordní účasti 527 soutěžících z 97 států a teritorií pěti kontinentů. Šestičlenná česká reprezentace dosáhla mimořádného úspěchu ziskem 1 zlaté a 3 bronzových medailí a 2 čestných uznání.
- *25. Mezinárodní olympiáda v informatice* se konala v dálné Austrálii, ve městě Brisbane, za účasti 77 reprezentací s 299 soutěžícími. Čtyři čeští reprezentanti zde získali 2 bronzové medaile.
- Nejmladší z olympiád – *7. Mezinárodní olympiádu v astronomii a astrofyzice* – uspořádalo Řecko ve Volosu za účasti 182 studentů z 35 nejvyspělejších států světa. Pětičlenná česká reprezentace získala 1 stříbrnou a 1 bronzovou medaili a 2 čestná uznání.

Čeští medailisté – laureáti Præmium Bohemiæ

- *Fyzika – 44. MFO v Dánsku: Lubomír Grund*, stříbrná medaile, absolvent Gymnázia Ch. Dopplera v Praze, student MFF UK v Praze, • *Miroslav Hanzelka*, bronzová medaile, absolvent Gymnázia Jiřího Gutha Jarkovského v České Lípě, student FJFI ČVUT v Praze, • *Jiří Guth Jarkovský*, bronzová medaile, student Gymnázia v Českých Budějovicích, Jírovcova.

- *Chemie – 45. MChO v Rusku: Kamil Maršálek*, stříbrná medaile, absolvent Klvaňova Gymnázia v Kyjově, student PřF MU v Brně, • *Roman Beránek*, stříbrná medaile, absolvent SPŠ chemické v Brně, student PřF MU v Brně, • *Adam Přáda*, stříbrná medaile, student Gymnázia v Ostrově, • *Kryštof Březina*, bronzová medaile, student PORG – gymnázia v Praze.
- *Biologie – 24. MBO ve Švýcarsku: Magdalena Holcová*, stříbrná medaile, absolventka Gymnázia v Praze, Botičská, studentka PřF UK v Praze, • *Jan Petržílek*, stříbrná medaile, absolvent Gymnáza v Ústí n. Orlicí, student PřF UK v Praze, • *Anna Soldánová*, bronzová medaile, absolventka Gymnázia v Olomouci, Čajkovského, studentka PřF UK v Praze, • *Tomáš Zdobinský*, bronzová medaile, student Gymnázia v Praze, Budějovická.
- *Matematika – 54. MMO v Kolumbii: Štěpán Šimsa*, zlatá medaile, absolvent Gymnázia J. Jungmanna v Litoměřicích, student MFF UK v Praze, • *Michal Buráň*, bronzová medaile, absolvent Gymnázia J. A. Komenského v Uherském Brodě, student University of Cambridge, G. B., • *Mark Karpilovskij*, bronzová medaile, absolvent Gymnázia v Brně, tř. Kpt. Jaroše, student MFF UK v Praze, • *Radovan Švarc*, bronzová medaile, student Gymnázia v České Třebové.
- *Programování – 25. IOI v Austrálii: Štěpán Šimsa* (viz Matematika), bronzová medaile, • *Martin Raszyk*, bronzová medaile, student Gymnázia v Karviné-Novém Městě, Mírová.
- *Astronomie a astrofyzika – 7. IOAA v Řecku: Lukáš Timko*, stříbrná medaile, absolvent Gymnázia Pierra de Coubertina v Táboře, student MFF UK v Praze, • *Ondřej Theiner*, bronzová medaile, student Gymnázia v Českých Budějovicích, Jírovcova.

Medailový úspěch těchto českých reprezentantů na uvedených mezinárodních olympiádách v roce 2013 byl dne 4. prosince 2013 zhodnocen cenami Prӕmium Bohemiӕ, diplomem a medailí z odpovídajícího kovu, tedy medailí zlatou stříbrnou či bronzovou.

Slavnost udílení cen

Vlastní slavnost udílení cen dne 4. prosince 2013 v zámeckém divadle na Sychrově měla důstojný a slavnostní průběh. Zúčastnili se nejen ocenění studenti a studentky s rodinným doprovodem, nýbrž i představitelé

Učené společnosti ČR v čele s předsedou prof. ThDr. Petrem Pokorným, DrSc., představitelé *Akademie věd ČR* v čele s místopředsedou prof. Ing. Vladimírem Marečkem, DrSc., předseda *Jednoty českých matematiků a fyziků* RNDr. Josef Kubát, předseda *Astronomické společnosti ČR* RNDr. Jan Vondrák. Tito všichni představitelé vystoupili s pozdravnými projevy. Dále byli účastni představitelé přírodovědných olympiád ČR, představitelé některých škol, předseda správní rady Nadace Mgr. František Horáček a členové správní a dozorčí rady Nadace a zástupci sdělovacích prostředků.

Obr. 1: Mgr. Jaroslava Nývltová se svými žáky ze ZUŠ Karla Halíře ve Vrchlabí, foto B. Vybíral

Prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc. ve svém vystoupení seznámil přítomné s úspěchy jednotlivých českých reprezentací na světových přírodovědných olympiádách. Vyzvedl veliký talent studentů a zdůraznil, že pro jejich budoucí vědecké aktivity a očekávané úspěchy bude nutné vyvinout i velkou soustavnou pracovitost, trpělivost. Rovněž se připravit se na to, že se dostaví i dílčí neúspěchy a neuznání vědecké komunity. Poté předseda správní rady Mgr. František Horáček, Jan Horáček (člen správní rady a syn mecenáše) a prof. B. Vybíral předali studentům a studentkám ocenění. Za vyznamenané studenty poté promluvil Štěpán Šimsa, který získal nejvyšší ocenění. Slavnost moderovala Mgr. Jaroslava Nývltová, která rovněž spolu se svými žáky ze *Základní umělecké školy Karla Halíře* ve Vrchlabí, zajistila velmi pěkné hudební vystoupení v průběhu celé slavnosti. Reportáž o udílení cen PRÆMIUM BOHEMIÆ 2013 zařadila do večerních *Událostí Česká televize* (viz Archiv ČT na webu [2]). Byl rovněž profesionálně pořizován videozáznam podstatných částí slavnosti a byly natočeny rozhovory s některými účastníky (videozáznam bude umístěn na internet, na stránkách YouTube).

Obr. 2: Z aktu udílení cen Præmium Bohemiæ 2013, zleva: student–chemik R. Maršálek, F. Horáček, J. Horáček, B. Vybíral a L. Šubert (jednatel Nadace), foto J. Kříž

Obr. 3: Část studentů (fyziků a matematiků), oceněných Præmium Bohemiæ 2013, foto B. Vybíral

Z děkovného projevu laureáta ceny Præmium Bohemiæ Štěpána Šimsy[1], nyní studenta MFF UK v Praze: „Vážím si toho, že jsem dostal možnost jménem studentů promluvit k přítomným. Nejdříve bych chtěl poděkovat všem, díky kterým tu dnes můžeme být. V první řadě to jsou naši partneři, kamarádi a rodiny. Zejména pak naši rodiče, kteří nám poskytli důležité zázemí, podporu psychickou i finanční a kteří s námi prožívali celé naše soutěžní zápolení. Dále jsou to naše školy a naši učitelé, kteří nás podporovali v naší snaze uspět a pomáhali nám skloubit přípravu na olympiády se studiem. Nesmíme rovněž zapomenout na organizátory olympiád, bez kterých bychom vůbec nemohli soutěžit. A samozřejmě naše poděkování patří také zakladateli nadace, panu Bohuslavu Janu Horáčkovi a všem, kteří se o Nadaci starají a díky nimž se celá dnešní akce může uskutečnit. A za co vůbec děkujeme? Především za to, že jsme se mohli zúčastnit mezinárodních olympiád, které pro nás byly neopakovatelnou zkušeností. Poznali jsme odlišné kultury, nové kamarády ze všech koutů světa a podívali jsme se do míst, na která se možná už nikdy nepodíváme. Také jsme si vyzkoušeli, jaké je to reprezentovat Českou republiku. Jsem přesvědčen, že každý z nás měl ze své medaile upřímnou radost nejen proto, že to je veliký osobní úspěch, ale i proto, že jeho prostřednictvím Česká republika ukázala, že přestože jsme malým státem, tak se ve světě neztratíme. Myslím, že všichni, kteří jsme tady, jsme prokázali, že jsme schopní něčeho dosáhnout. Proto doufám, že finanční odměnu, kterou dostaneme, využijeme k tomu, abychom poctivě pokračovali ve studiu. Ti, kteří ještě neopustili střední školu, budou nadále reprezentovat Českou republiku. A konečně jednou, až budeme mít studia za sebou, tak snad ukážeme, že jsme nabytou podporu nepromrhali a vrátíme ji i s úroky České republice ať už jako vědci nebo aktivní a schopní pracovníci na jiných pozicích. Nakonec chci popřát studentům, kteří budou v příštích letech soutěžit, aby byli ještě úspěšnější než my letos. Rovněž, aby ministerstvo školství neotálelo s proplácením cest na mezinárodní olympiády a studenti tak měli jistotu, že republika tuto reprezentaci umožní a váží si jí.“

[1] Štěpán Šimsa při děkovném projevu, foto B. Vybíral.

Bohuslav Jan Horáček

Zakladatelem Nadace, zřizovatelem a donátorem nadační ceny PRÆMIUM BOHEMIÆ je podnikatel, filantrop a mecenáš *Ing. Bohuslav Jan Horáček* (1924–2002), který pochází z Českého ráje – narodil se v Radvánovicích u Turnova. Měl velmi těžké dětství a mládí, problémy a věznění za Protektorátu i po puči v Únoru 1948. Proto se po absolvování Vysoké školy obchodní rozhodl roku 1949 emigrovat do Německa, kde nejprve podnikal v bižutérii a zlatnictví. Později se orientoval na turismus na Kanárských ostrovech, kde postupně vybudoval řetězec hotelů. Hotely v devadesátých letech prodal a z výtěžku se rozhodl nezištně podporovat nejprve rozvoj Českého ráje a od roku 2000 rozvoj vědy a umění v České republice formou nadačních cen PRÆMIUM BOHEMIÆ.

Plný rozvoj této velmi ušlechtilé aktivity překazila jeho náhlá smrt roku 2002. Mohlo tak být dosud uděleno jen pět velkých cen PRÆMIUM BOHEMIÆ významným českým vědcům (v celkové hodnotě 3 miliony Kč). V současné době zůstalo udělování „jen malých" cen talentovaným studentům, nositelům medailí ze světových přírodovědných olympiád. Tyto ceny mají silný motivační potenciál a získávají je každoročně asi dvě desítky studentů, pocházejících z celého území České republiky. Bohuslav Jan Horáček se osobně zúčastnil jen prvního ročníku udílení cen PRÆMIUM BOHEMIÆ, o čemž mj. svědčí jedinečný videozáznam, umístěný v internetovém archivu *Euscreen Beta*, viz [3]. Souhrnné pojednání o životě B. J. Horáčka, o jeho mecenášských aktivitách v Českém ráji a o udílení cen PRÆMIUM BOHEMIÆ v letech 2001–2012 podává článek [4].

Literatura

[1] *Vybíral, B.*: PRÆMIUM BOHEMIÆ 2013. Vydala Nadace B. Jana Horáčka Českému ráji, Turnov, 2013, 20 s.

[2] Události na ČT 1 a 24 dne 5. 12. 2013 (43. až 45. min. záznamu). Dostupné z: http://www.ceskatelevize.cz/ivysilani/1097181328-udalosti/213411000101205/

[3] Internetový archiv Euscreen Beta. Dostupné z: http://euscreen.eu/play.jsp?id=EUS_B680B46FFCCA4861AB3F0B5EAD212A82

[4] *Vybíral, B.*: PRÆMIUM BOHEMIÆ – neobyčejný příklad mecenášství. Vesmír, roč. 72 (2013), č. 7-8, s. 392–396.

Nevratné procesy pro žáky základních škol

LIBUŠE ŠVECOVÁ – ERIKA MECHLOVÁ

Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě

Naše zkušenost z denního života, technické praxe a samozřejmě i pokusy ukazují, že všechny reálné děje probíhající v přírodě jsou nevratné. Každý fyzikální děj proběhne tak, že po sobě zanechá v přírodě určitou stopu, změnu. Souvisí to s tím, že při všech reálných dějích nastává vždy částečná přeměna celkové energie ve vnitřní energii okolí [2, s. 162]. Neměli bychom žákům základních škol zatajovat průběh přirozených procesů a vůbec si jich nevšímat, jakoby neexistovaly. Na první pohled se sice zdá, že pochopení nevratnosti procesů je pro žáky základní školy velmi obtížné. Pokud se ovšem více zamyslíme, uvědomíme si, že opak je pravdou.

Příklady nevratných procesů v životě žáků základních škol

Uvedeme dva jednoduché příklady z každodenního života žáků.

Příklad první: V ruce držíte hrnek horkého čaje. Ruce se zahřívají a hrnek chladne. Ještě se nestalo, že by se ruce ochladily a hrnek víc zahřál [3, s. 553].

Příklad druhý: Ze stolu spadla skleněná sklenice a rozbila se. Ale ještě nikdo neviděl, že by se sklenice sama bez vnějšího zásahu vrátila do původního stavu.

Uvedené procesy proběhly nevratně. Průběh nevratných procesů se jeví tak samozřejmý, že by bylo překvapující, kdyby proběhly jinak. Položme si otázku týkající se zákona zachování energie. Byl by „obousměrný směr“ samovolných a přirozených procesů v rozporu se zákonem zachování energie? U prvního příkladu by byl zákon zachování energie splněn i při opačném procesu, tzn. při přechodu tepla z chladných rukou do teplého hrnku. Ale nikdy tento jednoduchý proces nebyl pozorován. Rovněž i u druhého příkladu by pohyb sklenice ze země na stůl splnil podmínku zákona zachování energie, došlo by jen k přeměně energie.

První termodynamický princip vyjadřuje princip zachování energie. „První termodymanický princip též první termodynamický zákon; vyjadřuje obecný princip zachování energie pro makroskopické soustavy. Princip zachování energie je obecnou formulací empiricky zjištěného poznatku, který byl experimentálně ověřen u nejrůznějších přírodních procesů a který se týká přeměn různých druhů energie v jiné její druhy. Bylo zjištěno a experimentálně bezpečně ověřeno, že úbytek jednoho druhu energie se vždy projeví v rovnocenném přírůstku u jiných druhů energie“ [6, s. 239]. „Druhý termodynamický princip též druhý termodynamický zákon se zabývá se nevratností přirozených termodynamických procesů. Byl slovně vyjádřen různými autory odlišně, fyzikálně jsou však všechna vyjádření ekvivalentní (v oblasti kladných termodynamických teplot)“ [6, s. 241]. Z druhého termodynamického principu vyplývá, že v izolované soustavě existují procesy, které mohou probíhat přirozeně, samovolně, jen určitým směrem, kdežto ve směru opačném samovolně probíhat nemohou. Ze změn energie v izolovaných systémech nelze odvodit směr nevratných procesů. Tento směr je určen jinou vlastností dané soustavy, změnou její entropie. Směr změny entropie někdy nazýváme „šipkou času“ [3, s. 553].

V učebnicích fyziky pro střední školy jsou uvedeny oba termodynamické principy, proto učitelům doporučujeme, aby při vysvětlování různých procesů uváděli oba termodynamické principy a vysvětlili jejich důsledky.

Zavést pojem entropie jako fyzikální veličinu do výuky fyziky na středních školách se pokusila *J. Prokšová* [7], [8]. Zaměřila se především na vysokoškolské studenty fyziky a žáky středních škol, kteří se zajímají o fyziku. Učební texty jsou založeny převážně na matematickém aparátu. Pro žáky základních škol v České republice dané téma nebylo zpracováno.

Rámcové vzdělávací programy a školní vzdělávací programy

Rámcové vzdělávací programy pro základní vzdělávání zdůrazňují badatelský charakter výuky, který žákům umožní „hlouběji porozumět zákonitostem přírodních procesů, a tím si uvědomovat i užitečnost přírodních poznatků a jejich aplikací v praktickém životě“ [9, s. 51].

Školní vzdělávací programy, které si vytváří každá škola sama podle zásad stanovených v příslušném rámcovém vzdělávacím programu, umožňuje školám používat ve výuce nové metody a formy učení, zařadit nová témata do výuky a podpořit mezipředmětové vztahy.

Nevratné procesy jsou právě jedním možným společným tématem pro všechny přírodovědné předměty. V přírodních vědách se totiž nevratné procesy vyskytují v biologii, chemii i fyzice. Fyzika na základních školách o nich prozatím mlčí, i když žáci se s nimi v životě běžně setkávají a mají o nich intuitivní představy. Tyto poznatky lze velmi dobře aplikovat do vzdělávací oblasti Člověk a příroda.

Při úvahách o jednotících idejích všech přírodních věd v rámci vzdělávací oblasti Člověk a příroda se znovu vynořila idea nevratných procesů v přírodě, kterou jednotlivé přírodní vědy zkoumají z různých úhlů pohledu. S cílem realizace této ideje byl vytvořen učební text *Nevratné procesy pro žáky základních škol* [5]. K učebnímu textu byly vytvořeny scénáře vyučovacích hodin pro učitele. Nové učivo bylo žákům vysvětlováno na základě jevů, které znají z běžného života bez použití matematického aparátu. Uvedené učební texty i scénáře vyučovacích hodin byly ověřeny v rámci výzkumu [5]. Pedagogický experiment proběhl u žáků 8. ročníku základních škol a 3. ročníku osmiletého gymnázia. Výuka se uskutečnila po probrání tematického celku Tepelné jevy.

Během pedagogického experimentu na základních školách byla použita metoda problémového výkladu. Učitel uvedl problém, zeptal se žáků, jak by daný problém řešili, dal žákům čas, aby se o problému poradili ve dvojicích případně ve trojicích, po dvou minutách se jich zeptal na řešení problému. Postupně odhaloval své myšlenkové postupy a uvedl konečné řešení problému. Učitel ukazoval příklad vědeckého řešení problému. Úkolem žáka bylo kontrolovat přesvědčivost a logiku postupu učitele.

Výzkum ukázal, že žáci na základních školách byli schopni pochopit nevratný proces jako proces, který směřuje ke stabilitě systému, a mohli s tímto jevem konkrétně pracovat.

V učebním textu *Nevratné procesy pro žáky základních škol* je zpracováno pět vyučovacích hodin fyziky, ve kterých se žáci postupně seznamují s nevratnými ději na konkrétních příkladech z praxe (pozn.: byla použita metoda konstruktivismu). Uvádíme scénář první vyučovací hodiny.

Nevratné děje pro žáky základních škol – scénář vyučovací hodiny

Cíl hodiny: Žák by měl pochopit nevratný děj jako děj, který probíhá jen jedním směrem.

Metody výuky: metoda problémového výkladu.

Organizační formy vyučování podle vztahu k osobnosti žáka: hromadné vyučování.

Organizační formy vyučování podle charakteru výukového prostředí: výuka ve třídě, práce ve dvojicích nebo ve skupinách.

Úkoly pro žáky:

Úkol č. 1: Na stůl položíme skleněný džbánek s vroucí vodou. Do džbánku vložíme sáček ovocného čaje. Voda ve džbánku se obarví. Zkuste navrhnout způsob, jak byste částice barviva čaje oddělili od vody, aby voda ve džbánku byla opět čirá.

Úkol č. 2: Do misky s vodou kápneme pár kapek vonného oleje, vonný olej se pomalu vypařuje z povrchu vody. Po určité době jeho vůni cítíte v celé místnosti. Myslíte, že existuje způsob, jak lze vrátit částice vonného oleje zpět do vody?

Výklad učitele

Po použití parfému jeho vůni cítíte v celé místnosti, příčinnou je difúze – tepelný pohyb. To, že se částice parfému srážejí s molekulami plynů vzduchu, způsobuje, že se vůně šíří postupně. Existuje způsob, jak lze vrátit částice parfému zpět do nádobky? Všimněte si, že za nějakou dobu přestanete jeho vůni vnímat. Vaše čichové buňky se přizpůsobí (asimilují) okolí, to ovšem neznamená, že by tam částice parfému nebyly.

Ano, máte pravdu, takový způsob neexistuje. *Děj, který probíhá jenom jedním směrem a opačným směrem nemůže sám od sebe proběhnout, se nazývá nevratný děj.*

Klasický příklad nevratného děje je vývoj každého z vás. Nikomu se nestane, že by se sám od sebe stal mladším. Takovému neustálému ději se říká stárnutí.

Vědci zjistili, že v uvařeném jídle, které necháme teplé, se během třech až čtyř hodin začnou tvořit nežádoucí mikroorganismy a bakterie. Navrhněte, jak můžeme oddálit tvorbu nežádoucích bakterií a mikroorganismů.

Uvedeme další příklady nevratného děje. Jistě znáte hračku „jojo“. Jestliže provázek pověsíte na prst a hráčku pustíte, „jojo“ se začne pohybovat. Po určité době se hračka zastaví. Jestliže chceme, aby se hračka stále pohybovala, musíme konat práci. „Jojo“ se nevrátí do původního stavu samovolně, proto se opět jedná o nevratný děj. Dalším příkladem nevratného děje je pohyb závaží na pružině nebo jakékoliv hračky na pružině.

Pustíte-li po podložce setrvačníkové autíčko, autíčko se vlivem tření zastaví. Ze zkušenosti víte, že *všechny reálné děje probíhající v přírodě jsou nevratné.*

Určitě jste si všimli, že se vám v zimě „vlní“ záclony, i když máte plastová okna, která velmi dobře těsní. Je to z toho důvodu, že se vzduch v místnosti ohřívá od teplého radiátoru. Teplý vzduch má menší hustotu než studený a proudí směrem ke stropu. Jakmile radiátor vypnete, ještě se nestalo, že by se radiátor od vzduchu ohřál, protože *teplo vždy samovolně přechází z teplejšího tělesa na těleso chladnější.*

Žákovský experiment: Použijeme dvě termosky s víčky z polystyrénu, ve kterých bude otvor na teploměr a míchačku. Do první nádoby vlijeme vodu o teplotě 90 °C o objemu 1 litr a do druhé vodu o stejném objemu o teplotě 20 °C nejlépe „odstavenou“ vodu, která má teplotu místnosti. Jeden litr vody představuje 1 kg.

Do teplejší vody o teplotě 90 °C vlijte studenější vodu o teplotě 20 °C. Popište děje, které nastanou. Když dáme do vzájemného kontaktu dvě kapaliny o různých teplotách, potom teplejší voda o teplotě t_2 odevzdá teplo Q_2 chladnější vodě o teplotě t_1. Jinými slovy, studenější voda o teplotě t_1 přijme od teplejší vody o teplotě t_2 teplo Q_1. Jak vypočítáte tato tepla?

Pro izolovanou soustavu platí:

$$\boxed{t_2,\ -Q_2} \xrightarrow{\ Q_2\ } \boxed{t_1,\ +Q_1}$$

$$t_2 = 90\ °\mathrm{C} \qquad t_2 > t_1 \qquad t_1 = 20\ °\mathrm{C}$$

Naměřená výsledná teplota $t = 55$ °C,

$Q_2 = cm\Delta t = cm(t - t_2)$ $\qquad$ $Q_1 = cm\Delta t = cm(t - t_1)$

$Q_2 = 4\,180 \cdot 1 \cdot (55 - 90)$ J $\qquad$ $Q_1 = 4\,180 \cdot 1 \cdot (55 - 20)$ J

$Q_2 = 4\,180 \cdot (-35)$ J $\qquad$ $Q_1 = 4\,180 \cdot 35$ J

$Q_2 = -146\,300$ J $\doteq -150$ kJ $\qquad$ $Q_1 = 146\,300$ J $\doteq 150$ kJ

Záporné znaménko u vypočítaného tepla Q_2 znamená, že teplá voda odevzdává teplo chladnější vodě. Kladné znaménko u tepla Q_1 znamená, že chladnější kapalina teplo přijímá. Znaménka u jednotlivých tepel informují o přechodu tepla. Proto pro izolované soustavy platí, že se obě tato tepla rovnají.

Pokud bychom tepla vypočítali podle učebnice fyziky pro základní školy [4], vypočítané teplo Q_2, by bylo kladné a museli bychom žákům vysvětlit, proč jsou obě tepla stejná. Uvádíme výpočet:

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= cm\Delta t = cm(t_2 - t) & Q_1 &= cm\Delta t = cm(t - t_1)\\
Q_2 &= 4\,180 \cdot 1 \cdot (90 - 55)\ \mathrm{J} & Q_1 &= 4\,180 \cdot 1 \cdot (55 - 20)\ \mathrm{J}\\
Q_2 &= 4\,180 \cdot 35\ \mathrm{J} & Q_1 &= 4\,180 \cdot 35\ \mathrm{J}\\
Q_2 &= 146\,300\ \mathrm{J} \doteq 150\ \mathrm{kJ} & Q_1 &= 146\,300\ \mathrm{J} \doteq 150\ \mathrm{kJ}
\end{aligned}
$$

Shrnutí vyučovací hodiny: Děj, který probíhá pouze jedním směrem a opačným směrem nemůže sám od sebe proběhnout, takový děj se nazývá nevratný děj. Teplo vždy samovolně přechází z teplejšího tělesa na těleso chladnější.

Závěr

Na základě provedeného pedagogického experimentu o rozsahu pět vyučovacích hodin žáci porozuměli obsahu pojmu nevratný proces. Myslíme, že tím se fyzika základní školy přiblíží běžnému životu, protože se jedná o řešení autentických problémů, se kterými se žáci setkají nejen ve fyzice, ale i v dalších přírodovědných předmětech.

Pozn.: Navrhujeme používat v textu pro žáky základních školy raději termín „děj“ a ne „proces“, i když je zřejmé, že obsah obou je shodný.

Literatura

[1] *Bartuška, K.*: Pseudovědecké představy o pojmu energie. MFI, roč. 15 (2005), č. 1, s. 21.

[2] *Bělař, A., Fuka, J., Rudolf, V.*: Termika – Molekulární fyzika. SPN, Praha, 1964.

[3] *Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.*: Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Vyd. 1., Vutium, Brno, 2000, s. 330–576, ISBN 80-214-1869-9.

[4] *Kolářová, R., Bohuněk, J.*: Fyzika pro 8. ročník základní školy. Dotisk 1. vyd., Prometheus, Praha, 2001.

[5] *Kubincová, L.*: Termodynamika nevratných procesů pro žáky základních škol. Ostrava, 2009. Disertační práce. Ostravská univerzita v Ostravě, PřF, Katedra fyziky. Vedoucí práce doc. RNDr. Dalibor Dvořák, CSc.

[6] *Mechlová, E., Košťál, K.*: Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz. 1. vyd., Prometheus, Praha, 1999.

[7] *Prokšová, J., Obdržálek, J.*: Entropii do středoškolské fyziky? PMFA 2/2007, s. 152–168. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/141351

[8] *Prokšová, J.*: Entropie na středoškolské úrovni. Praha, 2004. Doktorská disertační práce. MFF UK. Vedoucí práce doc. RNDr. Jan Obdržálek, CSc.

[9] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Výzkumný ústav pedagogický v Praze, Praha, 2007. 126 s. [cit. 2013-01-05]. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf

Školní generátor TTL a synchronizační obvod

PETR ADÁMEK – JIŘÍ TESAŘ

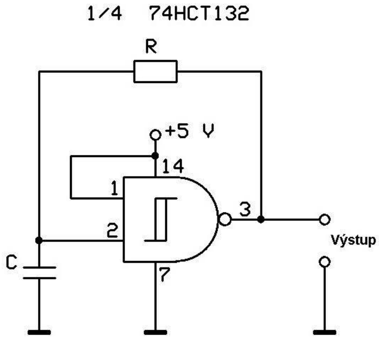
Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Přesto, že v současné době jsou na trhu k dispozici mnohé téměř dokonalé učební pomůcky, sofistikované elektronické stavebnice, měřicí přístroje, mnohdy pracující ve spojení s osobním nebo jednočipovým počítačem a též počítačové simulátory elektronických obvodů, začíná chybět jistá nedílná součást výuky. Významnou součástí praktické výuky je vlastní realizace a aplikace jednoduchých elektronických obvodů. Tato část výuky má nenahraditelný význam z hlediska přímého kontaktu s realitou, rozvoje tvůrčího myšlení, soustředění a jemné motoriky, respektive harmonického vývoje jedince.

Tento příspěvek uvádí známé i méně známe konstrukce jednoduchých obvodů, které jsou upraveny dle současné běžně dostupné součástkové základny a použity jako alternativy školního generátoru diskrétního signálu a časovacího spouštěcího synchronizačního obvodu, které mohou posloužit též svými jednotlivými částmi jako námět pro realizaci učebních pomůcek. Generátor nebo synchronizační obvod lze používat v laboratorních úlohách zaměřených na fyziku, elektroniku, elektrotechniku. Při konstrukci generátoru byl kladen důraz na jednoduchost konstrukce a též minimální materiálovou náročnost. Vzhledem k rozsahu a účelu příspěvku je pouze vysvětlena funkce zapojení a jednotlivých komponent a kromě schémat zapojení, není uvedena úplná technická dokumentace pro realizaci.

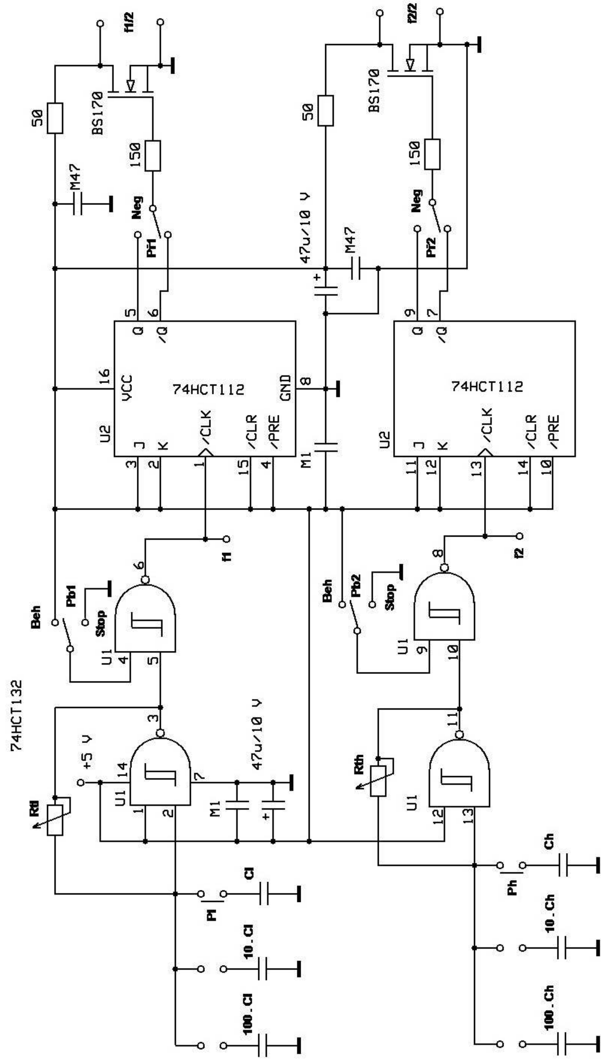
Popis zapojení generátoru a spouštěcího synchronizačního obvodu

Generátor vybavený synchronizačním obvodem je rozdělen na tři základní části, vlastní generátor TTL (Transistor Transistor Logic) signálu, dělič dvěma a zpožďovací synchronizační obvod. Všechny části lze využívat samostatně a nezávisle. Generátor TTL signálu, jehož princip je převzat z [1], vznikl již v roce 1989. Toto zapojení využívá číslicového integrovaného obvodu z řady 74XX nízké integrace, původně to byl obvod 7413. Obvod 7413 obsahuje dvě čtyřvstupová hradla NAND se Schmittovým obvodem na vstupu. Schmittův obvod [2] na vstupu ve spojení s obvody hradla má dostatečný napěťový zisk, aby se po zavedení zpětné vazby z výstupu na vstup obvodu hradlo rozkmitalo. Pracuje jako relaxační oscilátor. Relaxační oscilátor neprodukuje harmonické sinusoidální kmity jako pravý harmonický oscilátor. Např. když je na výstupu logická „1“, tedy 5 V, je přes zpětnovazební rezistor R nabíjen kondenzátor C na vstupu (obr. 1). Jakmile dosáhne napětí na kondenzátoru rozhodovací úrovně vstupu hradla (2), v tomto případě Schmittova klopného obvodu, výstup hradla NAND se překlopí do logické „0“ a kondenzátor se přes zpětnovazební rezistor vybíjí, tentokrát do úrovně logické nuly na vstupu hradla a hradlo na to opět zareaguje změnou svého výstupního stavu do logické jedničky. Tento proces probíhá periodicky. Výstupním signálem je v tomto případě téměř pravoúhlý impuls.



Obr. 1: Principiální zapojení relaxačního oscilátoru

V současnosti jsou běžně dostupné podobné obvody vyráběné v rychlé řadě logických obvodů CMOS (74HCTxxx). Jako vhodná náhrada byl zvolen obvod 74HCT132$^{\mathrm{TM}}$ [3], ve kterém jsou integrována čtyři dvouvstupová hradla NAND se Schmittovým obvodem na vstupu. Tento technologicky podstatně dokonalejší obvod se vyznačuje, mimo jiné, např. velkým vstupním odporem, malými vstupními proudy do 1 μA, vyšší rychlostí přeběhu, kratším dopravním zpožděním, výrazně nižší spotřebou a vyššími výstupními proudy, dle údajů výrobce až 25 mA. Tyto obvody, díky svým uvedeným výborným vlastnostem, umožňují vytvořit jednoduchý laditelný relaxační oscilátor s velkým kmitočtovým rozsahem nastavení. Díky velkému vstupnímu odporu hradla je možno měnit hodnotu odporu zpětnovazebního rezistoru řádově od $10^2\,\Omega$ až do $10^5\,\Omega$. Této možnosti může být využito ke konstrukci oscilátoru s plynule nastavitelným kmitočtem jediným potenciometrem. Konkrétní zapojení je uvedeno na obr. 2.



Obr. 2: Konkrétní zapojení dvojitého generátoru TTL s 2 děličkami 74HCT112

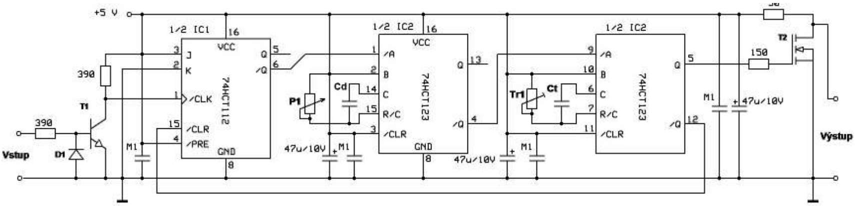
Hlavní výhodou tohoto generátoru je tedy velký rozsah nastavení kmitočtu jediným potenciometrem Rtl (Rth) a jedním pevným kondenzátorem. Prakticky bylo zvoleno nastavení, ladění kmitočtu na jednom rozsahu více než desetkrát. Pomocí přepínače rozsahů P1 (Ph), lze postupným zmenšováním kapacity kondenzátoru Cl (Ch) na jednotky pF dosáhnout kmitočtu až přes 50 MHz. Naopak lze použít i kvalitní elektrolytické kondenzátory s malými svodovými proudy a tak, díky jejich možné velké kapacitě, lze se stejným zapojením dosáhnout nižších kmitočtů než 10^{-1} Hz. V jednom pouzdře (DIL 14, SOIC 14) jsou uvedené obvody čtyři, což umožňuje vytvořit teoreticky až čtyři nezávislé laditelné generátory. V konkrétním zapojení, na obr. 2, jsou využity pouze dva a další dvojice je využita k oddělení kmitajícího obvodu a uvolnění (Beh) nebo hradlování (Stop) přepínačem Pb1, (Pb2) jeho výstupu. Nevýhodou a v některých případech i požadavkem na uvedené zapojení může být nerovnoměrná střída výstupního signálu.

Jak již bylo uvedeno, generátor neprodukuje harmonický, ale obdélníkový signál s nestejnou šíří impulsu a šíří mezery v periodě. Tato nerovnoměrná střída je způsobena různou rozhodovací úrovní pro logickou nulu a logickou jedničku vstupů hradla NAND, respektive Schmittova klopného obvodu. Střída se mění s nastaveným kmitočtem a též se může poněkud lišit obvod od obvodu. Na konkrétním obvodu byl naměřen poměr trvání impulsu k mezeře od přibližně 3 : 7 při kmitočtu řádově kHz až po téměř 1 : 1 na kmitočtech řádu MHz.

Pro dosažení stejné střídy a obdélníkového tvaru výstupních impulsů je na výstupu hradel NAND obvodu 74HCT132$^{\text{TM}}$ zapojena další část, a to dělička dvěma s obvodem 74HCT112$^{\text{TM}}$ [4]. Tato dělička sice způsobí, že maximální možný výstupní kmitočet celého generátoru bude omezen přibližně pouze do 25 MHz, ale výstupní signál pak má téměř ideální symetrický obdélníkový tvar.

Jako dělička je použit dvojitý klopný obvod J-K, stejné rychlé řady CMOS 74HCTxxx, resp. 74HCT112$^{\text{TM}}$ [4]. Tento obvod je možné při vyloučení požadavku na stejnou střídu a požadavku vyššího výstupního kmitočtu až 50 MHz nepřipojovat nebo nepoužít. Výstupy obvodů TTL, buď přímo 74HCT132$^{\text{TM}}$ nebo 74HCT112$^{\text{TM}}$ jsou následně zesíleny v jednoduchém výkonovém tranzistorovém stupni. Tento stupeň slouží pro proudové posílení výstupů. V uvedeném zapojení jsou použity rychlé spínací, polem řízené tranzistory BS170, které umožňují, aby výstupní proudy generátoru mohly dosahovat hodnoty až kolem 0,5 A, při zachování dostatečné strmosti čelní (10 ns) a týlové hrany (10 ns) impulsu viz údaje výrobce [5].

Třetí samostatná část školního generátoru je zpožďovací synchronizační obvod (trigger), který umožňuje po startu nějaké události impulsem delším než 20 ns, o napěťové úrovni vyšší než 0,7 V, spouštět výstupním signálem – impulsem s nastavitelným zpožděním a úrovni TTL časovou základnu osciloskopu nebo jiného záznamového zařízení. Tento obvod vznikl zjednodušením zapojení, původně vyvinutého pro jiné účely (viz [6]). V uvedeném zapojení na obr. 3. je použita jen část.



Obr. 3: Zapojení zpožďovacího a spouštěcího obvodu, „triggeru“

Generování zpožděného spouštěcího, respektive synchronizačního impulsu, slouží monostabilní klopný obvod 74HCT123^{TM} [7] a opět klopný obvod typu J-K = polovina pouzdra 74HCT112^{TM}, který zde slouží jako paměť předchozího stavu, respektive příchodu vstupního spouštěcího impulsu. Na vstupu synchronizačního obvodu je použit spínací NPN tranzistor T1, typ 2N4401 [8], který zároveň slouží jako předzesilovač a přepěťová ochrana společně s diodou D1 následujícího klopného obvodu J-K. Kladné napětí na vstupu tranzistoru T1 vyšší než 0,7 V, způsobí jeho otevření, vznikne tak sestupná 5 V – 0 V, tedy týlová hrana impulsu, která překlopí první klopný obvod J-K, jehož invertovaný výstup/Q (vývod č. 6) je přiveden na první monostabilní klopný obvod 74HCT123^{TM} (vývod č. 1). První monostabilní klopný obvod slouží k plynule nastavitelnému zpoždění průchodu impulsu, které závisí téměř lineárně na nastavené hodnotě odporu potenciometru P1 a zvoleném časovacím kondenzátoru Cd. Následující druhý monostabilní klopný obvod generuje vlastní spouštěcí, synchronizační impuls na vývodu 5 a invertovaný impuls na vývodu 12. Tento signál je proudově posílen tranzistorem T2, typ BS170. Šíře spouštěcího impulsu je též nastavitelná pomocí trimru Tr1 a kondenzátoru Ct. Invertovaný impuls z vývodu 6 současně nastavuje počáteční podmínky celého synchronizačního obvodu – paměť příchozího impulsu, respektive nuluje první klopný obvod J-K. Dokud neproběhne celý proces zpoždění a vygenerování výstupního spouštěcího impulsu, není možno tento proces narušit příchodem vstupního signálu indikujícího další událost.

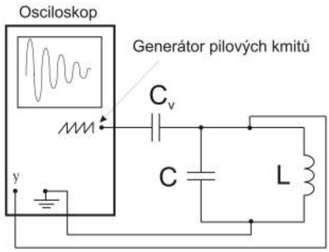
Aplikace generátoru TTL a zpožďovacího a spouštěcího obvodu „triggeru“

Generátor TTL je možné standardně využít jako zkušebního generátoru pro testování zapojení čítačů, posuvných registrů nebo složitějších sekvenčních obvodů nebo k ověřování funkce jednotlivých vadných součástek. Vzhledem k poměrně velmi dobrým dynamickým parametrům použitých hradel i spínacích tranzistorů, se generátor vyznačuje velkou rychlostí přeběhu až 5 000 $\mathrm{V} \cdot \mu\mathrm{s}^{-1}$. Pro mnohé aplikace je tedy téměř ideálním generátorem obdélníkového signálu. Je ho tak možné ve spojení s dostatečně rychlým osciloskopem využít pro měření odezvy na budící jednotkový skok analogových zesilovačů, regulátorů, tvarovacích zesilovačů. Je možné jej využít k měření tzv. dopravního zpoždění průchodu signálu ze vstupu na výstup jak v analogových obvodech, tak v řadách 74xx, případně 74LSxx logiky TTL nebo „pomalých“ obvodů číslicové logiky CMOS řady 4000 [9, 10]. Stejným generátorem lze též měřit dobu ustálení výstupního napětí nebo proudu u výše zmíněných obvodů.

Užití vytvořeného zařízení ve výuce

Zamysleme se, jak je možné uvedený generátor s příslušenství využít při výuce fyziky, respektive odborných předmětů. Samozřejmě ve spojení s osciloskopem při sledování průběhu děje v elektrických obvodech. Mnozí namítnou, že v době masového rozšíření PC, internetu a počítačových animací je takovéto zařízení zbytečné. Opak je však pravdou! Doba, kdy použití PC při výuce bylo výrazným motivujícím prvkem pro žáky všech věkových kategorií, už dávno pominula a velmi častá realita – výuka fyziky bez reálných pokusů je kromě jiného jednou z příčin, proč se fyzika nachází na spodním konci oblíbenosti školních předmětů. Všichni známe zaujetí žáků, pokud jsou vtaženi do reálného experimentu, který navíc často končí překvapivým, paradoxním zjištěním a jejich následnou spontánní reakci. Proto je nutné vždy virtuální experiment považovat pouze za doplněk reálného experimentu a v tomto duchu vést výuku.

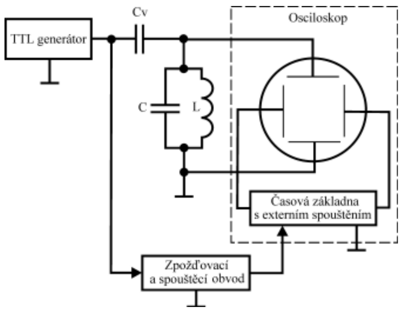
Konkrétní využití navrženého generátoru je například zobrazení tlumených elektrických kmitů. Tento jev se na ZŠ standardně nevyučuje, ale jako rozšiřující učivo ho najdeme v učebnici [11]. Sestavit vhodný elektrický obvod není problém. Stačí k tomu cívka z rozkladného transformátoru o 600 závitech (vlastní indukčnost $L = 42$ mH), dva vhodné kondenzátory, jeden $C = 0{,}1\ \mu\mathrm{F}$ tvoří s cívkou kmitavý obvod LC a druhý, vazební $C_\mathrm{v} = 0{,}1\ \mu\mathrm{F}$, potom zajišťuje kapacitní vazbu pro opakované nabití obvodu LC. Problémem je připojení vazebného kondenzátoru na vhodný zdroj impulzu a především jeho synchronizace s časovou základnou osciloskopu. Na starších osciloskopech značky Tesla® byly k dispozici vývody pilových kmitů, které byly synchronizovány s nastavenou časovou základnou osciloskopu. V tomto případě bylo vlastní zapojení experimentu triviální (obr. 4).



Obr. 4: Obvod LC buzený pilovými kmity z osciloskopu

Současné osciloskopy většinou výstup uvedeného signálu nemají. A zde je právě místo pro výše popsaný jednoduchý generátor. Zapojíme-li zmíněný obvod, dostaneme na obrazovce osciloskopu stabilní tlumené kmity, které můžeme porovnat např. se sinusovým průběhem střídavého proudu a ukázat žákům rozdíl mezi tlumeným a netlumeným kmitavým pohybem.

Blokové schéma zapojení pro sledování tlumených kmitů rezonančního obvodu je uvedeno na obr. 5.

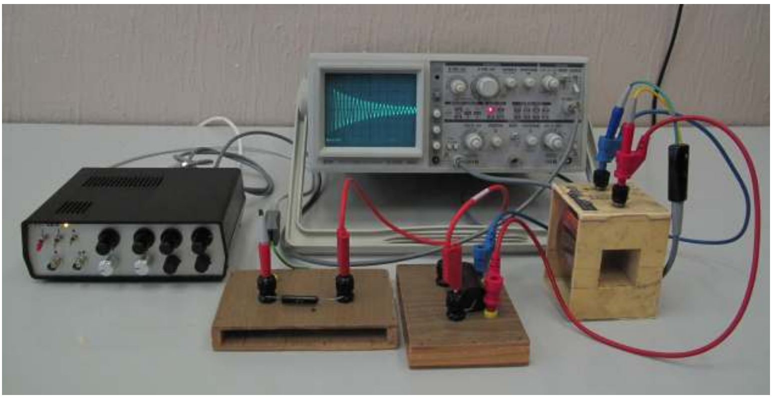


Obr. 5: Blokové schéma zapojení pro sledování tlumených kmitů

Skládá se z vlastního zkoumaného paralelního rezonančního obvodu LC, výše popsaného generátoru TTL, kterým je obvod buzen přes oddělovací vazební kondenzátor C_v, dále výše uvedeného zpožďovacího a spouštěcího obvodu, který slouží k synchronizaci osciloskopu s budícími kmity prostřednictvím vstupu pro externí spouštění časové základny osciloskopu.

Externí spouštění časové základny umožňuje velký rozsah posouvání zobrazených tlumených kmitů od počáteční velké amplitudy až po téměř úplné utlumení.

Při výuce fyziky na gymnáziích [12] se již setkáme s podrobným vysvětlením obvodu LC a se vznikem tlumených kmitů. Pomocí výše popsaného obvodu podobně jako na ZŠ můžeme nejen přesvědčivě ukázat tlumené kmity obvodu, ale i přistoupit ke kvalitativní analýze tohoto jevu, především Thomsonova vztahu pro výpočet periody kmitavého obvodu. Při vložení vhodného jádra do dutiny cívky, tj. změníme-li její vlastní indukčnost, vidíme změnu na horizontální škále oscilogramu, tj. prodloužení periody rezonančních kmitů uvedeného obvodu. Jestliže použijeme samotnou cívku a uvedený kondenzátor, tak jak výpočtem, tak odečtením časového intervalu, délky periody jednoho kmitu na stupnici dle nastavené časové základny osciloskopu, dojdeme k přibližně stejné hodnotě délky periody $T = 0{,}42$ ms. Máme-li k dispozici vhodný multimetr pro měření indukčnosti cívky, resp. kapacity kondenzátoru, můžeme vytvořit postupně obvody LC o různých periodách rezonančních kmitů a na základě výpočtu a změřením periody ověřit zmiňovaný Thomsonův vztah. Obr. 6. ukazuje konkrétní uspořádání jednotlivých komponentů při měření tlumených kmitů, detail oscilogramu je zobrazen na obr. 7.

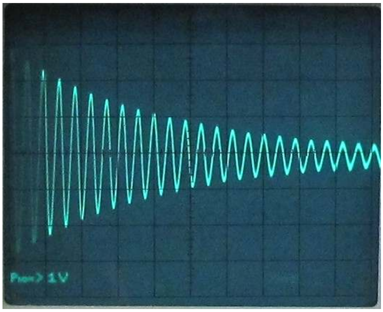


Obr. 6: Měření parametrů tlumených kmitů paralelního obvod LC

Na středních odborných školách zaměřených na elektrotechniku (viz učebnici [13]) lze uvedený generátor použít opět ve spojení s osciloskopem ke sledování přechodných dějů. Například ke sledování časového průběhu nabíjení a vybíjení kondenzátoru. Ze získaných oscilogramů lze potvrdit platnost známých vztahů pro nabíjení a vybíjení kondenzátoru:

$$u_t = U_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad \text{resp. vybíjení } u_t = U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

Uvedený generátor lze samozřejmě také využít při přípravě budoucích učitelů fyziky, ať už v základním měřicím praktiku, nebo v praktiku z elektroniky ke sledování periodických dějů. U výše uvedených tlumených kmitů lze sledovat další parametry. Například porovnat koeficient útlumu vypočteného z odporu cívky a její indukčnosti s koeficientem útlumu vypočteným z naměřených, postupně se snižujících hodnot napětí na oscilogramu, které určíme na základě kalibrace vertikální osy osciloskopu.



Obr. 7: Detail oscilogramu tlumených kmitů

Závěr

Byl realizován jednoduchý dvoukanálový generátor TTL dle schématu na obr. 2, u kterého jsou dva kmitočty signálu nezávisle nastavitelné v šesti přepínatelných rozsazích od cca 50 Hz do 25 MHz. Bez použití děličky s obvodem J-K do 50 MHz. Čítačem ověřovaná stabilita kmitočtu byla lepší než 0,01 %, výstupní proud až 0,5 A, při napětí 5 V. Do skříňky s generátorem (viz obr. 6 vlevo), byl též umístěn i synchronizační obvod (trigger), zapojený dle schématu na obr. 3 s obvody B74HCT123™ a 74HCT112™, který má též nastavitelné rozsahy a umožňuje plynule nastavovat zpoždění od jednotek ns do desítek ms. Jeho TTL výstup je též posílen tranzistorem BS170 na 0,5 A. Taktéž šíře spouštěcího impulsu je nastavitelná od 0,1 µs do cca 1 µs. Spouštěcí a zpožďovací obvod se propojuje s generátorem a připojuje do vnějšího obvodu koaxiálními kabely přes vyvedené konektory BNC na zadní straně skříňky. Všechny součásti výše popsaného generátoru tj. generátor se 74HCT132™, dvojitý klopný obvod J-K

74HCT112™ použitý jako dělička, jednoduchý spínací stupeň s tranzistorem BS170 i synchronizační a zpožďovací obvod je možno samozřejmě realizovat i používat samostatně.

Generátor je relativně odolný hrubému zacházení. V případě jeho přetížení připojením k vyššímu napětí dojde ke zničení relativně velmi levných součástek. Cena použitých obvodů je v relaci 10 Kč a u tranzistoru BS170 dokonce 1,50 Kč. Náklady, včetně napájecího transformátoru, usměrňovače, filtrace a stabilizátoru, skříňky a konektorů BNC, nepřesáhly 500 Kč. Parametry generátoru jsou srovnatelné s některými komerčními zařízeními, jak je uvedeno ve firemních nabídkách generátorů, avšak náklady dosahují cca 10 %. Proto se domníváme, že jsou uvedené obvody velmi vhodné pro aplikace ve školství, ať už k přímému použití při vybraných experimentech na nižších stupních škol nebo na odborných školách jako námět k jeho realizaci.

Literatura

[1] *Šmíd, J.*: Jednoduchý vf generátor 700 Hz až 35 MHz. Amatérské radio A, roč. 30 (1989), č. 10, s. 385–386.

[2] http://cs.wikipedia.org/wiki/Klopn%C3%BD_obvod#Schmitt.C5.AFv_klopn%C3%BD_obvod [cit. 22. 1. 2013].

[3] 74HCT132. http://www.rentron.com/Files/74hct132.pdf [cit. 22. 1. 2013].

[4] 74HCT112. http://www.datasheetcatalog.org/datasheet/philips/74HC_HCT112_CNV_2.pdf [cit. 22. 1. 2013].

[5] BS170. http://www.fairchildsemi.com/ds/BS/BS170.pdf [cit. 22. 1. 2013].

[6] *Adámek, P.*: UV 20376 Měřicí systém pro sondovou diagnostiku plazmatu Langmuirovou sondou. [cit. 22. 1. 2013] http://isdv.upv.cz/portal/pls/portal/portlets.pts.det?xprim=1464052&lan=cs

[7] 74HCT123. http://www.ti.com/lit/ds/symlink/cd74hct423.pdf [cit. 22. 1. 2013].

[8] 2N4401. http://pdf.zener.ru/101562.pdf?datasheet NXP Semiconductors%20 2N4401,116 [cit. 22. 1. 2013].

[9] *Jedlička, P.*: Přehled obvodů řady 4000 – 1. díl. Ben – Technická literatura, Praha, 2005.

[10] *Jedlička, P*: Přehled obvodů řady 4000 – 2. díl. Ben – Technická literatura, Praha, 2005.

[11] *Rauner, K. a kol.*: Fyzika 9, učebnice pro ZŠ a víceletá gymnázia. Fraus, Plzeň, 2007.

[12] *Lepil, O., Šedivý, P.*: Fyzika pro gymnázia – Elektřina a magnetismus. Prometheus, Praha, 2008.

[13] *Láníček, R.*: Elektronika – obvody – součástky – děje. Ben – Technická literatura, Praha, 2002.

INFORMATIKA

Novinky v HTML5 a CSS3

1. díl seriálu

VLASTISLAV KUČERA

Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové

V tomto seriálu se seznámíme s novinkami, které se objevily v jazycích HTML5 a CSS3. I když ještě nejsou oba jazyky uznány jako standard pro publikování obsahu na webu – v současné době jsou standardy jazyky HTML4.01, XHTML1 a CSS2.1 – tvůrci / výrobci prohlížečů však již delší dobu, cca 2 roky, nové prvky jazyků HTML5 a CSS3 implementují do verzí svých prohlížečů. O tom, jak je na tom s podporou HTML5 a CSS3 prohlížeč, který právě používáme, můžeme zjistit pomocí [1], [3]. Na [2] nalezneme přehled nových vlastností a jejich podporu v jednotlivých verzích prohlížečů.

Vymezení pojmů

Protože se v literatuře vyskytují rozdíly v pojmenování základních komponent jazyka HTML, považuji za potřebné uvést pojmenování, které budu v následujícím textu používat.

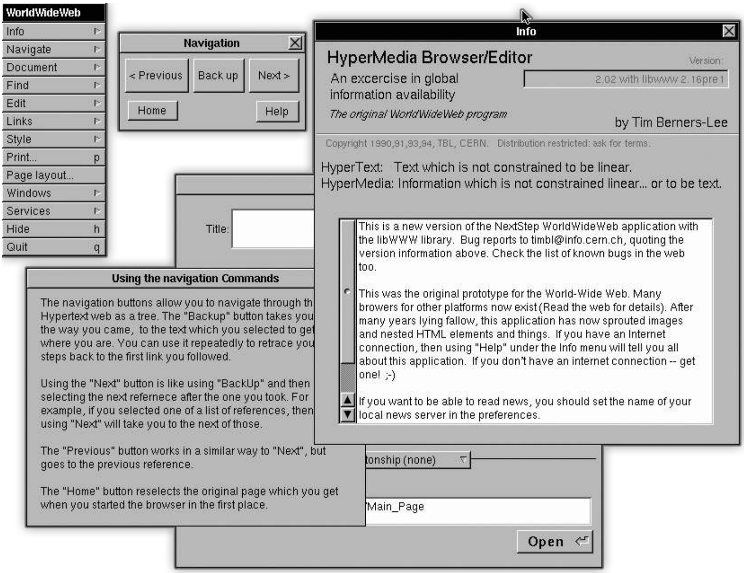
Prvek – základní komponenta jazyka HTML. Můžeme se také setkat s pojmenováním element. Prvek se skládá z počáteční značky, např. `<p>`, obsahu a koncové značky, např. `</p>`. Některé prvky nemusí mít obsah, v takovém případě mluvíme o prázdném prvku, např. `<img>`. Co se má zobrazit pomocí prázdného prvku, je dáno parametry počáteční značky.

Značka neboli tag. Značky dělíme na párové a nepárové. Párové značky mají počáteční (`<p>`) a koncovou (`</p>`) značku, nepárové jenom počáteční (`<img>`, `<br>`).

Parametr – můžeme se také setkat s pojmenováním atribut. Hodnotu, kterou může parametr nabývat, budu označovat hodnotou parametru.

Stručně o HTML

Historie HTML se začala psát počátkem 90. let 20. století. V první verzi nebyl podporován grafický režim. Jinak řečeno, stránky vypadaly jako textové soubory. Na obr. 1 je vidět, jak zobrazoval www stránky první webový prohlížeč WorldWideWeb (http://cs.wikipedia.org/wiki/WorldWideWeb). Tento prohlížeč byl později přejmenován na Nexus.



Obr. 1

Až později, kdy rostla popularita webu, byla do nových verzí přidávána podpora grafiky, formulářů, tabulek, zarovnávání textu a prvky pro definici vzhledu stránky.

Skutečnou revoluci v tvorbě stránek znamenal konec roku 1997, kdy byla vydána 4. verze jazyka HTML. V této verzi se poprvé mluví o oddělení významu (obsahu) od vzhledu. Vzhled má být pro příště definován připojitelnými styly. Tak se dostal do popředí jazyk CSS. Proto také ze 4. verze jazyka HTML byly vyřazeny prvky, které definovaly vzhled jednotlivých částí stránky.

V roce 2007 se začalo pracovat na nové verzi jazyka HTML, na verzi HTML5. Její specifikace byla dokončena v roce 2012. Ukončení specifikace a standardizace jazyka HTML5 se předpokládá kolem roku 2020 (některé zdroje mluví o roku 2022).

Stručně o XHTML

Jazyk XHTML vznikl v roce 2000 jako nástupce jazyka HTML4.01. XHTML je vlastně kombinací jazyka HTML a obecného značkovacího jazyka XML. XHTML byl navržen tak, aby vyhovoval podmínkám tvorby XML dokumentů, ale aby přitom byla zachována zpětná kompatibilita s jazykem HTML.

XML je obecný značkovací jazyk, umožňující snadné vytváření konkrétních značkovacích jazyků. XML je hlavně určen pro výměnu dat mezi aplikacemi. Dále pak pro publikování dokumentů, kde je třeba popsat strukturu z hlediska obsahu jednotlivých částí. Při tvorbě dokumentu pomocí jazyka XML si můžeme definovat vlastní značky, např. `<auto>`, `<značka>`. To, jak se zobrazí v prohlížeči, pak definujeme pomocí kaskádových stylů.

Při vytváření XML dokumentu ale musíme dodržovat jistá pravidla: XML v názvech značek rozlišuje malá a velká písmena (v XML `<Auto>` není totéž co `<auto>`) všechny prvky musí mít počáteční a koncovou značku (`<auto> </auto>`, případně prázdná značka `<auto />`), hodnoty parametrů musí být v uvozovkách.

Jazyk XHTML je vlastně aplikací výše uvedených pravidel do jazyka HTML: značky musí být uvedeny malým písmenem (`<H1>` je v XHTML nepřípustné, správný zápis je `<h1>`), všechny značky musí být ukončeny (např. značka `<img>` v HTML je v XHTML definována `<img />`), hodnoty parametrů musí být v uvozovkách.

Stručně o CSS

Jazyk CSS oficiálně vznikl koncem roku 1996. Jeho rozšíření mezi tvůrce však bránila nepříliš velká podpora v prohlížečích. Opravdový význam jazyka CSS nastal až po vydání 4. verze jazyka HTML, ve kterém, jak je uvedeno výše, nahrazuje formátovací elementy jazyka HTML. Pomocí jazyka CSS můžeme definovat např. barvu textu, velikost textu, styl textu, barvu pozadí, rozestupy mezi jednotlivými prvky, rozmístění prvků apod.

Druhá verze jazyka CSS byla vydána v roce 1998, která je po malé aktualizaci platná ve verzi 2.1. Tato verze je, stejně jak je to u verzí jazyka HTML, rozšířením předchozí verze.

HTML5

Jazyk HTML5 v sobě kombinuje, stejně jako u předchozích verzí, stávající prvky, které jsou obsaženy ve verzi 4, případně jsou stávající prvky předefinovány, a přidává k nim nové prvky, např, article, section, header a další.

CSS3

CSS3 je také, jako u jazyka HTML5, v podstatě rozšíření stávajícího jazyka CSS2.1. CSS3 přidává k již definovaným prvkům nové, které výrazně ulehčí práci vývojářům. Ve verzi 3 jsou nově definovány např. vlastnosti pro definici zaoblených rohů, přechodů, více obrázků na pozadí apod.

Podpora HTML5 a CSS3 v prohlížečích

I když jsem v úvodu poznamenal, že tvůrci prohlížečů do posledních verzí implementují nové prvky jazyků HTML5 a CSS3, nemusíme mít obavu, že starší prohlížeče stránky nezobrazí nebo že by prohlížeče přestaly pracovat. Prohlížeč zobrazí prakticky jakoukoliv značku. Pokud použijeme vlastní značku v HTML dokumentu a pomocí jazyka CSS ji nastylujeme – nastavíme vlastnosti – prohlížeč na novou značku aplikuje definované styly, které „umí“ zpracovat, a zobrazí ji. Podobné je i při použití HTML5. Starší verze prohlížečů, které nemají implementovánu podporu HTML, nové značky jazyka HTML5 „berou“ jako značku, kterou vytvořil tvůrce stránky a pokud taková značka má definované vlastnosti pomocí CSS, nemá prohlížeč problém s jeho zobrazením.

Stejně jako v reálném životě, tak i mezi prohlížeči existuje výjimka. Tou výjimkou je Internet Explorer do verze 9, tj. Internet Explorer verze 5–8. Tyto verze byly naprogramovány, přesněji řečeno jejich vykreslovací jádra, tak, aby prvky jazyka HTML, které neznají, nezobrazovaly a aby takovým prvkům nebylo možné přiřadit styly. V těchto verzích se tedy bez „cizí“ pomoci nové prvky jazyka HTML5 nezobrazí. Proto byl vyvinut kód ve skriptovacím jazyce JavaScript, který „naučí“ i tyto verze poznávat nové prvky jazya HTML5. Tento skript se jmenuje HTML5shiv a je k dispozici na adrese [4]. Tento skript si můžeme stáhnout a přiložit našemu webu. Ve zdrojovém kódu hmtl dokumentu se použije tzv. podmínkový komentář, který umí Internet Explorer zpracovat. Pomocí tohoto komentáře řekneme, kdy se má jeho obsah zpracovat. Např. zápis:

```
<!-[if lt IE 9]>
<script src="html5shiv.js"> </script>
<! [endif] -->
```

zpracuje pouze Internet Explorer starší než 9.

HTML5shiv není jediný skript, který zapíná nové prvky jazyka HTML ve starších verzích Internet Exploreru. Dalším je např. Modernizr [5]. Při použití Modernizru již nemusíme použít HTML5shiv.

Nyní se již podíváme na nové vlastnosti a prvky jazyka HTML5, odlišný zápis stávajících prvků, jejich rozdělení do kategorií.

Dělení prvků

V jazyce HTML4 byly prvky členěny na blokové a řádkové. Mezi blokové prvky patří např. prvek pro definici nadpisu `h1`, odstavce `p`. Řádkové prvky jsou např. prvek pro vložení obrázku `<img>`, odkazu `<a>`. Blokové prvky se zobrazují vždy na novém řádku (pod sebou), řádkové na stejném řádku (vedle sebe). Toto dělení je spjato s jejich výchozím zobrazením podle specifikace HTML4. Při změně zobrazení pomocí kaskádových stylů však toto rozdělení ztrácelo smysl.

V jazyce HTML5 bylo toto členění přepracováno. Prvky nově dělíme do kategorií formulující obsah, rozdělující obsah a nadpisový obsah. Toto rozdělení je přesnější, protože na výsledném zobrazení mají vliv kaskádové styly.

Do kategorie nadpisový obsah spadají prvky `h1`, `h2`, `h3`, `h4`, `h5`, `h6`. Do kategorie rozdělující obsah patří nové prvky jazyka HTML5: article, aside, nav a section. Kategorie formulační obsah spadají prvky, které označují text, obrázky, odkazy a další.

DOCTYPE

Pomocí DOCTYPE řekneme prohlížeči, jaký typ dokumentu zpracovává. V případě HTML se jedná o verzi a typ. DOCTYPE se musí vyskytovat na začátku html dokumentu. Jeho definice v HTML4 byla poněkud složitější, např. pro HTML4 striktní typ bylo potřeba doplnit následující:

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/strict.dtd">
```

Vidíme, že uvedenou definici není snadno si zapamatovat. Proto tvůrci stránek začali využívat takové programy pro tvorbu webových stránek, kde jsou obsaženy šablony, obsahující tyto definice, nebo programy, kde je možné si vytvořit a uložit šablony dokumentů.

V jazyce HTML5 je definice DOCTYPE mnohem jednodušší:

```
<doctype html>
```

Z definice zmizela číslovka určující verzi a také typ verze. Od HTML5 již existuje jenom jeden typ. Číslovku již také nemusíme uvádět, protože se předpokládá, že se nové verze jazyka HTML budou vyvíjet z předchozích.

Kódování stránky

Dalším prvkem, jehož zápis byl v jazyce HMTL5 zjednodušen, je prvek pro uvedení kódování znaků dokumentu, např. Windows-1250, UTF-8. Do verze HTML4 včetně mělo uvedení kódování tento tvar:

```
<meta http-equiv="content-type" content="text/html;
  charset=windows-1250">
```

V jazyce HTML5 je prvek zjednodušen jak je to jenom možné:

```
<meta charset="Windows-1250">
```

Připojení stylového předpisu

Ve verzi 4 se externí stylový předpis připojoval pomocí prvku `<link>`, který kromě parametru href pro zadání adresy souboru se stylovým předpisem a parametru rel, pomocí něhož uvádíme, zda se jedná o preferovanou (stylesheet) nebo alternativní verzi (alternate stylesheet) stylu, obsahoval i parametr type, pro uvedení typu připojovaného dokumentu (type/css):

```
<link rel="stylesheet" href="style.css" type="text/css">
```

Při použití jazyka HTML5 nemusíme používat parametr type, všechny prohlížeče totiž obsahový typ stylového předpisu rozeznají:

```
<link rel="stylesheet" href="style.css">
```

Připojení skriptů k html dokumentu

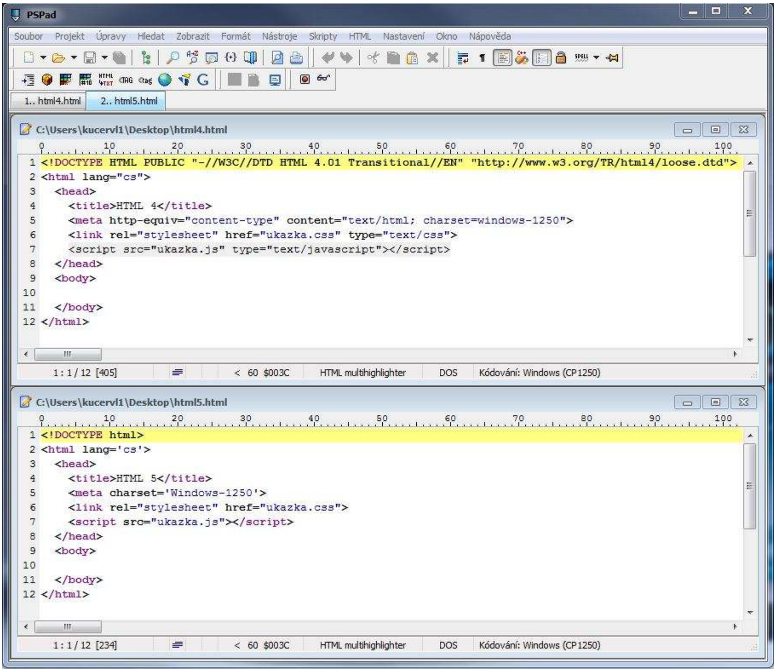
Podobně jako u připojení stylového předpisu až do verze HTML4 včetně jsme museli uvádět typ připojovaného skriptu, neboli, v jakém jazyce je skript napsán. Když např. v jazyce HTML4 připojujeme skript napsán v jazyce JavaScript, museli jsme uvést následující deklaraci:

```
<script src="script.js" type="text/javascript"> </script>
```

JavaScript je v současné době jediným skriptovacím jazykem, který se používá na webu, a také prohlížeče předpokládají, že používáme JavaScript, není v HTML5 nutné uvádět parametr type:

```
<script src="script.js"> </script>
```

Na obr. 2 jsou názorně ukázány rozdíly ve zdrojovém kódu jazyka HTML4 a HTML5



Obr. 2

Závěr

V této části jsme se zabývali historií jazyků HTML5 a CSS. Podívali jsme se na změny, které dotýkají prvků, které se definují v hlavičce html dokumentu. V příští části se podíváme na nové prvky jazyka HTML, které nám pomáhají lépe strukturovat/členit html dokument.

Literatura

[1] The HTML5 test – how well does your browser support HTML5? [online] [cit. 2013-05-21] Dostupné z: http://html5test.com

[2] Can I use... Support tables for HTML5, CSS3, etc. [online] [cit. 2013-05-21] Dostupné z: http://caniuse.com

[3] The CSS3 Test. [online] Dostupné z: http://css3test.com [cit. 2013-05-21].

[4] Html5shiv – HTML5 IE enabling script. [online] [cit. 2013-05-21] Dostupné z: http://code.google.com/p/html5shiv/

[5] Modernizr: The feature detection library for HTML5/CSS3. [online] [cit. 2013-05-21] Dostupné z: http://modernizr.com/

[6] *Goldstein, A., Lazaris, L., Weyl, E.*: HTML5 a CSS3 pro webové designéry. Vyd. 1. Zoner Press, Brno, 2011.

[7] *Castro, E.*: HTML5 a CSS3. Computer Press, 2012.

Bobřík učí informatiku

2. díl – Procházení grafů

DANIEL LESSNER – JIŘÍ VANÍČEK

Matematicko-fyzikální fakulta, UK Praha

Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

V tomto dílu jsme vybrali sadu úloh o grafech a jejich procházení (resp. o stavovém prostoru). Jak z úloh zjistíme, nejedná se o znázornění tabulkových hodnot, známé z hromadného zpracování dat. Stejně tak se nejedná o grafy funkcí, známé z matematiky. Grafy v informatice jsou nástrojem k zachycení vztahů mezi objekty. Mezi příklady grafu patří rodokmen (vztahy mezi členy rodiny), schéma dopravních spojení mezi městy pro hledání nejkratší cesty, grafické znázornění výrobního procesu apod. Grafem je i vývojový diagram, ukazující postup kroků při vykonávání počítačového programu.

Objekty můžeme v grafu vyznačit jako body (tzv. vrcholy) a vztahy mezi těmito objekty pak jako spojnice těchto bodů (tzv. hrany – názvosloví je odvozeno od sítí mnohostěnů). Grafy nám pomohou s řešením mnoha problémů, protože pro ty nejčastější existují známé algoritmy. S grafy souvisí řada historických matematických úloh jako Eulerova procházka po sedmi mostech města Královce, Hamiltonova procházka po vrcholech pravidelného dvanáctistěnu nebo tzv. problém čtyř barev na politické mapě (http://teorie-grafu.cz).

Student by měl umět najít informaci zaznamenanou v grafu, porozumět jí, měl by s ní umět pracovat a měl by graf v odpovídající situaci sám k záznamu a práci použít.

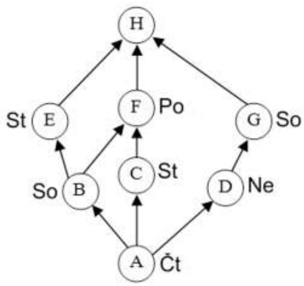
Graf cesty dostavníkem

Kategorie Senior, autor Martins Balodis

Zadání

Na divokém západě se několik městeček rozhodlo zrealizovat dostavníkové spojení. Celkem tak bylo propojeno osm městeček – označme je A, B, C, D, E, F, G a H. Potřebujeme dopravit zásilku z městečka A do H. Mezi všemi městečky sice nefunguje přímé spojení, ale je možné cestovat s přestupy.

Graf na obr. 1 ukazuje, mezi jakými městečky je přímé spojení, a také v jaký den dostavníky z určitého městečka odjíždí ve směru k H. Všechny dostavníky vyjíždí vždy brzy ráno a do cíle přijíždí večer toho samého dne. Jaká je nejrychlejší cesta pro zaslání zásilky z městečka A do H?



Obr. 1

A) A-B-E-H B) A-B-F-H C) A-C-F-H D) A-D-G-H

Co má tato úloha společného s informatikou

Polovina cesty k vyřešení problému často spočívá v nalezení správného pohledu na věc – i to je důležitá dovednost informatika. V této úloze jsme soutěžícím vhodný pohled rovnou připravili. Situaci jsme v zadání namísto slovního popisu odjezdu dostavníků z jednotlivých měst znázornili mnohem přehledněji, totiž nakresleným grafem. Uzly grafu jsou města, orientované hrany odpovídají spojením. Uzly navíc nesou informaci o dni odjezdu dostavníku.

Informatik v této úloze vidí klasické hledání nejkratší cesty v grafu, tedy obdobu úlohy, kterou každodenně plní automobilové GPS navigace nebo služba na adrese http://maps.google.com. Situace v úloze je zjednodušená tím, že jsou jasně dané směry spojů a v grafu se nelze zacyklit. Naopak neobvyklý je způsob zadání vzdálenosti měst prostřednictvím dnů odjezdu, tedy doby čekání (můžete prozkoumat, nakolik takto pojatá vzdálenost splňuje požadavky na obecnou funkci vzdálenosti z prvního dílu seriálu). Transformovat nový problém na problém starší s již známým způsobem řešení je důležitou a především oblíbenou dovedností informatika.

Zdůvodnění správné odpovědi

Kdo nezná způsoby hledání nejkratších cest v grafu, může probrat jednotlivé možnosti.

	Čt	Pá	So	Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So	Ne	Po	Út	St
A-B-E-H	B		E				H							
A-B-F-H	B		F		H									
A-C-F-H	C						F					H		
A-D-G-H	D			G						H				

V této tabulce jsou popsány všechny nabídnuté cesty. Jednotlivá města jsou uvedena ve sloupci příslušném dni příjezdu do daného města. Např. u první varianty A-B-E-H je vidět, že zásilka jela trasu A-B ve čtvrtek, B-E v sobotu a E-H ve středu. Do cíle tak dorazila ve středu. Snadno tak uvidíme, že *správná odpověď je B) A-B-F-H.*

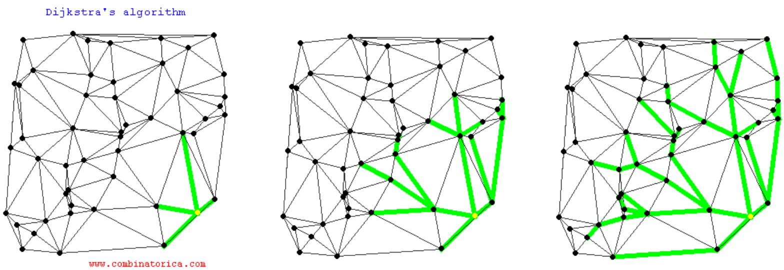
Kromě výše naznačeného řešení pomocí tabulky se nabízí i další postupy – zdánlivě složitější, ale snáze použitelné pro rozsáhlejší grafy a koneckonců snáze proveditelné na počítači. Proto je zde krátce zmíníme.

Na začátku je z grafu jasné, že nejdříve se dostaneme do měst B, C a D a že dříve než ve čtvrtek večer to být nemůže. V následujících krocích postupujeme analogicky. Zapisujeme si ta města, do kterých se můžeme na základě už známých nejkratších cest dostat nejdřív. Z uvažovaných možností, tzn. odjezdů z měst B, C a D přijde po čtvrtku nejdřív sobota. Z předchozího postupu vyplývá, že dříve než v sobotu večer se do měst

E a F dostat nedá. V neděli můžeme dojet do města G. Další nejdříve dosažitelné město je už naše cílové město H, a to jde nejdříve v pondělí (z města F). Z předchozích úvah plyne, že jsme použili nejrychlejší cestu, tedy A-B-F-H.

Všimněte si, že tento přístup znamená méně práce, než kolik je třeba k vyplnění uvedené tabulky, vysvětlující správné řešení (zejména v případě, kdy by možných cest existovalo víc). Právě efektivita je jedním z ústředních pojmů informatiky: snažíme se hledat úsporná řešení a i to se snažíme dělat úsporně.

Podívejte se na obr. 2 a představte si, kolik řádků by měla příslušná tabulka všech možných cest z pravého dolního do levého horního rohu.



Obr. 2

Naznačený algoritmus postupuje mnohem úsporněji. V každém kroku zeleně označí cestu k místu, které je nejblíže k dosud dosaženým místům. Díky dodržení této podmínky pak platí, že zelené (silnější) cesty jsou právě ty nejkratší do pravého dolního rohu. Jakmile tedy nějaká zelená cesta dosáhne cílového vrcholu, jistě to bude součást cesty nejkratší.

Pro více informací hledejte *Dijkstrův algoritmus*.
(obrázek z http://www.cs.sunysb.edu/škiena/combinatorica/animations/anim/dijkstra.gif)

Sklenice

Kategorie Junior, autor Lily Kostiv

Zadání

Na stole stojí pět sklenic, jedna je překlopená (obr. 3). V jednom kroku se smí otočit vždy přesně 3 sklenice: stojící se překlopí, překlopené se postaví. Kolik nejméně kroků je potřeba, aby všechny sklenice stály? Zapiš číslo.

Obr. 3

Co má tato úloha společného s informatikou

Hledáme posloupnost kroků, které vedou z výchozí situace k vytyčenému cíli. Naše kroky přitom musí splňovat daná pravidla. V každé situaci můžeme provést jeden z předem jasně definovaných kroků, který nás dostane do situace nové. Takové vlastnosti ovšem nemá jen pětice sklenic. Kromě mnoha dalších situací ze života má takové vlastnosti Turingův stroj a také každý von Neumannovský stroj včetně počítačů.
(http://cs.wikipedia.org/wiki/Von_Neumannova_architektura)

Představte si obrázek, ve kterém jsou zakresleny všechny možnosti otočení sklenic – říkejme jim stavy. Následně spojíme šipkou ty stavy, mezi nimiž lze přejít právě jedním povoleným krokem (tedy točením tří sklenic). Nalezení řešení je pak vlastně totéž, co procházení bludištěm. Možná už vidíte souvislost s úlohou o dostavnících. Pěkné video o stavovém prostoru najdete na http://www.youtube.com/watch?v=wkSMJfngxyM (koza, vlk a zelí). Stavový prostor patří k základní výbavě informatika.

Myšlenka stavového prostoru se hodí pro řešení velkého množství problémů. Využívá se např. v úlohách na plánování, tedy „které kroky dělat v jakém pořadí, abychom se dostali z výchozí situace do cílové“. Plánování se využívá při organizaci kontejnerů v docích nebo při stavbě velkých dopravních letadel. Plánovat takové procesy „z hlavy“ je nad běžné lidské síly. Jinou oblastí využití je umělá inteligence například v tahových hrách. Více informací na http://cs.wikipedia.org/wiki/Minimax_%28algoritmus%29.

Z pravidel chování systému často plyne tzv. invariant: vlastnost či tvrzení, které je v systému splněno za každých okolností. Porušení invariantu by znamenalo, že děláme něco špatně. Nejen v rekreačních úlohách se vyplatí hledat invariant založený na paritě, tedy sudosti či lichosti (nebo jejich změny) v systému. Invariant nám může o daném systému pomoci dokazovat překvapivě silná tvrzení.

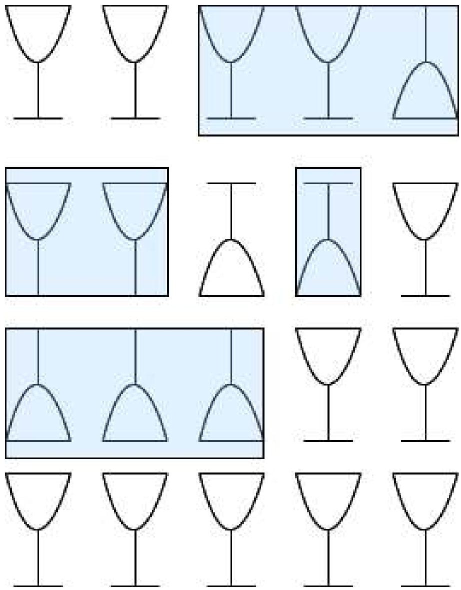
Zdůvodnění správné odpovědi

Je zřejmé, že na jeden krok sklenice neotočíme. Nanejvýš jednu otočíme správně (aby stála), alespoň dvě ale „pokazíme“.

Nepodaří se nám to ani na dva kroky. Otáčíme lichý počet sklenic, na začátku máme jedinou převrácenou, a celkově je sklenic lichý počet. Po prvním kroku otočení bude převrácený sudý počet sklenic (2 nebo 4). Po druhém kroku bude počet převrácených sklenic naopak lichý.

Při překlápění nacházíme invariant: parita počtu převrácených sklenic se po každém kroku změní. Nula je sudé číslo, proto s ohledem na uvedený invariant nelze dosáhnout cílového stavu po sudém počtu kroků.

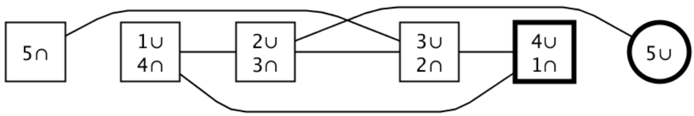
Bude tedy nutno postavit sklenice přinejmenším na tři kroky. Na obr. 4 uvádíme možný postup (označené sklenice v příštím kroku otočíme).



Obr. 4

Jak ale takový postup najít systematicky? A jak potvrdit, že je nejkratší, když se nedaří jednoduše vyvrátit existenci kratších postupů? Pomůže nám právě stavový prostor. Předně si ale musíme uvědomit, čím je určen stav. Naším úkolem je získat pět správně stojících sklenic, v jednom kroku otáčíme libovolnou trojici. Jediné, na čem při tomto kroku záleží, je kolik otočíme stojících a kolik převrácených sklenic. Není tedy nutno rozlišovat jednotlivé sklenice. Rozdílných stavů tak bude jen šest (5 převrácených sklenic, 4 převrácené, atd. až 1 převrácená a 0 převrácených). To je příjemné, protože malý stavový prostor se dobře kreslí.

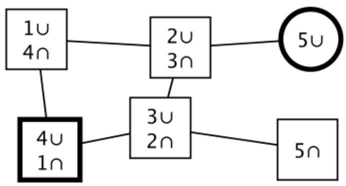
Dále si uvědomíme, že kroky jsou vratné. Není proto třeba do grafu kreslit šipky, podle kterých by se mezi stavy přecházelo, protože byly by vždy dvě proti sobě. Podle toho, jak si stavy rozmístíme, dostaneme podobný graf (obr. 5):



Obr. 5

Ve vrcholech tohoto grafu jsou vidět možnosti postavení sklenic na stole, vyjádřené počtem stojících (∪) a počtem převrácených (∩) sklenic. Výchozí stav daný zadáním úlohy je vyznačen silnějším rámečkem, koncový stav je kulatý. Hrany znázorňují všechny způsoby, jak lze mezi stavy přecházet (dlouhé čáry představují krok, kdy všechny tři převracené sklenice buď stojí, nebo jsou překlopené, krátké čáry krok, kdy převracíme 1 sklenici stojící a 2 překlopené (nebo opačně).

Z grafu je zřejmé, který krok je třeba učinit pro který přechod (podle toho, mezi kterými stavy přechod vede). Pro náš stavový prostor najdeme přehlednější uspořádání (obr. 6):



Obr. 6

V grafu už snadno vidíme, že cílového stavu z výchozího nelze dosáhnout méně než třemi kroky, a že existují právě dva postupy, které to umožňují nejkratším způsobem. Vidíme také jasně, že platí nalezený invariant střídání sudého a lichého počtu sklenic v dané pozici; při přesunu do vedlejší pozice se počet postavených sklenic změní z liché na sudou nebo obráceně, totéž platí u převrácených sklenic.

Nakreslení stavového prostoru nám posloužilo k získání lepšího přehledu o celém problému – málokomu se na první pohled jeví takto jednoduchý. Při soutěžním řešení ho samozřejmě nemusíme kreslit celý. Začneme výchozím stavem a budeme postupně přidávat, dokud nedojdeme do cíle.

Důležité je před nakreslením každého nového stavu ověřit, zda už ho někde nemáme. Předejdeme tak bloudění v kruzích.

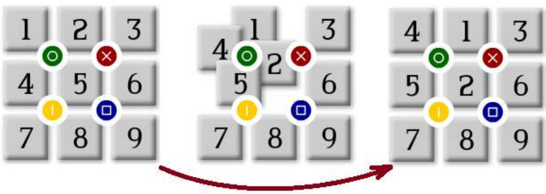
Jak najít nejkratší cestu (především v případě složitějšího prostoru), lze odvodit z komentáře k předchozí úloze. Než se k tématu v některé z příštích úloh vrátíme, může čtenář pomocí stavového prostoru vyřešit úlohu o přelévání: http://teorie-grafu.cz/procvicovani/prelevani-mleka.php

Otáčivý hlavolam

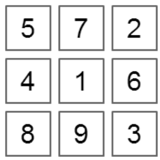
Kategorie Junior i Senior, autorka Mónika Lámfalusi

Zadání

Hlavolam obsahuje 9 očíslovaných hracích kamenů (obr. 7). Když klikneš na barevné tlačítko, kameny kolem něho se otočí o 90° ve směru hodinových ručiček. Máš pět kliknutí na to, aby se kameny dostaly z pozice na levém do pozice na černobílém obrázku 8. Nápověda: Zelené tlačítko označené kroužkem se použije dvakrát.



Obr. 7



Obr. 8

Poznámka: V originále je úloha interaktivní, soutěžící mohl klikat na tlačítka hlavolamu a pozorovat změny. Označení tlačítek symboly eliminuje handicap barvoslepsti soutěžících.

Co má tato úloha společného s informatikou

Opět v úloze hledáme správnou posloupnost kroků vedoucích k cíli. Pozorujeme chování daného systému, zkoumáme pravidla a zjišťujeme souvislosti.

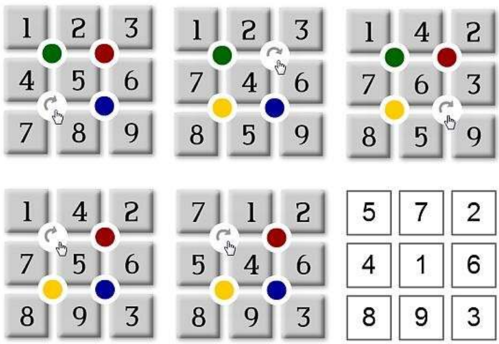
Obecně lze takový problém opět řešit prohledáváním stavového prostoru. Tady ale narážíme na jednu jeho nevýhodu, protože stavový prostor může být příliš velký. Zde máme 9! možných stavů, protože každý stav je spojen s osmi dalšími (čtyři představují způsoby, jak tohoto stavu dosáhnout, a čtyři spojení, jak přejít k nějakému jinému stavu; počty odpovídají počtu barevných tlačítek). V soutěži, vymezené 40 minutami pro 15 úloh, nepřipadá v úvahu kreslit takový prostor, dokonce ani tu jeho část, kterou lze obsáhnout do pěti kroků – i to znamená prozkoumání cca 4^5, tedy přibližně 1 000 možností. Informatik musí umět odhadnout, kdy vystačí s prohledáváním stavového prostoru hrubou silou, a kdy si musí počínat rafinovaněji.

Zde tedy musíme být chytřejší a prohledávaný prostor co možná nejradikálněji omezovat. Chytrým prohledáváním (například identifikací částí, které prohledávat jistě netřeba) se zabývá umělá inteligence, nebo také tzv. programování s omezujícími podmínkami. Například sudoku bezpochyby lze řešit procházením všech možností, na rychlosti je ale velmi znát, když se to dělá chytře. Přitom *chytré* prohledávání zdaleka neznamená, že by nemohlo být *automatizované*.

Zdůvodnění správné odpovědi

Správný postup klikání na tlačítka: 

Zde je znázorněno po krocích, jak se dostat z původního stavu do správného:



Obr. 9

Jak na to přijít: Klikáme, ať již v myšlenkách, nebo skutečně, a představujeme si (nebo pozorujeme), jak se změny projevují na hrací ploše. Zároveň sledujeme, v jakém vztahu jsou hrací kameny k požadované výsledné poloze. Postupně odvodíme, na které barvy je třeba kliknout v jakém pořadí, aby se čísla mezi otáčejícími se čtveřicemi kamenů správně přesouvala.

Brzy zjistíme, že změny v rozích zajistí jedině nejbližší tlačítko. Situace ve výchozí a cílové pozici se liší ve všech rozích, bude třeba klikat na všechny barvy. Zároveň víme, že máme pět kliknutí, z toho dvě na zelenou. Na ostatní tlačítka tedy klikneme právě jednou. Zbývá zjistit správné pořadí.

Např. kámen s číslem 1 budeme chtít posunout doprostřed. To lze dosáhnout jedině opakovaným kliknutím na zelené tlačítko označené kolečkem. Prostřední číslo ale mění i všechna ostatní tlačítka. Na zelené tlačítko tedy budeme klikat až na konci, aby jednička z prostředního místa neutekla.

Jiná úvaha: kámen s číslem 8 se kliknutím na žluté tlačítko označené úsečkou posune do správné pozice, pak už se toto tlačítko nemůže použít. Při tomto kliknutí se ale kámen s číslem 5 přestěhuje doprostřed dolů. Musí se pak ještě třikrát přesunout, než se dostane do horního rohu. Ke kliknutí na žluté tlačítko označené úsečkou musí dojít brzy po začátku.

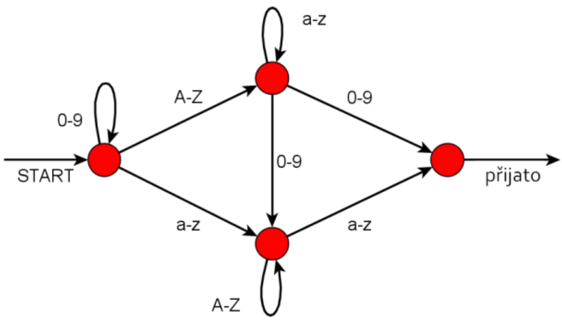
Pomocí několika takovýchto úvah postupně eliminujeme nesprávné možnosti, dokud nezbude jediná – ta správná. Při řešení navíc nezapomínáme, že máme možnost postupy přímo testovat. Když úvahy začnou být příliš složité, může být rychlejší vrátit se k prohledávání nyní již výrazně omezeného stavového prostoru.

Heslostroj

Kategorie Junior, autor Florian Resch

Zadání

V počítačové učebně si každý uživatel musí nastavit heslo pro přihlášení ke svému účtu. Aby bylo heslo bezpečnější, vytvořil správce aplikaci Heslostroj a pravidla, jak ji používat. Heslostroj pracuje podle grafu na obr. 10. Každá šipka znamená přidání znaku k heslu.

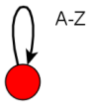


Obr. 10

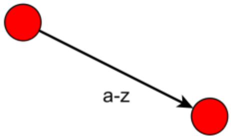
Vysvětlivky:

- A–Z znamená velké písmeno,
- a–z znamená malé písmeno,

- 0–9 znamená číslici.
- Smyčka na obr. 11 značí možnost použít více velkých písmen za sebou.
- Hrana na obr. 12 znamená vložení jednoho malého písmena.



Obr. 11



Obr. 12

Jaké slovo Heslostroj nepovolí?

A) 123aNNa B) bENNOZzz C) Peter3ABCd D) 2010Bobr4EVEr

Co má tato úloha společného s informatikou

Úloha ukazuje graf jednoduchého abstraktního stroje. Jde o tzv. konečný automat, jeden z nejjednodušších typů abstraktních strojů (nemá totiž paměť). Podobné stroje se používají při zpracování textových řetězců, např. ve webovém prohlížeči při zobrazování HTML stránky.

Stroje na zpracování řetězců mají úzkou souvislost s problematikou jazyků. Jazyk je v informatice jednoduše řečeno množina slov, poskládaných z dané abecedy. Jakékoliv slovo tedy do jazyka buď patří, nebo nepatří. Hledáme proto způsoby, jak jednoduše rozpoznat, které slovo je které. Jde o něco jako kontrolu pravopisu. V případě jednoduchých jazyků (např. „jazyk e-mailových adres“) nám mohou pomoci právě konečné automaty.

Konečný automat je ale schovaný také třeba ve výtahu, v automatu na kávu nebo v automatické pračce.

Zobrazení konečného automatu pomocí grafu je dobrý způsob, jak porozumět jeho činnosti. Navíc jej lze využít jako základ k porozumění činnosti plnohodnotného počítače, který je postaven na stejných principech (přecházení mezi stavy na základě dat a posledního stavu). Procházením konkrétního grafu (automatu) lze rozpoznat některé jeho vlastnosti. Např. z grafu na obr. 10 je zřejmé, že slovo, které obsahuje aspoň tři čísla, oddělená písmeny (např. 11a1a1), Heslostroj nepřijme. Při průchodu grafem můžeme přidávat číslice pouze na dvou místech (v levém a horním uzlu). Najdete sami nějaká další slova, která Heslostroj nepřijme?

Zdůvodnění správné odpovědi

Když heslo začíná malým písmenem, zavede nás do dolní poloviny grafu. Zde je možno přidávat libovolný počet velkých písmen, ale nakonec pouze jedno malé písmeno (pak je heslo již v cíli). Šipka v grafu totiž znamená přidat jen jedno písmenko.

Heslo bENNOZzz začíná malým písmenem a končí dvěma malými písmeny. Heslostroj jej neumožní vytvořit. *Správná odpověď je B.* Naopak ostatní slova v nabídce Heslostroj povolí. Například 123aNNa půjde třikrát smyčkou ve startovním uzlu (číslice 123), potom přejde dolů (první malé a), potom projde dvakrát dolní smyčkou (velká písmena NN) a nakonec přejde do koncového uzlu (poslední malé a). Úlohu lze tedy řešit i vylučovací metodou.

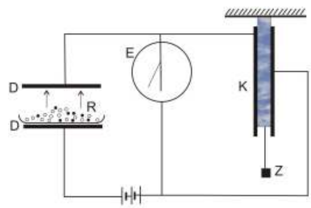
Z HISTORIE

Jak bylo objeveno polonium a radium (K 80. výročí úmrtí Marie Curie-Skłodowské)

O životě dvojnásobné nositelky Nobelovy ceny (1903 za fyziku spolu s *H. Becquerelem* a manželem *Pierrem Curie*, 1911 za chemii) bylo napsáno velmi mnoho prací. Souborné životopisy nalezneme např. v díle její dcery Ève [1] (mladší sestry známější dcery Irène), dále v [2], [3] a nověji např. [4]. V článku připomeneme pouze okolnosti objevů polonia a radia, stěžejní experimentální práce manželů Curieových doprovázené mimořádným pracovním úsilím a obrovskou trpělivostí.

Když *Marie Skłodowská* dokončila v roce 1893 studia fyziky a o rok později i matematiky na pařížské Sorbonně, začala se pod vedením profesora *Gabriela Lippmanna* věnovat studiu magnetických vlastností kovů. Při výzkumu, jehož součástí bylo mnoho pokusů a zkoušek různých druhů ocelí, se mj. rozvinuly její technické schopnosti a neobyčejná manuální zručnost. Obojí našlo později uplatnění na úplně jiném poli výzkumné práce – při výzkumu radioaktivity. Tento výzkum nově se probouzejícího oboru vyžadoval kromě velkého intelektuálního úsilí i značnou dávku zručnosti a technického důvtipu. Z výzkumu magnetických vlastností ocelí vzešla první vědecká stať Marie Skłodowské [5], publikovaná s velkým zpožděním až v době, kdy se hlavním jejím zájmem staly Becquerelovy prozatím tajemné paprsky, objevené roku 1896. Becquerelův objev se stal životní prioritou pozdější nositelky dvou Nobelových cen.

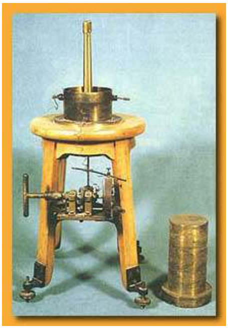
Především se ukázalo se, že radioaktivní (tehdy takto ještě nenazývané) záření má ionizační vlastnosti. Proudy, které vyvolávalo, byly velice malé, avšak právě jejich měření mohlo odhalit dosud neznámé zákonitosti. Manželé Curieovi postavili pro měření těchto proudů aparaturu, jejíž schéma je na obr. 1. Vlevo je



Obr. 1

ionizační komora tvořená dvěma deskami o průměru 8 cm od sebe vzdálenými 3 cm. Dolní deska byla trvale spojena s jedním pólem akumulátoru (napětí akumulátoru bylo 100 V), horní deska byla propojena se vstupem na elektroskop E. Druhou část aparatury tvořil krystal madagaskarského křemene, vložený mezi desky se staniolovými polepy a zatížený závažím Z.

Samotné zhotovení aparatury vyžadovalo nejen důmyslnost, ale především mimořádnou zručnost. Kvadrantní elektrometr (obr. 2) měl jako ukazatele neobyčejně tenkou jehličku vyříznutou z hliníkové fólie, musel být dobře izolován a chráněn před atmosférickou elektřinou. Jen tak mohl být použit pro měření nábojů odpovídajících proudům v řádu až biliontin ampéru. Stejně dokonalá a citlivá musela být část využívající piezoelektrický jev.



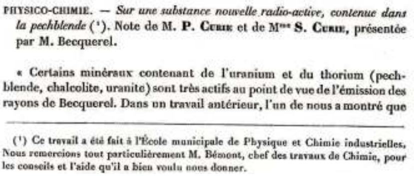
Obr. 2 [6]

Jestliže byla na misku v ionizační komoře vložena radioaktivní látka, vzduch mezi deskami se ionizoval a na vstup elektroskopu byl přenesen náboj. Pohyb tohoto náboje způsobil velmi malý elektrický proud, v této části obvodu neměřitelný. Aby manželé Curieovi mohli velikost tohoto proudu zjistit, vyvolávali stejně velký proud v pravé části schématu. K tomu byl využit objev Pierra Curieho – *piezoelektrický jev.* Jestliže závaží Z bylo odlehčováno, změna napínání krystalu na jeho polepech vyvolávala elektrické náboje, z nichž jeden byl opět přiváděn na vstup elektroskopu. Na rozdíl od ionizačního proudu, mohla být velikost proudu vyvolaného křemennou destičkou určena z piezoelektrického jevu. Velice jemným zvedáním závaží bylo možné docílit stavu, kdy oba proudy byly stejně velké, avšak opačné, a na vstupu elektroskopu se by se tak neobjevil žádný náboj, jehla přístroje by oscilovala nepatrně kolem nuly.

S tímto zařízením začala Marie Curie zjišťovat velikosti ionizačních proudů různých látek. Na misku vždy kladla stejně silnou vrstvu rozemleté látky. Některé látky poskytla *École Municipale*, jiné byly zapůjčeny z bohatých sbírek minerálů *Musée National d'Histoire Naturelle*, v němž H. Becquerel (i jeho otec) pracoval. Výsledek měření byl překvapivý. Nejen uran byl „aktivní“, ale např. oxid thoričitý zářil ještě mnohem silněji. Práškový čistý uran dával ionizační proud $24 \cdot 10^{-12}$ A, kdežto oxid thoričitý až $53 \cdot 10^{-12}$ A. Největší překvapení přinesly uranové rudy, které byly významně aktivnější než čistý uran. Např. přírodní chalkolit (fosforečnan uranyloměďnantý) dával ionizační proud $52 \cdot 10^{-12}$ A. Marie Curie provedla srovnávací pokus s uměle vytvořeným chalkolitem. Teze byla taková: Pokud přírodní chalkolit bude vyvolávat silnější ionizaci než chalkolit umělý, mohl by obsahovat nějaký dosud neznámý prvek. Vzrušující pokusy tuto myšlenku potvrdily. Zatímco laboratorně připravený chalkolit vyvolával ionizační proud $9 \cdot 10^{-12}$ A, přírodní chalkolit vyvolal proud $24 \cdot 10^{-12}$ A. Ovšem největší překvapení přinesl smolinec. Ten z oblasti Příbrami a Jáchymova vyvolával ionizační proud $67 \cdot 10^{-12}$ A, a smolinec z německé strany Krušných hor dokonce $83 \cdot 10^{-12}$ A. Z toho bylo možné učinit závěr, že některé látky obsahují dosud neznámý prvek aktivnější než uran.

Ovšem oddělit neznámý prvek vyžadovalo nadále obrovské úsilí. Výchozím materiálem byl tedy smolinec – dosud odpadní látka vyvážená ze stříbrných jáchymovských dolů. Kromě oxidu uranu U_3O_8 smolinec obsahuje širokou škálu látek (např. oxidy křemíku, vápníku a železa, sirníky olova a bizmutu, vzácné zeminy aj.). Obvyklými chemickými postupy Curieovi dospěli až k látce s převahou sirníku bizmutu, která vydávala velmi silné radioaktivní záření. Po destilaci této látky v trubici z českého skla při teplotě 700 °C zbyl na jejím povrchu povlak bizmutu. Ten seškrábali a vložili na misku do ionizační komory. Ionizační záření bylo 400krát silnější než záření čistého uranu stejného množství. Neznámý prvek zůstával ale stále v nečistém stavu – vázán na bismut.

Protože manželé Curieovi nebyli členy Akademie, přednesl zprávu o výsledcích jejich práce 18. července 1898 akademik *G. Lippmann* a následně se publikace objevila ve zprávách časopisu Akademie *Comptes rendus* [7] (úvod článku je na obr. 3).



PHYSICO-CHIMIE. — *Sur une substance nouvelle radio-active, contenue dans la pechblende* (¹). Note de M. **P. Curie** et de M^me **S. Curie**, présentée par M. Becquerel.

« Certains minéraux contenant de l'uranium et du thorium (pechblende, chalcolite, uranite) sont très actifs au point de vue de l'émission des rayons de Becquerel. Dans un travail antérieur, l'un de nous a montré que

(¹) Ce travail a été fait à l'École municipale de Physique et Chimie industrielles. Nous remercions tout particulièrement M. Bémont, chef des travaux de Chimie, pour les conseils et l'aide qu'il a bien voulu nous donner.

Obr. 3

Jak si můžete povšimnout, zásadní článek je uveden v periodiku jako jiná sdělení – titulek malým nevýrazným písmem, bez nějakého dalšího komentáře. Manželé Curieovi nikdy neopomněli uvést i své pomocníky – zde pod čarou pomoc a účast *M. Bémonta*. Celé sdělení má o něco víc než dvě tiskové stránky. V jeho další části píší Curieovi podmínečně: „*Potvrdí-li se existence nového kovu, navrhujeme nazvat jej polonium podle vlasti jednoho z nás*“. Prvek tak byl skutečně pojmenován.

Radioaktivita smolince se ale projevovala ještě v návaznosti na baryum. Curieovi postupně ze smolince odstraňovali různé sloučeniny a získáním čistější baryové frakce pozorovali rostoucí produkci záření. Jejich spolupracovník *Eugen Demarcay*, profesor pařížské *École polytechnique* pak nalezl spektrální důkaz, že baryová frakce obsahuje ještě další neznámý prvek. Pro jeho silné záření byl nazván radium. Sdělení o druhém novém prvku vyvolávajícím silné Becquerelovo záření bylo předneseno na schůzi Akademie ještě tentýž rok – 26. prosince 1898 – a vyšlo i ve stejném svazku *Comptes rendus* [8] spolu s Demarcayovým článkem o spektroskopickém potvrzení [9]. Zde je také uveden název pro nový prvek – *radium*. Děj, při němž dochází k emisi tohoto typu záření, je od této chvíle nazván *radioaktivita*.

Splnění snu Marie a Pierra Curieových získat alespoň několik miligramů čistého radia se podařilo jen Marii (Pierre zahynul 19. dubna 1906 pod koly koňského povozu). V roce 1910 za pomoci chemika *A. Debierna*, profesora na Sorbonně, elektrolyticky izolovala z chloridu radnatého v podobě bílého lesklého kovu pár miligramů radia.

Marie Curie-Skłodowská zemřela 4. července 1934 na onemocnění, jehož příčinou byla zřejmě nedostatečná ochrana před radioaktivním zářením.

Literatura

[1] *Curie, E.*: Paní Curieová. Praha, Mladá fronta. 1964.

[2] *Bobinská, H.*: Marie Curie-Skłodowská. Praha, Odeon. 1950.

[3] *Giroud, F.*: Úctyhodná žena: Život paní Curieové. Praha, Odeon. 1987.

[4] *Lorencová, I.*: Marie Curie-Skłodowská. Sto let od udělení Nobelovy ceny za objev radia. Čs. čas. fyz., roč. 61 (2011), s. 115–121.

[5] *Skłodowska, M.*: Propriétés magnétiques des aciers trempés. Comptes rendus, roč. 125 (1897), s. 1165–1169.

[6] http://www.aps.org/publications/apsnews/200412/history.cfm

[7] *Curie, M., Curie, P.*: Sur une substance nouvelle radio-active, contenue dans la pechblende. Comptes rendus, roč. 127 (1898), s. 175–178.

[8] *Curie, M., Curie, P., Bémont, G.*: Sur une nouvelle substance fortement radio-active, contenue dans la pechblende.Comptes rendus, roč. 127 (1898), s. 1215–1217.

[9] *Demarçay, E.*: Sur le spektre d'une substance radio-active. Comptes rendus, roč. 127 (1898), s. 1218–1221.

[10] *Běhounek, F.*: Pierre Curie. Praha, Orbis. 1957.

František Jáchim