Úloha o čtverci a přímkách

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Problémy a úlohy, v nichž podrobujeme geometrický objekt nějaké transformaci (například podobnosti) tak, aby splňoval nějaké další podmínky, jsou dodnes předmětem zkoumání geometrů (viz např. článek [1], v němž autor sestrojuje rovnostranné trojúhelníky s vrcholy na daných přímkách, nejen v rovině). Přestože k řešení mnoha úloh tohoto typu stačí středoškolské znalosti matematiky, do učebnic se už nevešly. Řešení jedné takové úlohy si ukážeme.

Úloha 1

V rovině jsou dány čtyři navzájem různé přímky a, b, c, d. Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ takové, aby jejich vrcholy A, B, C, D ležely po řadě na daných přímkách a, b, c, d.

Poznámka. Jde o obdobnou úlohu k úloze: Sestrojte všechny čtverce, jejichž strany leží na přímkách procházejících po řadě čtyřmi danými různými body. Její řešení najdeme například v článku [3].

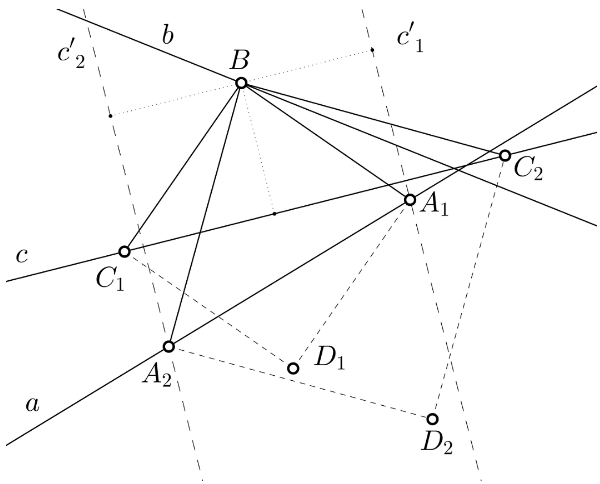
Dříve než začneme řešit danou úlohu, pokusme se sestrojit takový čtverec $ABCD$, jehož vrchol B je pevně zvolený bod přímky b a jehož vrcholy A, C leží po řadě na daných přímkách a, c. Sestrojíme nejprve pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s vrcholy požadovaných vlastností. Poté sestrojíme vrchol D jako chybějící vrchol čtverce $ABCD$. Takto sestrojený vrchol D pochopitelně nemusí ležet na dané přímce d.

K tomu je třeba nejprve řešit následující úlohu.

Úloha 2 (pomocná konstrukce)

Sestrojte pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s pravým úhlem při daném vrcholu B, jehož vrcholy A, C leží po řadě na daných přímkách a, c. Bod B není průsečíkem přímek a, c.

Řešení. Tuto úlohu zde vyřešíme využitím otočení: Protože úsečky BA, BC jsou shodné a navzájem kolmé, jsou body A, C vzor a obraz jeden druhého v otočení se středem B o úhel $90°$ v kladném či záporném směru (obr. 1).



Obr. 1: Dvě řešení úlohy 2 pro pevně zvolený bod B (a vrchol D čtverce $ABCD$)

a) Zobrazíme přímku c v otočení se středem B a úhlem $90°$. Označíme-li její obraz c_1', je průsečíkem přímek a, c_1' (pokud existuje, tedy pokud přímky a, c_1' nejsou rovnoběžné) bod A_1, který je vrcholem hledaného trojúhelníku. Obrazem bodu A_1 v otočení se středem v bodě B o opačný úhel $-90°$ je třetí vrchol C_1 jednoho hledaného trojúhelníku A_1BC_1.

b) Zobrazíme-li přímku c v otočení se středem B a úhlem $-90°$, dostaneme přímku c_2' a analogií výše uvedeného postupu druhé možné řešení, trojúhelník A_2BC_2.

Tím je úloha 2 vyřešena. Vraťme se nyní k řešení úlohy 1.

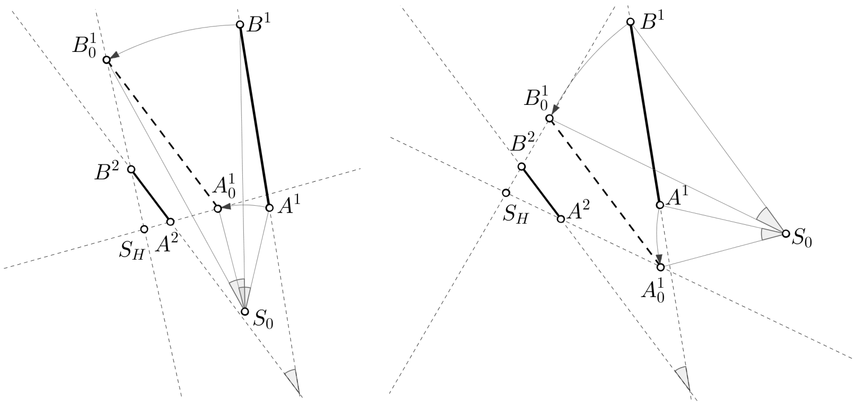
Vlastnosti hledaných čtverců $ABCD$

K sestrojenému trojúhelníku ABC sestrojíme vrchol D čtverce $ABCD$ již jednoznačně. Budeme-li sestrojovat vrcholy D_1 čtverců $A_1B_1C_1D_1$ pro různé polohy bodu $B \in b$ $(B = B_1)$, bude bod D_1 probíhat nějakou křivku (podobně i bod D_2 pro čtverce $A_2B_2C_2D_2$). Pokud by to byla nějaká elementární křivka, mohli bychom s její pomocí nalézt řešení naší původní úlohy.

Podobné trojúhelníky ABC – pohyb bodu B po přímce

Je zřejmé, že existence jednoznačně určeného řešení úlohy 2 závisí jen na úhlu přímek a, c. Nejsou-li navzájem kolmé, můžeme ke každému bodu B přímky b (mimo průsečík a, c) najít právě jednu dvojici požadovaných trojúhelníků.

Zvolme dva libovolné různé body B^1, B^2 přímky b a ke každému z nich sestrojme výše uvedeným postupem a) jeden trojúhelník – tj. trojúhelníky $A^1B^1C^1$, resp. $A^2B^2C^2$. Tyto trojúhelníky jsou přímo podobné (pokud jsou přímky a, b, c rovnoběžné, jsou trojúhelníky $A^1B^1C^1$, $A^2B^2C^2$ posunuté; tento případ však ponecháme na pozdější diskusi). Lze je tedy zobrazit jeden na druhý v podobnosti P. Tuto podobnost lze nekonečně mnoha způsoby složit z otočení a stejnolehlosti. Můžeme totiž zvolit libovolný bod roviny S_0 a v otočení s tímto středem S_0 otočit úsečku A^1B^1 do polohy $A_0^1B_0^1$ rovnoběžné s úsečkou A^2B^2, a poté výsledek $A_0^1B_0^1$ zobrazit ve stejnolehlosti se středem S_H v průsečíku přímek $A_0^1A^2$ a $B_0^1B^2$ (obr. 2).



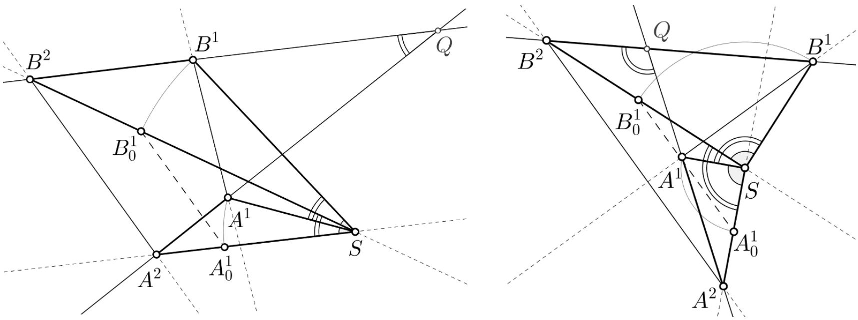
Obr. 2: Dvě různá složení podobnosti zobrazující A^1B^1 do A^2B^2

Vlastnosti užité podobnosti

Zkusme mezi všemi dvojicemi otočení a stejnolehlosti, jejichž složením je podobnost P, najít takovou dvojici, kde mají obě zobrazení společný střed S, a zkoumejme jeho vlastnosti (takové zobrazení se nazývá *spirální podobnost*, viz např. [2]).

Vzhledem k tomu, že otočení i stejnolehlost v rovině zachovávají úhly, zachovává úhly i spirální podobnost.

Protože trojúhelníky B^1SB^2, A^1SA^2 mají shodný úhel při vrcholu S a pro poměr délek jejich stran platí $\left|SB^1\right| : \left|SB^2\right| = \left|SA^1\right| : \left|SA^2\right|$ (úhel otočení a koeficient stejnolehlosti), jsou podobné. Dvojice jejich odpovídajících si stran (B^1B^2 a A^1A^2, B^1S a A^1S, B^2S a A^2S) tedy svírají shodné úhly a jejich velikost je rovna velikosti úhlu otočení, kterým zobrazíme přímku B^1B^2 na přímku A^1A^2, tedy velikosti úhlu B^1SA^1 (úhly B^2B^1S, A^2A^1S jsou shodné), obr. 3. V dalším textu využijeme následující závěr.



Obr. 3: Podobné trojúhelníky B^1SB^2, A^1SA^2

Závěr. Velikost úhlu, pod nímž vidíme ze středu složené podobnosti úsečku AB, je rovna odchylce přímek $a = A^1A^2, b = B^1B^2$ (nebo jejímu doplňku do 180° – viz obr. 3 vpravo). Výše uvedená úvaha navíc ukazuje, jak takový společný střed otočení a stejnolehlosti pro danou podobnost hledat: Je to takový bod S, z něhož vidíme obě úsečky A^1B^1, A^2B^2 pod stejným úhlem, jehož velikost je rovna odchylce přímek a, b (nebo jejímu doplňku do 180°).

Poloha vrcholu D hledaného čtverce

Z výše vedených úvah již plyne, že pokud podle úlohy 2 sestrojíme pro zvolený bod B jeden trojúhelník ABC, můžeme již určit bod S, který je společným středem výše studovaných přímých podobností pro všechny dvojice trojúhelníků $A^1B^1C^1$, $A^2B^2C^2$, kde B^1, B^2 jsou různé polohy bodu B na přímce b. Všechny polohy bodu A leží na přímce a, ta je tedy spojnicí libovolné dvojice A^1A^2. Podobně všechny polohy bodu B leží na přímce b, všechny polohy bodu C leží na přímce c. Proto je velikost úhlu ASB rovna odchylce přímek a, b, velikost úhlu CSB je rovna odchylce přímek c, b a velikost úhlu ASC je rovna odchylce přímek a, c (nebo jejich doplňku do $180°$).

Takový střed S dokážeme sestrojit jednoznačně, jakmile máme libovolný trojúhelník ABC, $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$. Pro trojúhelník ABC sestrojíme (jako průsečíky všech kružnic, na nichž leží vrcholy zmíněných úhlů nad jeho stranami) dva takové body, ale právě jeden z nich je společným středem přímých podobností, které zobrazí trojúhelník ABC do dalších (podobných) trojúhelníků $A^iB^iC^i$ pro danou polohu přímek a, b, c. Příslušný bod je tudíž společným středem podobnosti – tj. středem otočení i stejnolehlosti v podobnosti z nich složené – pro každou dvojici přímo podobných trojúhelníků sestrojených k libovolným dvěma bodům B^1, B^2 přímky b. Tyto podobnosti jsou obecně různé, mají různý úhel otočení i koeficient stejnolehlosti, ale všechny mají společný střed S.

Není nezbytné bod S konstruovat, z jeho existence však plyne následující úvaha: Protože také velikost úhlu ASD je při zobrazení čtverců ve výše popsaných přímých podobnostech konstantní pro všechny polohy bodu D, bude spojnice D^1D^2 libovolných dvou z nich (které jsou vrcholy přímo podobných čtverců) svírat s přímkou a stále stejnou odchylku. *Všechny vrcholy D všech přímo podobných čtverců budou tedy ležet na jediné přímce* (pokud bod D nebude pevný).

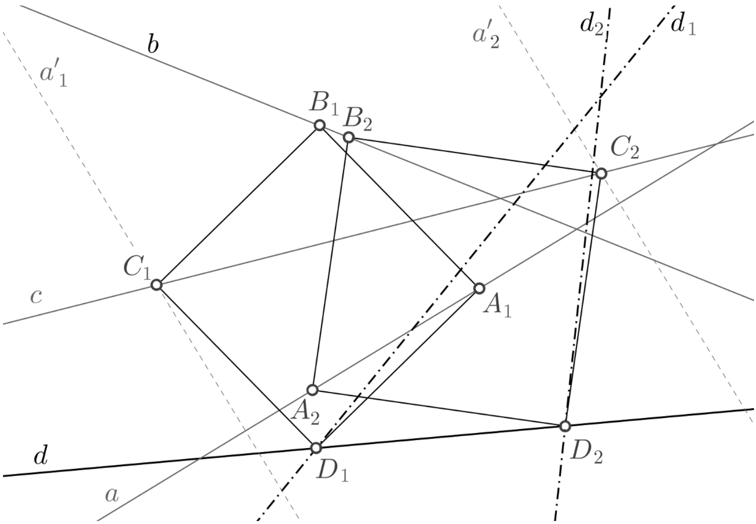
Konstrukce čtverce $ABCD$

Nazvěme nyní pro účely tohoto textu transformaci, která vůči sobě zobrazuje jednotlivé trojúhelníky ABC sestrojené týmž ze dvou postupů v úloze 2, „pohybem". Ukázali jsme, že každý bod pevně spojený s touto soustavou (tj. vrchol M každého trojúhelníku ABM, ACM či BCM, který má pevně dané úhly) při tomto „pohybu" opisuje přímku.

Popis konstrukce.

1. Podle úlohy 2 sestrojíme všechny čtverce $ABCD$, speciálně jejich vrcholy D, pro dvě různé pevně zvolené polohy bodu B – pro bod B^1 vrcholy D_1^1 a D_2^1, pro bod B^2 vrcholy D_1^2 a D_2^2.
2. Sestrojíme přímky $d_1 = D_1^1D_1^2$ a $d_2 = D_2^1D_2^2$.

3. Sestrojíme vrcholy hledaných čtverců, body $D_1 = d \cap d_1$ a $D_2 = d \cap d_2$ (pokud existují).
4. Využitím postupu úlohy 2 sestrojíme k nalezeným bodům D_1, D_2 jednoznačně určené čtverce $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ (ke každému z bodů D_1, D_2 ten, pro který $B \in b$) – viz obr. 4.



Obr. 4: Závěrečný krok konstrukce čtverce – dvě řešení zadané úlohy

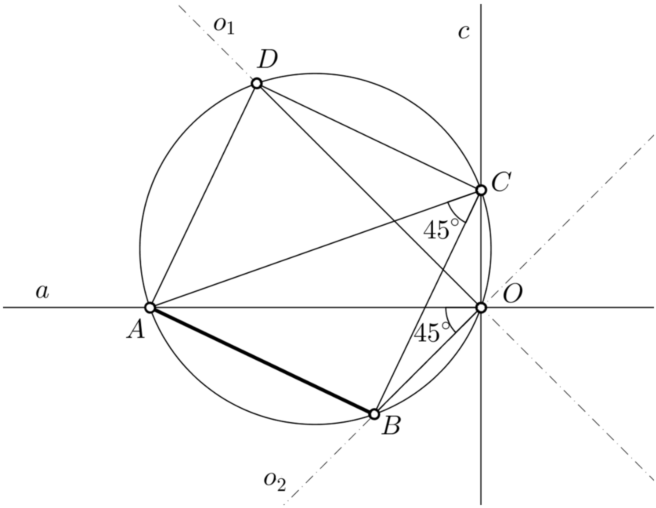
Diskuse počtu řešení

Při výše uvedených úvahách jsme narazili na několik případů, kdy popisovaný postup nevede k řešení úlohy, nebo kdy zobrazení trojúhelníků (čtverců) není možno popsat jako složení otočení a stejnolehlosti. Postupně je vyřešíme. Nejprve dokážeme následující tvrzení.

Lemma

Leží-li vrcholy A, C úhlopříčky čtverce $ABCD$ po řadě na dvou navzájem kolmých přímkách a, c, leží zbývající vrcholy B, D čtverce na (navzájem kolmých) osách úhlů vyťatých přímkami a, c.

Důkaz. Označme O průsečík daných přímek a, c. Zvolme $A \in a$, $C \in c$. Kružnice opsaná čtverci $ABCD$ prochází bodem O (Thaletova kružnice sestrojená nad úsečkou AC). Tudíž $\triangleleft ACB$, $\triangleleft AOB$ jsou shodné obvodové úhly nad obloukem (tětivou) AB. Přitom $|\measuredangle ACB| = 45°$, tudíž i $|\sphericalangle AOB| = 45°$ a B leží na ose úhlu kolmic a, c (nebo je $B = O$). Analogicky jsou shodné úhly $\sphericalangle AOD$ a $\sphericalangle ACD$ a bod D leží na druhé z os úhlů, které svírají kolmice a, c (nebo je $D = O$), viz obr. 5.



Obr. 5: Vrcholy úhlopříček čtverce na kolmicích

Navíc je zřejmé, že ke každé dvojici bodů A, C existuje jednoznačně určená dvojice bodů B, D (až na orientaci popisu) a naopak: k bodům B, D na přímkách o_1, o_2 existuje jednoznačně určená dvojice bodů A, C na přímkách a, c, které jsou osami úhlů svíraných kolmicemi o_1, o_2.

Nyní můžeme přistoupit k samotné diskusi.

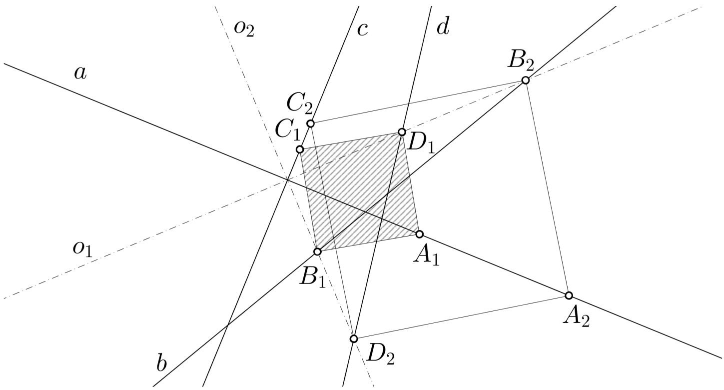
• *Přímky, na nichž leží vrcholy úhlopříčky čtverce, jsou navzájem kolmé.* Nechť jsou to přímky a, c. V tom případě neexistuje jednoznačně určený průsečík rovnoběžných přímek a a otočeného obrazu c' přímky c. Úlohu vyřešíme samostatně:

Popis konstrukce.

1. Sestrojíme přímky o_1, o_2 – osy úhlů, které svírají kolmice a, c.

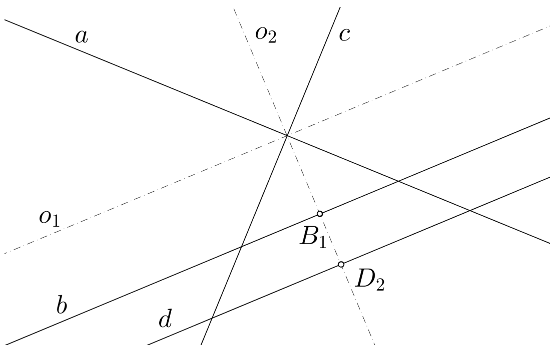
2. Sestrojíme jejich průsečíky s danými přímkami b, d (pokud existují), tedy dvě dvojice bodů B, D ($o_1 \cap b$, $o_2 \cap d$ a $o_2 \cap b$, $o_1 \cap d$).

3. Ke každé dvojici B, D sestrojíme jednoznačně dvojici vrcholů A, C (obr. 6).



Obr. 6: Dvě řešení úlohy pro kolmé přímky a, c

Zbývá vyřešit situaci, kdy některá (nebo obě) z přímek b, d svírá s přímkami a, c odchylku 45°. V tomto případě může mít úloha nekonečně mnoho řešení (alespoň jedna z přímek b, d splývá s některou z os o_1, o_2 a druhá není s druhou osou různá rovnoběžka), žádné řešení (obě přímky protínají jen stejnou osu a s druhou jsou rovnoběžné, obr. 7) nebo jediné řešení (alespoň jedna z přímek b, d protíná jen jednu osu a druhá protíná druhou osu).

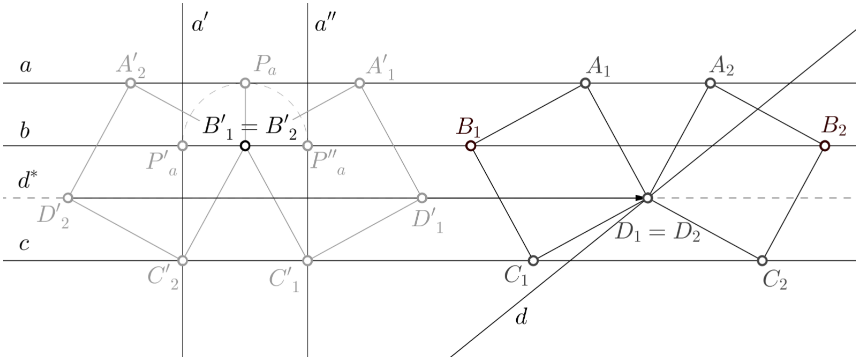


Obr. 7: Žádné řešení úlohy pro kolmé přímky a, c

• *Tři z daných přímek jsou navzájem rovnoběžné.* (obr. 8)

Nechť jsou to přímky a, b, c. Potom všechny trojúhelníky ABC sestrojené v úloze 2 pro všechny polohy bodu B jsou shodné a tvoří dvě sady navzájem posunutých trojúhelníků, přičemž každé dva trojúhelníky z různých sad jsou navzájem souměrné dle přímek kolmých k daným rovnoběžkám. Vrcholy D čtverců obou sad pak leží na jediné přímce d' rovnoběžné s přímkami danými.

Podle vzájemné polohy přímek d, d' má úloha řešení nekonečně mnoho (pro d, d' totožné), žádné (pro d, d' různé rovnoběžky) nebo dvě různá (pro d, d' různoběžné). Případ $a = c$ je vyloučen zadáním.



Obr. 8: Dvě řešení úlohy pro $a \parallel b \parallel c$

• Zmiňme se dále samostatně o případu, kdy jsou rovnoběžné – podle výše použité volby označení – pouze přímky a, c a přímka b je s nimi různoběžná.

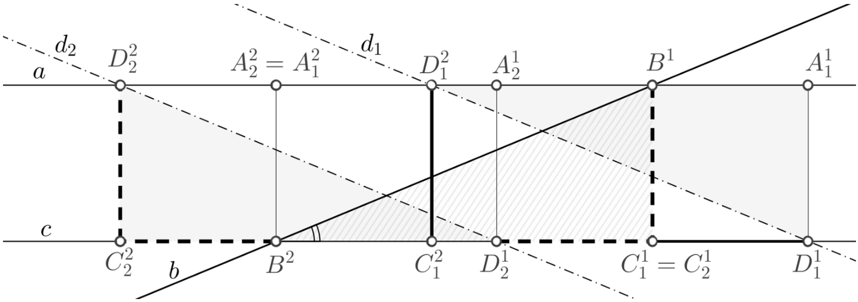
Jak vidíme z vyznačených shodných pravoúhlých trojúhelníků na obr. 9, kde jsme sestrojili pomocné čtverce $ABCD$ pro body B v průsečících $B^1 = b \cap a$, $B^2 = b \cap c$, jsou v tomto případě přímky d_1, d_2 rovnoběžné a svírají s přímkami a, c stejnou odchylku jako přímka b.

• *Trojice přímek prochází společným bodem*

Nechť a, b, c jsou přímky procházející společným bodem. Potom všechny trojúhelníky ABC sestrojené v úloze 2 pro všechny polohy bodu B tvoří dvě sady navzájem stejnolehlých trojúhelníků a vrcholy D čtverců leží na přímkách procházejících středem stejnolehlostí – společným bodem přímek a, b, c. Úlohu vyřešíme základním popsaným postupem, stačí nám však sestrojit pomocné čtverce $ABCD$ jen pro jednu polohu bodu B.

• *Body D na přímce d – závěr řešení*

Ve všech případech závisí počet řešení na vzájemné poloze dané přímky d a sestrojených přímek d_1, d_2. Je-li přímka d s některou z přímek d_1, d_2



Obr. 9: Směr přímek d_1, d_2 pro $a \parallel c$

totožná, má úloha nekonečně mnoho řešení, je-li s ní rovnoběžná různá, příslušné řešení chybí. Prochází-li všechny čtyři dané přímky společným bodem, řešení neexistuje, nebo je jich nekonečně mnoho.

Z úvah o úhlech přímek, na nichž leží vrcholy čtverce, plyne, že směry sestrojených přímek d_1, d_2 se zachovají, posuneme-li přímky a, b, c do společného bodu. Řešení takové úlohy jsme komentovali v předešlém odstavci.

Závěr

V tomto článku jsme ukázali, že daná úloha je eukleidovsky řešitelná, tj. je řešitelná pouze pomocí kružítka a pravítka bez měřítka, a navíc nám k jejímu řešení postačí pouze základní školské matematické znalosti.

Nalezený postup konstrukce snadno pozměníme pro obecnější zadání úlohy, kdy na daných přímkách hledáme vrcholy libovolného čtyřúhelníku podobného čtyřúhelníku danému.

Literatura

[1] *Ochoński, S.*: Equilateral triangles whose vertices belong to three given straight lines. In: The Journal of Polish Society of Geometry and Engineering Graphics, roč. 19 (2009).

[2] *Prasolov, V. V.*: Zadači po geometrii I. Moskva, 1986, (rusky).

[3] *Gergelitsová, Š.*: Úloha o čtverci. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 83 (2008), č. 3.