Násobení na prstech

ALICE BÍLÁ – MATĚJ BÍLÝ

Pedagogická fakulta UK, Praha – žák Gymnázia J. Keplera, Praha

V poslední době bývá věnována pozornost netradičním algoritmům, např. jak určit součin dvou dvojmístných čísel jinak než běžnou školskou metodou, jak násobit na prstech, co je čínské grafické násobení apod. (viz např. [2], [3], [4], [5]). Tyto algoritmy jsou uváděny nejen pro zajímavost a jako snaha motivovat a ozvláštnit často nepříliš oblíbený dril, ale též jako tréninkový můstek k odhalení principu daného algoritmu: proč je algoritmus správný a pro která čísla platí?

Obecně známé pravidlo, jak násobit na prstech číslo 9 čísly 1 až 9, může být doporučováno dětem i jako pomůcka. Je jednoduché. Položíme vedle sebe levou a pravou rukou dlaněmi dolů a natáhneme prsty. Chceme-li číslo 9 násobit např. osmi, skrčíme 8. prst počítáno zleva, tedy pravý prostředníček (levý malíček je 1. prst, pravý malíček 10. prst, podobně i dále). Počet 7 natažených prstů vlevo od skrčeného přečteme jako počet desítek a počet 2 natažených prstů vpravo od skrčeného je počet jednotek výsledku; součin čísel 8 a 9 je 72. Stejně tak i v dalších případech, např. při násobení dvěma skrčíme levý prsteníček.

Jiný způsob násobení na prstech (od 6×5 až po 9×9) je uveden v publikaci [1]. Tento postup však není obecně znám také proto, že zvýšení počtu byť snadnějších početních operací a spojů zvyšuje možnost chyby, a je tedy pro některé děti příliš náročný.

Zde ukážeme další typ násobení na prstech, který sice většinou nevede ke zjednodušení výpočtu, tedy ke zjednodušení mentálních operací, ale je docela zajímavý. (Snad jen násobení čísla 8 v rámci malé násobilky může být pro trénink násobilky výhodné.) Tento algoritmus obsahuje někdy složitější a někdy jednodušší násobení, než je to původně zadané a navíc jsou tu některé další početní úkony, takže nejde o vhodnou alternativu běžného způsobu vytváření či zapamatování některých spojů (malé či velké) násobilky. Každopádně však lze tímto algoritmem motivovat žáky k počítání většího množství příkladů s konkrétním cílem – aby si vyzkoušeli algoritmus i pro velká čísla, prozkoumali ho a hledali jeho zákonitostí. Nejzajímavější na našem algoritmu je skutečnost, že pro velká čísla funguje na všech prstech na rukou třeba i u sta princezen stojících v řadě vedle sebe. Jeho ověření je tak jednoduché, že je přístupné i žáku druhého stupně, jen částečně obeznámenému s úpravami výrazů.

Malá násobilka (od 1×1 do 9×9)

Chceme-li násobit např. 7×4, vybereme větší z činitelů (tzv. vedoucí číslo) a zvětšíme ho o 1. (V případě násobení např. 6×6 je vedoucí číslo 6). Zleva doprava na rukou položených vedle sebe dlaněmi dolů odpočítáme tolik prstů, kolik je toto zvětšené vedoucí číslo, a odpočítané prsty necháme natažené. V našem případě tedy odpočítáme 8 prstů a necháme je natažené. Schováme 9. a 10. prst, pravý prsteníček a pravý malíček, a pracujeme dále jen s osmi prsty. Pravý prsteníček a pravý malíček nás od této chvíle již nebudou zajímat a nebudeme je dále uvažovat ani jako skrčené prsty, jako bychom je ani neměli. (V případě součinu 6×6 odpočítáme 7 prstů a zbývající tři prsty neuvažujeme).

Dále skrčíme 4. prst (levý ukazováček). Vlevo od skrčeného prstu čteme počet desítek (počet natažených prstů), vpravo od skrčeného prstu čteme počet jednotek (počet natažených prstů) mezivýsledku. Konečný výsledek dostaneme, když od tohoto mezivýsledku ještě odečteme číslo, které je součinem dvou činitelů. Jedním z nich je údaj, o kolik je číslo 9 větší než vedoucí číslo, druhým je počet desítek mezivýsledku, tedy znovu počet natažených prstů, které jsou vlevo od skrčeného (levého ukazováčku). V případě součinu 7×4 tedy od 34 odečítáme 2×3, protože číslo 9 je o dvě větší než 7 a v mezivýsledku jsou 3 desítky; $34 - 6 = 28$. Zapišme nyní přehledně jednotlivé kroky algoritmu:

$\mathbf{7 \times 4 =}$

a) Větší z činitelů (vedoucí číslo) je 7.
b) Pracujeme s $7 + 1$ prsty, schováme všechny prsty vpravo od 8. prstu, tedy pravý malíček (10. prst) i pravý prsteníček.
c) Skrčíme 4. prst.
d) Počet prstů vlevo od skrčeného levého ukazováčku (3) čteme jako počet desítek mezivýsledku, tři desítky, tedy třicet.
e) Doplníme počet jednotek mezivýsledku, což je počet natažených prstů vpravo od prvního skrčeného (4), tedy mezivýsledek je 34.
f) Od mezivýsledku 34 odečteme součin $(9-7) \times 3 = 6$. Prvním činitelem je rozdíl čísla 9 a vedoucího čísla, druhým činitelem je počet desítek mezivýsledku.
g) Výsledek je $34 - 6 = 28$.

Všimněme si, že podle tohoto algoritmu pracuje i shora zmíněný algoritmus násobení čísla 9 (v tomto případě od mezivýsledku nic neodečítáme, protože vedoucí číslo je 9, takže první z činitelů v bodě f) by byl 0). Násobit $8 \times k$ v rámci malé násobilky ($k \leq 8$) pak znamená pracovat s devíti prsty, skrčit k-tý prst a rovnou „vyčíst“ výslednou operaci: $8 \times 4 = 35 - 3$. Zde je $9 - 8 = 1$, takže odečítáme přímo jen počet desítek (počet prstů vlevo od skrčeného).

V algoritmu je skryta následující identita

$$m \cdot n = 10(m-1) + (n+1-m) - (9-n)(m-1). \tag{1}$$

Tato identita platí pro všechna reálná čísla, tím spíš pro čísla přirozená, která jsou při počítání na prstech modelována pomocí prstů. Modelování na prstech, tak jak bylo popsáno výše, vyžaduje navíc podmínku $m \leq n$.

Pro učitele je zajímavé, že jednotlivé výrazy v identitě mají v modu násobení na prstech při nutné podmínce ($m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$) konkrétní význam:

$n+1$	počet prstů, se kterými pracuji,
$m-1$	počet natažených prstů vlevo od skrčeného,
$n+1-m$	počet natažených prstů vpravo od skrčeného,
$9-n$	vzdálenost obrazu vedoucího čísla n od obrazu čísla 9 na číselné ose pro $n < 10$,
$n-9$	vzdálenost obrazu vedoucího čísla n od obrazu čísla 9 na číselné ose pro $n \geq 10$ (viz část o rozšíření algoritmu).

Rozšíření algoritmu

Vzhledem k tomu, že identita (1) platí pro libovolná přirozená čísla, nemusíme se při použití uvedeného algoritmu omezovat jen na malou násobilku. Máme-li součin $m \cdot n$, kde $m \leq n$, $n \geq 10$, stačí si představit, že máme $n+1$ prstů, a algoritmus funguje. Například při součinu 3×13 potřebujeme 14 prstů. Protože je nemáme, tak si je na chvíli od někoho vypůjčíme, nebo vše řešíme pomocí čtrnácti čárek na papíru.

Jediné úskalí při počítání na prstech více než jedné princezny ve srovnání s postupem popsaným výše může nastat při operaci popsané v bodě f). Pomineme-li triviální případ $m = 1$, pak pro $m \neq 1$ a pro $n \geq 10$ odčítáme záporné číslo $z = (9-n)(m-1)$, což provedeme tak, že přičteme jeho absolutní hodnotu.

Vzhledem k tomu, že ve vzorci (1) platí pro poslední výraz

$$-(9-n)(m-1) = (n-9)(m-1),$$

lze rovnost (1) zapsat ve tvaru

$$m \cdot n = 10(m-1) + (n+1-m) + (n-9)(m-1), \tag{2}$$

který je pro $n \geq 10$ výhodnější (vyhneme se odčítání záporného čísla od mezivýsledku).

Vraťme se k součinu 3×13 a představme si 14 prstů, z nichž třetí je zahnutý, tj. vlevo od něj jsou dva a vpravo je zbývajících 11 prstů:

I I C I I I I I I I I I I I

Výpočet podle zobecněného algoritmu a vzorce (2) nám pak dává

$$3 \times 13 = 2 \times 10 + 11 + (13-9) \times 2 = 39.$$

Závěrečná poznámka

K objevu algoritmu násobení pomocí prstů i k jeho zobecnění dospěl druhý z autorů tohoto příspěvku (žák gymnázia), který znal algoritmus násobení na prstech pro číslo 9. V podstatě tedy jde o rozšíření výše zmíněného algoritmu násobení devíti. Dlužno dodat, že tomuto výsledku a procesu objevování předcházelo též detailní obeznámení se s algoritmem čínského násobení i s jinými postupy. Náš algoritmus vzešel z heuristického přístupu k řešení konkrétních příkladů (stejně tak zřejmě vznikaly i historické algoritmy), algebraických znalostí přitom autor nevyužil. Pro další zobecnění byl důležitý nápad nespokojit se pouze s násobením do 10×10 pomocí prstů na ruce, ale rozšířit násobení na libovolně velká čísla. Bylo to právě použití čárek na papíru, které umožnilo udělat kvalitativní zdvih – zobecnění pro všechna přirozená čísla. Prostředí objevování bylo doprovázeno emočním vzrušením a radostí, což je vždy příjemnou stránkou tvůrčí činnosti.

Literatura

[1] *Balková, L., Škarda, Č.*: Násobíme chytře? Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. roč. 57 (2012), č. 3.
Dostupné na: http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~balkolub/papers/PokrokyNasobeni.pdf

[2] Čínské násobení. Dostupné na: http://bimbo.fjfi.cvut.cz/~soc/Nasobeni_papir/cinske_nasobeni_graficke.html.

[3] Fast MathTricks – How to multiply 2 digit numbers up to 100 – the fast way! Dostupné na: http://www.youtube.com/watch?v=PYrgjMubh-c.

[4] Secret of Fast Math revealed. [Online] Dostupné na: http://www.glad2teach.co.uk/fast_maths_calculation_tricks.htm.

[5] Secret Trick: Math Division Long. Can you mentaly divide... Dostupné na: http://www.youtube.com/watch?v=IIwlBjNLpjI.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 10. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 205

Je dán pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D. Označme K, L, M po řadě středy jeho hran BC, CA, AB. Dokažte, že součet velikostí tří úhlů ve stěnách při vrcholu D čtyřstěnu $KLMD$ je 180°.

Jaroslav Švrček

Úloha 206

Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna čísla $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$xf(x) = xf\left(\frac{x}{y}\right) + yf(y).$$

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 199 a 200, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle loňského (22.) ročníku našeho časopisu.