[2] Čínské násobení. Dostupné na: http://bimbo.fjfi.cvut.cz/~soc/Nasobeni_papir/cinske_nasobeni_graficke.html.
[3] Fast MathTricks – How to multiply 2 digit numbers up to 100 – the fast way! Dostupné na: http://www.youtube.com/watch?v=PYrgjMubh-c.
[4] Secret of Fast Math revealed. [Online] Dostupné na: http://www.glad2teach.co.uk/fast_maths_calculation_tricks.htm.
[5] Secret Trick: Math Division Long. Can you mentaly divide... Dostupné na: http://www.youtube.com/watch?v=IIwlBjNLpjI.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 10. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 205

Je dán pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D. Označme K, L, M po řadě středy jeho hran BC, CA, AB. Dokažte, že součet velikostí tří úhlů ve stěnách při vrcholu D čtyřstěnu $KLMD$ je 180°.

Jaroslav Švrček

Úloha 206

Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna čísla $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$xf(x) = xf\left(\frac{x}{y}\right) + yf(y).$$

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 199 a 200, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle loňského (22.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 199

Největší společný dělitel přirozených čísel a, b, c je 1. Dokažte tvrzení: Jsou-li

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{bc}{a}, \quad \frac{ca}{b}$$

celá čísla, pak jsou druhými mocninami vhodných přirozených čísel.

Ján Mazák

Řešení. Nechť p je libovolné prvočíslo, které dělí nejmenší společný násobek n čísel a, b a c. Protože p není současně dělitelem všech čísel a, b a c, předpokládejme bez újmy na obecnosti, že není dělitelem např. čísla c. Nechť p^k je nejvyšší mocnina prvočísla p, která dělí a a p^l (k, l jsou celá nezáporná čísla) nejvyšší mocnina p, která ještě dělí b. Protože bc/a je celé číslo, platí $k \le l$, a analogicky, protože ca/b je celé číslo, je $k \ge l$, tedy $k = l$, a tudíž žádné z čísel bc/a, ca/b není dělitelné p. Proto je celé číslo ab/c dělitelné číslem $p^k p^l = (p^k)^2$ a není současně dělitelné žádnou vyšší mocninou prvočísla p. Stejnou úvahu lze provést pro libovolné prvočíslo, které dělí n. Vzhledem k tomu, že jiná prvočísla nedělí žádné z čísel ab/c, bc/a, ca/b, je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. Jelikož ab/c je přirozené číslo, existují přirozená čísla m a n tak, že platí $c = mn$, $m \mid a$, $n \mid b$. Nechť k a l jsou taková přirozená čísla, že platí $a = km$, $b = ln$. Protože největší společný dělitel čísel a, b a c je 1, jsou nesoudělná jak čísla k a n, tak i čísla l a m. Čísla $bc/a = n^2 \cdot (l/k)$ a $ca/b = m^2 \cdot (k/l)$ jsou celá, tedy k dělí l a l dělí k, proto $k = l$ a platí $a = km$, $b = kn$ a $c = mn$. Odtud již

$$\frac{ab}{c} = k^2, \qquad \frac{bc}{a} = n^2, \qquad \frac{ca}{b} = m^2,$$

což jsme chtěli dokázat.

Správná řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Markéta Calábková*, *Petr Vincena* a *Marian Poljak*, všichni z GJŠ v Přerově, *Antonín Češík* ze SPŠE v Pardubicích, *Jan Krejčí* z GMK v Bílovci, *Karolína Kuchyňová* z GML v Brně, *Tomáš Lysoněk* z G v Uherském Hradišti, *Milan Pultar* z GJK v Praze 6, Parléřova, *Martin Raszyk* z G v Karviné, *Jan Šorm* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Pavel Turek* z G v Olomouci–Hejčíně a *Martin Zahradníček* z G ve Šlapanicích.

Neúplné řešení zaslal *Viktor Němeček*, žák Gymnázia Jihlava.

Úloha 200

Pro komplexní číslo z platí

$$z + \frac{1}{z} = -1.$$

Určete

$$z^{2013} + \frac{1}{z^{2013}}.$$

Stanislav Trávníček

Řešení. Zřejmě $0 \neq z \neq 1$. Rovnici

$$z + \frac{1}{z} = -1$$

vynásobíme číslem z a upravíme na tvar

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Vynásobíme obě strany poslední rovnice číslem $z-1$, dostaneme $z^3-1 = 0$, tj. $z^3 = 1$. Tedy z je komplexní třetí odmocnina z čísla 1, platí

$$z^{2013} = \left(z^3\right)^{671} = 1^{671} = 1,$$

a odtud

$$\frac{1}{z^{2013}} = 1.$$

Platí tudíž

$$z^{2013} + \frac{1}{z^{2013}} = 1 + 1 = 2.$$

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Filip Bialas* z G Opatov v Praze 4, *Markéta Calábková* a *Marian Poljak*, oba z GJŠ v Přerově, *Antonín Češík* ze SPŠE v Pardubicích, *Ondřej Hübsch* z G v Praze 6, Arabská, *Lukáš Knob* z G v Kojetíně, *Matěj Konečný* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova 8, *Jan Krejčí* z GMK v Bílovci, *Tomáš Lysoněk* z G v Uherském Hradišti, *Viktor Němeček* z G v Jihlavě, *Martin Raszyk* z G v Karviné, *Jakub Svovoda* z G v Havířově, Komenského, *Pavel Turek* z G v Olomouci–Hejčíně,

Neúplné řešení zaslali: *František Jáchim* z Volyně a *Jan Šarman* z GMK v Bílovci.

Pavel Calábek