Úlohy domácí části I. kola
64. ročníku MO (kategorie A, B, C)

KATEGORIE A

A–I–1

Je dáno přirozené číslo n. Čtverec o straně délky n je rozdělen na n^2 jednotkových čtverečků. Za vzdálenost dvou čtverečků považujeme vzdálenost jejich středů. Určete počet dvojic čtverečků, jejichž vzdálenost je 5.

(*Jaroslav Zhouf*)

A–I–2 Je dán trojúhelník ABC, v němž je BC nejkratší stranou. Její střed označme M. Na stranách AB a AC určíme postupně body X a Y tak, aby platilo $|BX| = |BC| = |CY|$. Průsečík přímek CX a BY označme Z. Dokažte, že přímka ZM prochází středem kružnice připsané straně BC daného trojúhelníku.

(*Michal Rolínek*)

A–I–3

Najděte všechna celá čísla $k \geq 2$, pro která existuje k-prvková množina M celých kladných čísel taková, že součin všech čísel z M je dělitelný součtem libovolných dvou (různých) čísel z M.

(*Jaromír Šimša*)

A–I–4

Předpokládejme, že pro reálná čísla x, y, z platí

$$15(x + y + z) = 12(xy + yz + zx) = 10(x^2 + y^2 + z^2)$$

a že alespoň jedno z nich je různé od nuly.

a) Dokažte rovnost $x + y + z = 4$.

b) Najděte nejmenší interval $\langle a, b\rangle$, v němž leží všechna tři čísla z libovolné trojice (x, y, z) vyhovující předpokladům úlohy.

(*Jaromír Šimša*)

A–I–5

V daném trojúhelníku ABC označme D bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABD se dotýká stran AB a BD v bodech K a L. Kružnice vepsaná trojúhelníku ADC se dotýká stran DC a AC v bodech M a N. Dokažte, že body K, L, M, N leží na jedné kružnici.

(*Josef Tkadlec*)

A–I–6

Nechť a, b jsou daná, navzájem nesoudělná přirozená čísla. Posloupnost $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel je sestavena tak, že pro každé $n > 1$ platí $x_n = ax_{n-1} + b$. Dokažte, že v libovolné takové posloupnosti každý člen x_n s indexem $n > 1$ dělí nekonečně mnoho jejích dalších členů. Platí toto tvrzení i pro $n = 1$?

(*Jaromír Šimša*)

KATEGORIE B

B–I–1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} |x-5| + |y-9| &= 6, \\ |x^2-9| + |y^2-5| &= 52. \end{aligned}$$

(*Pavel Calábek*)

B–I–2

Drak má n hlav, po jedné na každém z n krků uspořádaných do kruhu. Rytíř dokáže jedním úderem tít po k sousedních krcích a hlavy na nich setnout. Jestliže drakovi po úderu zbyde aspoň jedna hlava, může si nechat některou z chybějících hlav dorůst. Dokažte, že když pro daná čísla n a k může rytíř draka zbavit všech hlav bez ohledu na to, jak mu dorůstají, svede to udělat nejvýše třemi údery.

(*Ján Mazák*)

B–I–3

V trojúhelníku ABC označme U střed strany AB a V střed strany AC. V polorovině opačné k polorovině BCA uvažujme libovolný rovnoběžník $BCDE$. Označme X průsečík přímek UD a VE. Dokažte, že přímka AX dělí rovnoběžník $BCDE$ na dvě části téhož obsahu.

(*Michal Rolínek*)

B–I–4

Nechť m je přirozené číslo, které má 7 kladných dělitelů, a n je přirozené číslo, které má 9 kladných dělitelů. Kolik dělitelů může mít součin $m \cdot n$?

(*Eva Patáková*)

B–I–5

Nechť S je střed přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC, který není rovnoramenný. Označme D patu výšky z vrcholu C a R průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB. Určete velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku, platí-li $|SR| = 2\,|DR|$.

(*Jaroslav Švrček*)

B–I–6

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2} \le \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

(*Jaroslav Švrček*)

KATEGORIE C

C–I–1

Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, která vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+4)^2} &= 4-y,\\ \sqrt{(y-4)^2} &= x+8.\end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

C–I–2

Petr má zvláštní hodinky se třemi ručičkami – první z nich oběhne kruhový ciferník za minutu, druhá za 3 minuty a třetí za 15 minut. Na začátku jsou všechny ručičky ve stejné poloze. Určete, za jak dlouho budou ručičky rozdělovat ciferník na tři shodné části. Najděte všechna řešení.

(*Tomáš Jurík*)

C–I–3

Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo k takové, že $0 \leq k \leq 64$, vybere Simona k políček šachovnice 8×8 a každé z nich označí křížkem. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem vyplní dvaatřiceti dominovými kostkami. Je-li počet kostek pokrývajících dva křížky lichý, vyhrává Lenka, jinak vyhrává Simona. V závislosti na k určete, která z dívek má vyhrávající strategii.

(*Michal Rolínek*)

C–I–4

Označme E střed základny AB lichoběžníku $ABCD$, v němž platí

$$|AB| : |CD| = 3 : 1.$$

Úhlopříčka AC protíná úsečky ED, BD po řadě v bodech F, G. Určete postupný poměr

$$|AF| : |FG| : |GC|.$$

(*Jaroslav Zhouf*)

C–I–5

Rozdíl dvou přirozených čísel je 2 010 a jejich největší společný dělitel je 2 014krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete všechny takové dvojice čísel.

(*Jaromír Šimša*)

C–I–6

Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě devítky.

(*Josef Tkadlec*)