MATEMATIKA

Úloha o čtverci a přímkách

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Problémy a úlohy, v nichž podrobujeme geometrický objekt nějaké transformaci (například podobnosti) tak, aby splňoval nějaké další podmínky, jsou dodnes předmětem zkoumání geometrů (viz např. článek [1], v němž autor sestrojuje rovnostranné trojúhelníky s vrcholy na daných přímkách, nejen v rovině). Přestože k řešení mnoha úloh tohoto typu stačí středoškolské znalosti matematiky, do učebnic se už nevešly. Řešení jedné takové úlohy si ukážeme.

Úloha 1

V rovině jsou dány čtyři navzájem různé přímky a, b, c, d. Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ takové, aby jejich vrcholy A, B, C, D ležely po řadě na daných přímkách a, b, c, d.

Poznámka. Jde o obdobnou úlohu k úloze: Sestrojte všechny čtverce, jejichž strany leží na přímkách procházejících po řadě čtyřmi danými různými body. Její řešení najdeme například v článku [3].

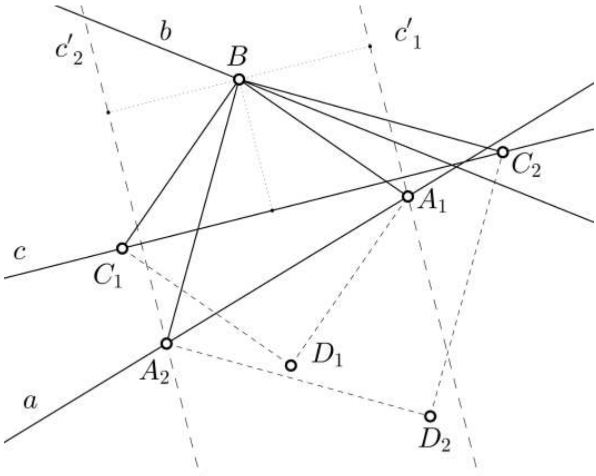
Dříve než začneme řešit danou úlohu, pokusme se sestrojit takový čtverec $ABCD$, jehož vrchol B je pevně zvolený bod přímky b a jehož vrcholy A, C leží po řadě na daných přímkách a, c. Sestrojíme nejprve pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s vrcholy požadovaných vlastností. Poté sestrojíme vrchol D jako chybějící vrchol čtverce $ABCD$. Takto sestrojený vrchol D pochopitelně nemusí ležet na dané přímce d.

K tomu je třeba nejprve řešit následující úlohu.

Úloha 2 (pomocná konstrukce)

Sestrojte pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s pravým úhlem při daném vrcholu B, jehož vrcholy A, C leží po řadě na daných přímkách a, c. Bod B není průsečíkem přímek a, c.

Řešení. Tuto úlohu zde vyřešíme využitím otočení: Protože úsečky BA, BC jsou shodné a navzájem kolmé, jsou body A, C vzor a obraz jeden druhého v otočení se středem B o úhel 90° v kladném či záporném směru (obr. 1).



Obr. 1: Dvě řešení úlohy 2 pro pevně zvolený bod B (a vrchol D čtverce $ABCD$)

a) Zobrazíme přímku c v otočení se středem B a úhlem 90°. Označíme-li její obraz c'_1, je průsečíkem přímek a, c'_1 (pokud existuje, tedy pokud přímky a, c'_1 nejsou rovnoběžné) bod A_1, který je vrcholem hledaného trojúhelníku. Obrazem bodu A_1 v otočení se středem v bodě B o opačný úhel −90° je třetí vrchol C_1 jednoho hledaného trojúhelníku A_1BC_1.

b) Zobrazíme-li přímku c v otočení se středem B a úhlem −90°, dostaneme přímku c'_2 a analogií výše uvedeného postupu druhé možné řešení, trojúhelník A_2BC_2.

Tím je úloha 2 vyřešena. Vraťme se nyní k řešení úlohy 1.

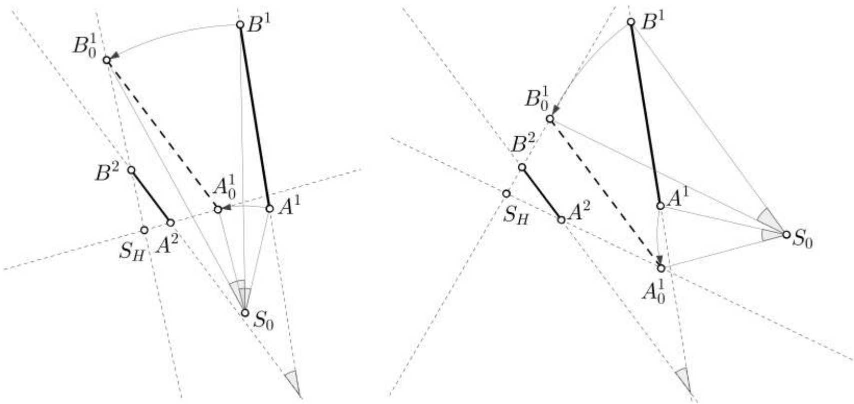
Vlastnosti hledaných čtverců $ABCD$

K sestrojenému trojúhelníku ABC sestrojíme vrchol D čtverce $ABCD$ již jednoznačně. Budeme-li sestrojovat vrcholy D_1 čtverců $A_1B_1C_1D_1$ pro různé polohy bodu $B \in b$ ($B = B_1$), bude bod D_1 probíhat nějakou křivku (podobně i bod D_2 pro čtverce $A_2B_2C_2D_2$). Pokud by to byla nějaká elementární křivka, mohli bychom s její pomocí nalézt řešení naší původní úlohy.

Podobné trojúhelníky ABC – pohyb bodu B po přímce

Je zřejmé, že existence jednoznačně určeného řešení úlohy 2 závisí jen na úhlu přímek a, c. Nejsou-li navzájem kolmé, můžeme ke každému bodu B přímky b (mimo průsečík a, c) najít právě jednu dvojici požadovaných trojúhelníků.

Zvolme dva libovolné různé body B^1, B^2 přímky b a ke každému z nich sestrojme výše uvedeným postupem a) jeden trojúhelník – tj. trojúhelníky $A^1B^1C^1$, resp. $A^2B^2C^2$. Tyto trojúhelníky jsou přímo podobné (pokud jsou přímky a, b, c rovnoběžné, jsou trojúhelníky $A^1B^1C^1$, $A^2B^2C^2$ posunuté; tento případ však ponecháme na pozdější diskusi). Lze je tedy zobrazit jeden na druhý v podobnosti P. Tuto podobnost lze nekonečně mnoha způsoby složit z otočení a stejnolehlosti. Můžeme totiž zvolit libovolný bod roviny S_0 a v otočení s tímto středem S_0 otočit úsečku A^1B^1 do polohy $A_0^1B_0^1$ rovnoběžné s úsečkou A^2B^2, a poté výsledek $A_0^1B_0^1$ zobrazit ve stejnolehlosti se středem S_H v průsečíku přímek $A_0^1A^2$ a $B_0^1B^2$ (obr. 2).



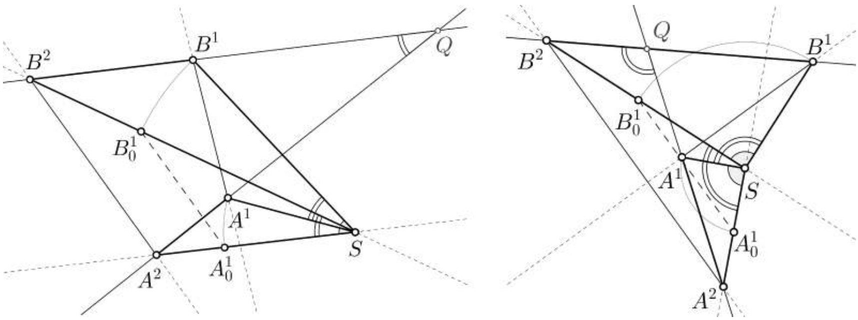
Obr. 2: Dvě různá složení podobnosti zobrazující A^1B^1 do A^2B^2

Vlastnosti užité podobnosti

Zkusme mezi všemi dvojicemi otočení a stejnolehlosti, jejichž složením je podobnost P, najít takovou dvojici, kde mají obě zobrazení společný střed S, a zkoumejme jeho vlastnosti (takové zobrazení se nazývá *spirální podobnost*, viz např. [2]).

Vzhledem k tomu, že otočení i stejnolehlost v rovině zachovávají úhly, zachovává úhly i spirální podobnost.

Protože trojúhelníky B^1SB^2, A^1SA^2 mají shodný úhel při vrcholu S a pro poměr délek jejich stran platí $|SB^1| : |SB^2| = |SA^1| : |SA^2|$ (úhel otočení a koeficient stejnolehlosti), jsou podobné. Dvojice jejich odpovídajících si stran (B^1B^2 a A^1A^2, B^1S a A^1S, B^2S a A^2S) tedy svírají shodné úhly a jejich velikost je rovna velikosti úhlu otočení, kterým zobrazíme přímku B^1B^2 na přímku A^1A^2, tedy velikosti úhlu B^1SA^1 (úhly B^2B^1S, A^2A^1S jsou shodné), obr. 3. V dalším textu využijeme následující závěr.



Obr. 3: Podobné trojúhelníky B^1SB^2, A^1SA^2

Závěr. Velikost úhlu, pod nímž vidíme ze středu složené podobnosti úsečku AB, je rovna odchylce přímek $a = A^1A^2, b = B^1B^2$ (nebo jejímu doplňku do 180° – viz obr. 3 vpravo). Výše uvedená úvaha navíc ukazuje, jak takový společný střed otočení a stejnolehlosti pro danou podobnost hledat: Je to takový bod S, z něhož vidíme obě úsečky A^1B^1, A^2B^2 pod stejným úhlem, jehož velikost je rovna odchylce přímek a, b (nebo jejímu doplňku do 180°).

Poloha vrcholu D hledaného čtverce

Z výše vedených úvah již plyne, že pokud podle úlohy 2 sestrojíme pro zvolený bod B jeden trojúhelník ABC, můžeme již určit bod S, který je společným středem výše studovaných přímých podobností pro všechny dvojice trojúhelníků $A^1B^1C^1$, $A^2B^2C^2$, kde B^1, B^2 jsou různé polohy bodu B na přímce b. Všechny polohy bodu A leží na přímce a, ta je tedy spojnicí libovolné dvojice A^1A^2. Podobně všechny polohy bodu B leží na přímce b, všechny polohy bodu C leží na přímce c. Proto je velikost úhlu ASB rovna odchylce přímek a, b, velikost úhlu CSB je rovna odchylce přímek c, b a velikost úhlu ASC je rovna odchylce přímek a, c (nebo jejich doplňku do $180°$).

Takový střed S dokážeme sestrojit jednoznačně, jakmile máme libovolný trojúhelník ABC, $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$. Pro trojúhelník ABC sestrojíme (jako průsečíky všech kružnic, na nichž leží vrcholy zmíněných úhlů nad jeho stranami) dva takové body, ale právě jeden z nich je společným středem přímých podobností, které zobrazí trojúhelník ABC do dalších (podobných) trojúhelníků $A^iB^iC^i$ pro danou polohu přímek a, b, c. Příslušný bod je tudíž společným středem podobnosti – tj. středem otočení i stejnolehlosti v podobnosti z nich složené – pro každou dvojici přímo podobných trojúhelníků sestrojených k libovolným dvěma bodům B^1, B^2 přímky b. Tyto podobnosti jsou obecně různé, mají různý úhel otočení i koeficient stejnolehlosti, ale všechny mají společný střed S.

Není nezbytné bod S konstruovat, z jeho existence však plyne následující úvaha: Protože také velikost úhlu ASD je při zobrazení čtverců ve výše popsaných přímých podobnostech konstantní pro všechny polohy bodu D, bude spojnice D^1D^2 libovolných dvou z nich (které jsou vrcholy přímo podobných čtverců) svírat s přímkou a stále stejnou odchylku. *Všechny vrcholy D všech přímo podobných čtverců budou tedy ležet na jediné přímce* (pokud bod D nebude pevný).

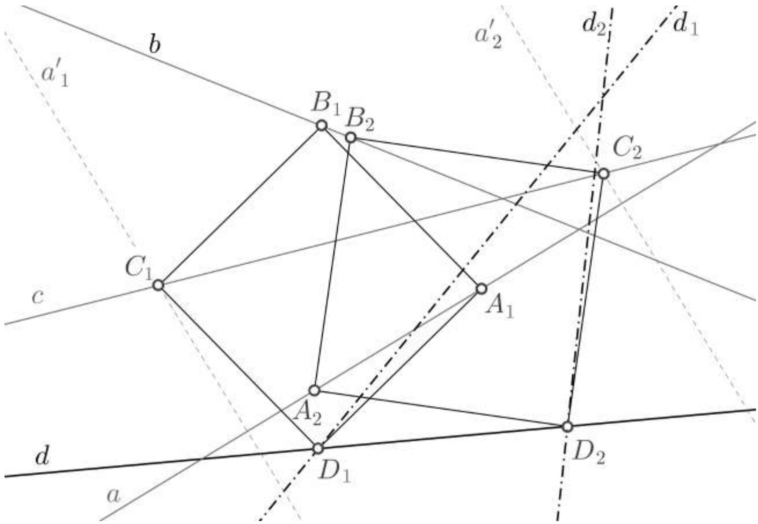
Konstrukce čtverce $ABCD$

Nazvěme nyní pro účely tohoto textu transformaci, která vůči sobě zobrazuje jednotlivé trojúhelníky ABC sestrojené týmž ze dvou postupů v úloze 2, „pohybem". Ukázali jsme, že každý bod pevně spojený s touto soustavou (tj. vrchol M každého trojúhelníku ABM, ACM či BCM, který má pevně dané úhly) při tomto „pohybu" opisuje přímku.

Popis konstrukce.

1. Podle úlohy 2 sestrojíme všechny čtverce $ABCD$, speciálně jejich vrcholy D, pro dvě různé pevně zvolené polohy bodu B – pro bod B^1 vrcholy D_1^1 a D_2^1, pro bod B^2 vrcholy D_1^2 a D_2^2.
2. Sestrojíme přímky $d_1 = D_1^1D_1^2$ a $d_2 = D_2^1D_2^2$.

3. Sestrojíme vrcholy hledaných čtverců, body $D_1 = d \cap d_1$ a $D_2 = d \cap d_2$ (pokud existují).
4. Využitím postupu úlohy 2 sestrojíme k nalezeným bodům D_1, D_2 jednoznačně určené čtverce $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ (ke každému z bodů D_1, D_2 ten, pro který $B \in b$) – viz obr. 4.



Obr. 4: Závěrečný krok konstrukce čtverce – dvě řešení zadané úlohy

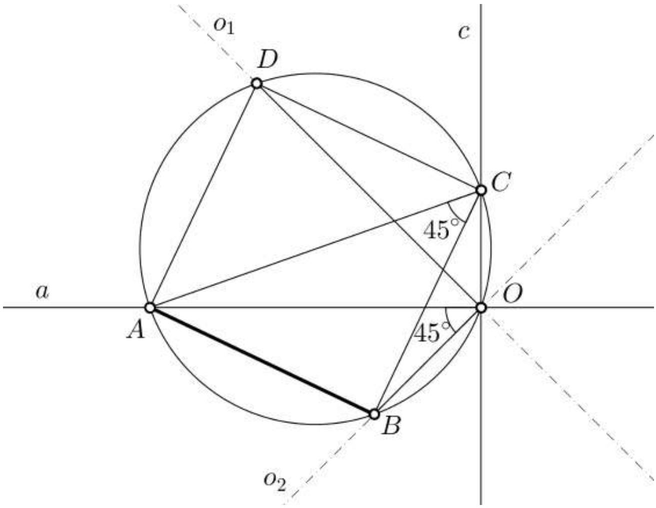
Diskuse počtu řešení

Při výše uvedených úvahách jsme narazili na několik případů, kdy popisovaný postup nevede k řešení úlohy, nebo kdy zobrazení trojúhelníků (čtverců) není možno popsat jako složení otočení a stejnolehlosti. Postupně je vyřešíme. Nejprve dokážeme následující tvrzení.

Lemma

Leží-li vrcholy A, C úhlopříčky čtverce $ABCD$ po řadě na dvou navzájem kolmých přímkách a, c, leží zbývající vrcholy B, D čtverce na (navzájem kolmých) osách úhlů vyťatých přímkami a, c.

Důkaz. Označme O průsečík daných přímek a, c. Zvolme $A \in a$, $C \in c$. Kružnice opsaná čtverci $ABCD$ prochází bodem O (Thaletova kružnice sestrojená nad úsečkou AC). Tudíž $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle AOB$ jsou shodné obvodové úhly nad obloukem (tětivou) AB. Přitom $|\sphericalangle ACB| = 45°$, tudíž i $|\sphericalangle AOB| = 45^\circ$ a B leží na ose úhlu kolmic a, c (nebo je $B = O$). Analogicky jsou shodné úhly $\sphericalangle AOD$ a $\sphericalangle ACD$ a bod D leží na druhé z os úhlů, které svírají kolmice a, c (nebo je $D = O$), viz obr. 5.



Obr. 5: Vrcholy úhlopříček čtverce na kolmicích

Navíc je zřejmé, že ke každé dvojici bodů A, C existuje jednoznačně určená dvojice bodů B, D (až na orientaci popisu) a naopak: k bodům B, D na přímkách o_1, o_2 existuje jednoznačně určená dvojice bodů A, C na přímkách a, c, které jsou osami úhlů svíraných kolmicemi o_1, o_2.

Nyní můžeme přistoupit k samotné diskusi.

• *Přímky, na nichž leží vrcholy úhlopříčky čtverce, jsou navzájem kolmé.*

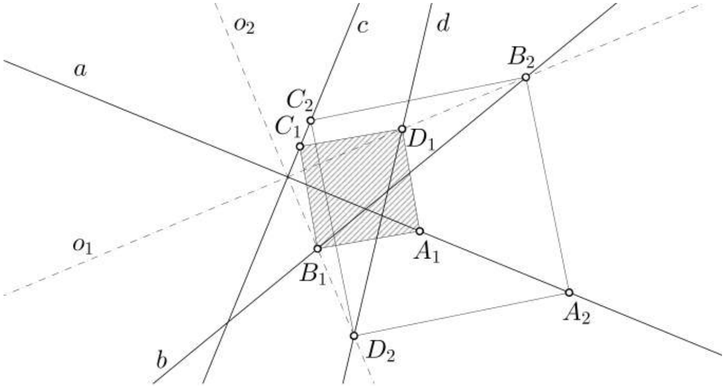
Nechť jsou to přímky a, c. V tom případě neexistuje jednoznačně určený průsečík rovnoběžných přímek a a otočeného obrazu c' přímky c. Úlohu vyřešíme samostatně:

Popis konstrukce.

1. Sestrojíme přímky o_1, o_2 – osy úhlů, které svírají kolmice a, c.

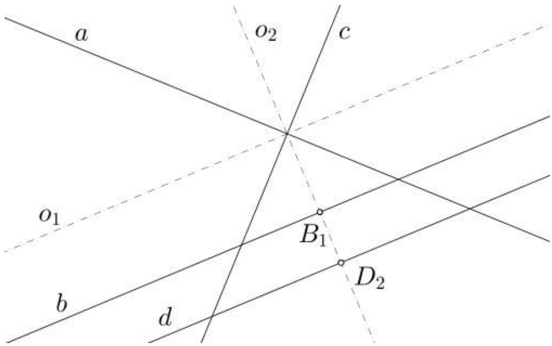
2. Sestrojíme jejich průsečíky s danými přímkami b, d (pokud existují), tedy dvě dvojice bodů B, D ($o_1 \cap b$, $o_2 \cap d$ a $o_2 \cap b$, $o_1 \cap d$).

3. Ke každé dvojici B, D sestrojíme jednoznačně dvojici vrcholů A, C (obr. 6).



Obr. 6: Dvě řešení úlohy pro kolmé přímky a, c

Zbývá vyřešit situaci, kdy některá (nebo obě) z přímek b, d svírá s přímkami a, c odchylku 45°. V tomto případě může mít úloha nekonečně mnoho řešení (alespoň jedna z přímek b, d splývá s některou z os o_1, o_2 a druhá není s druhou osou různá rovnoběžka), žádné řešení (obě přímky protínají jen stejnou osu a s druhou jsou rovnoběžné, obr. 7) nebo jediné řešení (alespoň jedna z přímek b, d protíná jen jednu osu a druhá protíná druhou osu).

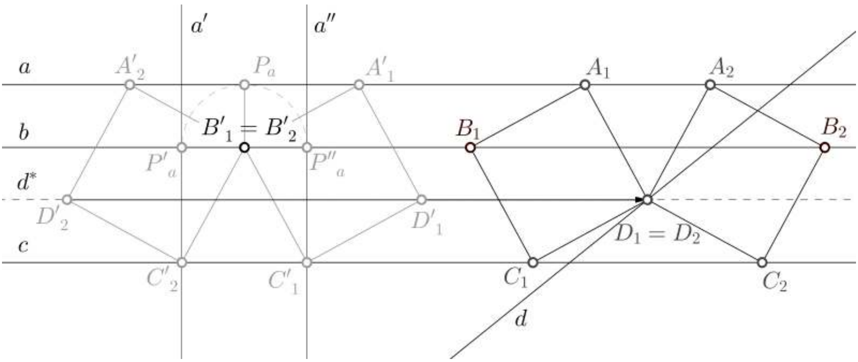


Obr. 7: Žádné řešení úlohy pro kolmé přímky a, c

• *Tři z daných přímek jsou navzájem rovnoběžné.* (obr. 8)

Nechť jsou to přímky a, b, c. Potom všechny trojúhelníky ABC sestrojené v úloze 2 pro všechny polohy bodu B jsou shodné a tvoří dvě sady navzájem posunutých trojúhelníků, přičemž každé dva trojúhelníky z různých sad jsou navzájem souměrné dle přímek kolmých k daným rovnoběžkám. Vrcholy D čtverců obou sad pak leží na jediné přímce d' rovnoběžné s přímkami danými.

Podle vzájemné polohy přímek d, d' má úloha řešení nekonečně mnoho (pro d, d' totožné), žádné (pro d, d' různé rovnoběžky) nebo dvě různá (pro d, d' různoběžné). Případ $a = c$ je vyloučen zadáním.



Obr. 8: Dvě řešení úlohy pro $a \parallel b \parallel c$

• Zmiňme se dále samostatně o případu, kdy jsou rovnoběžné – podle výše použité volby označení – pouze přímky a, c a přímka b je s nimi různoběžná.

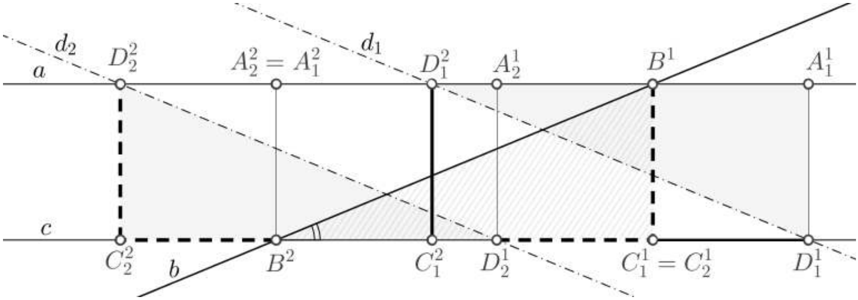
Jak vidíme z vyznačených shodných pravoúhlých trojúhelníků na obr. 9, kde jsme sestrojili pomocné čtverce $ABCD$ pro body B v průsečících $B^1 = b \cap a$, $B^2 = b \cap c$, jsou v tomto případě přímky d_1, d_2 rovnoběžné a svírají s přímkami a, c stejnou odchylku jako přímka b.

• *Trojice přímek prochází společným bodem*

Nechť a, b, c jsou přímky procházející společným bodem. Potom všechny trojúhelníky ABC sestrojené v úloze 2 pro všechny polohy bodu B tvoří dvě sady navzájem stejnolehlých trojúhelníků a vrcholy D čtverců leží na přímkách procházejících středem stejnolehlostí – společným bodem přímek a, b, c. Úlohu vyřešíme základním popsaným postupem, stačí nám však sestrojit pomocné čtverce $ABCD$ jen pro jednu polohu bodu B.

• *Body D na přímce d – závěr řešení*

Ve všech případech závisí počet řešení na vzájemné poloze dané přímky d a sestrojených přímek d_1, d_2. Je-li přímka d s některou z přímek d_1, d_2



Obr. 9: Směr přímek d_1, d_2 pro $a \parallel c$

totožná, má úloha nekonečně mnoho řešení, je-li s ní rovnoběžná různá, příslušné řešení chybí. Prochází-li všechny čtyři dané přímky společným bodem, řešení neexistuje, nebo je jich nekonečně mnoho.

Z úvah o úhlech přímek, na nichž leží vrcholy čtverce, plyne, že směry sestrojených přímek d_1, d_2 se zachovají, posuneme-li přímky a, b, c do společného bodu. Řešení takové úlohy jsme komentovali v předešlém odstavci.

Závěr

V tomto článku jsme ukázali, že daná úloha je eukleidovsky řešitelná, tj. je řešitelná pouze pomocí kružítka a pravítka bez měřítka, a navíc nám k jejímu řešení postačí pouze základní školské matematické znalosti.

Nalezený postup konstrukce snadno pozměníme pro obecnější zadání úlohy, kdy na daných přímkách hledáme vrcholy libovolného čtyřúhelníku podobného čtyřúhelníku danému.

Literatura

[1] *Ochoński, S.*: Equilateral triangles whose vertices belong to three given straight lines. In: The Journal of Polish Society of Geometry and Engineering Graphics, roč. 19 (2009).

[2] *Prasolov, V. V.*: Zadači po geometrii I. Moskva, 1986, (rusky).

[3] *Gergelitsová, Š.*: Úloha o čtverci. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 83 (2008), č. 3.

Pravděpodobnost v aplikačních úlohách

MAGDALENA HYKŠOVÁ

Fakulta dopravní ČVUT, Praha

Článek volně navazuje na statě [3], [5] a [6], které v minulých ročnících tohoto časopisu představily některé části sbírky aplikačních úloh z matematiky, jež vznikla na Katedře didaktiky matematiky MFF UK v Praze a v současné době je v nakladatelství Prometheus připravována pro tisk.[1]

Autoři samozřejmě nezpochybňují, že matematika jako vyučovací předmět by měla především rozvíjet logické myšlení. Většinu studentů je však nutné ke studiu této disciplíny výrazně motivovat a pomoci jim zbavit se nejrůznějších předsudků a obav. A právě to je hlavním cílem *Sbírky aplikačních úloh ze středoškolské matematiky*, která se snaží ukázat, že matematika je užitečným a nepostradatelným nástrojem pro řešení skutečných problémů z reálného světa. Sbírka je určena především studentům a učitelům středních škol, ale také všem zájemcům o řešení úloh z praxe.

Sbírka začíná kapitolou věnovanou základním matematickým poznatkům s důrazem na finanční matematiku, procenta a poměry, následující kapitola je zaměřena na úlohy vedoucí na rovnice, nerovnice a jejich soustavy a úlohy související s funkcemi a posloupnostmi. Třetí kapitola obsahuje úlohy geometrické týkající se planimetrie, stereometrie a trigonometrie. Sbírku pak uzavírá kapitola věnovaná pravděpodobnosti; několik úloh z této části bych ráda představila v tomto článku.

Úlohy věnované pravděpodobnosti

Podstatná část studentů považuje pravděpodobnost za nejméně zajímavou, užitečnou a pochopitelnou partii matematiky, která řeší problémy vzdálené od reálného života. Přitom je tomu právě naopak – s pravděpodobností se každý z nás setkává téměř neustále, ať už hovoříme o počasí, dopravních nehodách, nemocích, průzkumech veřejného mínění, finančních

[1] Autory sbírky jsou J. Hromadová, M. Hykšová, O. Odvárko, P. Pavlíková, J. Robová a A. Slavík.

trzích, detekci spamů, hazardních hrách, vadách materiálů, složení hornin, o rostlinách, tkáních či samotných lidských bytostech aj. Teorie pravděpodobnosti si tedy zaslouží, aby jí byla věnována větší pozornost a aby byl co nejvíce využit její potenciál pro motivaci výuky matematiky i pro všeobecnou finanční gramotnost. Mladí lidé by si ze školy měli odnést alespoň základní „pravděpodobnostní“ uvažování, aby nepodlehli hráčské vášni tam, kde by stejně nemohli vyhrát, a aby si uměli vytvořit správnou představu o údajích, jimiž je budou zahrnovat politici, firmy provádějící průzkumy veřejného mínění, lékaři, farmaceutické firmy, biologové či provozovatelé heren, kasin a loterií.[2]

1. Hazardní hry

První část kapitoly věnované pravděpodobnosti se zabývá hazardními hrami a kurzovými sázkami. Na jednoduché úloze týkající se loterie je nejprve objasněn pojem *střední* či *očekávané hodnoty* určité veličiny, např. výhry či zisku. Potom jsou zkoumány různé hazardní hry (hrací automaty, keno, ruleta a různé hry s kostkami) a vždy je ukázáno, že střední hodnota zisku hráče je záporná – to znamená, že jediný, kdo na hře z dlouhodobého hlediska může vydělat, je provozovatel herny či kasina.

Tyto úvahy jsou zároveň přirozenou motivací pro připomenutí skutečnosti, že zisk majitelům výherních zařízení zaručuje *zákon velkých čísel*, který lze zjednodušeně zformulovat takto: Opakuje-li se daný náhodný pokus dostatečně mnohokrát, pak se relativní četnost výskytu určitého jevu blíží jeho teoretické pravděpodobnosti s libovolnou přesností. Budeme-li tedy například dostatečně dlouho házet nevychýlenou mincí, padne panna přibližně v polovině případů. Bude-li v nějaké hře pravděpodobnost výhry v jedné partii menší než $1/2$ a hráč u hry vytrvá dostatečně dlouho, pak prodělá a kasino se obohatí. Jediné, co si tedy kasino musí zajistit, je to, aby šance v každé jednotlivé hře byly lehce vychýlené v jeho prospěch. Ne příliš mnoho, aby podmínky hráče neodradily, ale dostatečně na to, aby podnik slušně vydělával.

V této souvislosti ve sbírce rovněž upozorňujeme, že mnoho hráčů má o zákonu velkých čísel poněkud zkreslenou představu a domnívá se, že

[2] Zajímavé motivační příklady lze nalézt v řadě publikací. V českém jazyce jsou dostupné například knihy [1], [4] a [7] autorů J. Anděla, E. a M. Kaplanových a J. S. Rosenthala; z cizojazyčných knih uveďme alespoň knihu [2] G. Gigerenzera. V naší sbírce jsme se snažili především o to, abychom učitelům poskytli materiál bezprostředně použitelný ve výuce. Úlohy jsou řazeny tak, aby studenty postupně seznamovaly se základními pojmy a jejich vlastnostmi a zároveň ukázaly jejich praktické využití.

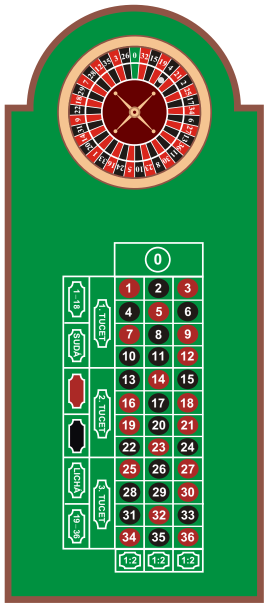
padne-li například desetkrát po sobě červená, musí dříve nebo později padnout častěji černá, protože zákon velkých čísel vyžaduje, aby obě barvy padaly stejně často. Kulička v ruletě se však nedívá zpět, neví, kolikrát za sebou přistála na černém či na červeném políčku, a šance na výhru je stále stejná. Četnosti obou barev se obvykle vyrovnají až v mnohem delším časovém období.

Pro ilustraci zde uveďme jednu řešenou úlohu z této části.

Ruleta

Základem rulety[3] je otáčivé zařízení tvořené dvěma soustřednými koly, z nichž větší je nehybné a menší se otáčí. Vnitřní kolo je rozděleno do 37 políček očíslovaných od 0 do 36; políčko s číslem 0 je zelené, ostatní jsou střídavě červená a černá.[4] Při hře posílá krupiér kuličku po vnějším kole proti směru otáčení vnitřního kola. Kulička postupně zpomaluje, až spadne do vnitřního kola a usadí se na jednom z políček.

Sázka	**Výplatní poměr**
Černá čísla	1 : 1
Červená čísla	1 : 1
Malá čísla (1–18)	1 : 1
Sousední sloupce	1 : 2
První sloupec	2 : 1
Sousední tucty	1 : 2
První tucet (1–12)	2 : 1
Šest čísel (sousední řádky)	5 : 1
Čtyři čísla (tvořící čtverec)	8 : 1
Tři čísla (řádek)	11 : 1
Dvě sousední čísla	17 : 1
Jedno číslo	35 : 1



[3]Ruleta pochází z Francie (název *roulette* znamená doslova *malé kolo*) a v dnešní podobě se hraje přinejmenším od roku 1796.

[4]*Americká ruleta* obsahuje navíc ještě jedno zelené políčko označené jako 00; ve většině evropských kasin se však používá tzv. *francouzské kolo*, které je popsané v textu.

Umísťováním žetonů na herní plán hráč sází na to, kde kulička zůstane ležet po příštím roztočení. Vsadí-li například S Kč na červenou barvu, pak v případě, že kulička skončí na červeném políčku, získá zpět svou sázku a k tomu navíc dalších S Kč (v tomto případě se říká, že sázka je vyplácena v poměru 1 : 1), zůstane-li však kulička na černém nebo zeleném políčku, hráč o svou sázku přijde. Některé další možnosti sázek jsou uvedeny v následující tabulce. Je-li udán poměr $a : b$, pak v případě výhry hráč dostane ke vsazené částce navíc její (a/b)násobek.

Příklad: Ruleta – zaručený výdělek pro kasina

V kasinu je provozována ruleta popsaná výše.

a) Jaká je pravděpodobnost výhry při sázce na červenou barvu? Jaký bude náš očekávaný zisk, vsadíme-li 10 Kč na červenou barvu?

b) Jaká je pravděpodobnost výhry při sázce na druhý a třetí sloupec? Jaký bude náš očekávaný zisk, vsadíme-li 10 Kč na druhý a třetí sloupec?

Řešení

a) Na kole rulety je celkem 37 políček, z toho 18 je červených. Pravděpodobnost výhry je proto $18/37 \doteq 0{,}486$.

Vsadíme-li 10 Kč na červenou barvu, pak v průměru v 18 z 37 případů vyhrajeme 10 Kč a ve zbývajících 19 případech o 10 Kč přijdeme. Očekávaný zisk je proto

$$\left(10 \cdot \frac{18}{37} - 10 \cdot \frac{19}{37}\right) \text{ Kč} = -\frac{10}{37} \text{ Kč} \doteq -0{,}270 \text{ Kč}.$$

b) Druhý a třetí sloupec obsahují dohromady 24 z celkového počtu 37 čísel. Pravděpodobnost výhry je proto $24/37 \doteq 0{,}649$.

Vsadíme-li 10 Kč na druhý a třetí sloupec, pak v průměru ve 24 případech vyhrajeme 5 Kč a v ostatních 13 případech přijdeme o 10 Kč. Očekávaný zisk je proto

$$\left(5 \cdot \frac{24}{37} - 10 \cdot \frac{13}{37}\right) \text{ Kč} = -\frac{10}{37} \text{ Kč} \doteq -0{,}270 \text{ Kč}.$$

Někteří hráči samozřejmě mohou mít štěstí a odejít s velkou výhrou. Vypočítané hodnoty však napovídají, že v delším časovém horizontu hráči více peněz prohrají než vyhrají, a jediný, kdo má zaručený trvalý zisk, je provozovatel kasina či herny.

2. Kurzové sázky

Další skupina úloh sbírky se zabývá kurzovými sázkami. Čtenáři se zde kromě jiného mohou seznámit s pojmem *návratnosti sázky* (která je pro sázejícího vždy menší než 100 %), pochopit souvislost mezi vypsanými kurzy a odhady pravděpodobností daných událostí a uvědomit si, kdo na těchto hrách může dlouhodobě vydělat.

3. Podmíněné pravděpodobnosti

Úlohy v následující části jsou věnovány podmíněným pravděpodobnostem. Na jednotlivých příkladech nejprve připomínáme pojem podmíněné pravděpodobnosti $P(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ a ilustrujeme rozdíl mezi podmíněnou a nepodmíněnou pravděpodobností a také mezi podmíněnými pravděpodobnostmi $P(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ a $P(\mathsf{B}|\mathsf{A})$.[5]

V následujících ukázkách je hledaná pravděpodobnost odhadována pomocí relativních četností.

Příklad: Falešně pozitivní testy

Před nástupem do nového zaměstnání musel David podstoupit preventivní prohlídku, jejíž součástí byl test na HIV. Podle údajů výrobce test odhalí přítomnost viru u nemocné osoby s pravděpodobností 99,90 % a s pravděpodobností 99,99 % dá negativní výsledek u osoby zdravé. Po vyhodnocení lékař Davidovi sdělil, že mu test vyšel pozitivní a že musí znovu na odběr krve, aby se výsledek ověřil.

Předpokládejme, že v České republice je virem HIV infikováno přibližně 0,01 % obyvatel.

a) David se z hlediska rizika nákazy virem HIV považuje za průměrného Čecha. Jaká je po výsledku prvního testu pravděpodobnost, že má skutečně HIV?

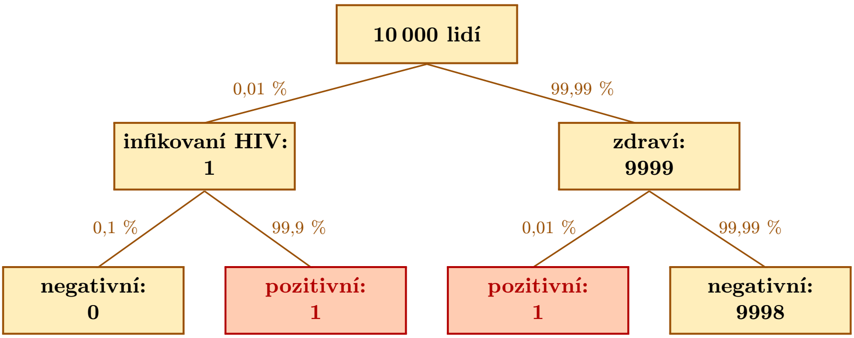
b) Představme si, že David žije od dětství spořádaným životem v malé vesnici na Vysočině, kde je podle statistik čtyřikrát nižší výskyt HIV než v celé České republice. Jaká je nyní pravděpodobnost, že má skutečně HIV?

[5] Poslední zmíněný rozdíl je dobře patrný již z následujícího jednoduchého příkladu. Uvažujme náhodně vybranou osobu, která žila v USA před rokem 2013. Zřejmě platí: $P(X$ byl muž $|$ X byl prezident USA$)$ $\neq$ $P(X$ byl prezident USA $|$ X byl muž$)$, neboť v USA byli všichni dosavadní prezidenti muži, zdaleka ne každý muž se však stal prezidentem.

c) Nyní si představme, že David v minulosti injekčně užíval drogy. Na internetu najde statistiky, podle nichž je mezi injekčními uživateli drog 1 % HIV pozitivních. Jaká je v tomto případě pravděpodobnost, že je skutečně infikován virem HIV?

Řešení

a) Pravděpodobnost, že bude mít David pozitivní test, je-li zdráv, je velmi nízká: $P(\text{pozitivní test} \mid \text{zdravý}) \doteq 0,01\ \%$. Jakmile však test pozitivní vyjde, pak pravděpodobnost $P(\text{nemocný} \mid \text{pozitivní test})$, že je skutečně infikován, není tak vysoká, jak by se možná na první pohled mohlo zdát. Uvažujme například 10 000 Čechů; podle zadání mezi nimi bude v průměru jeden infikovaný, jemuž vyjde téměř jistě pozitivní výsledek, a 9999 zdravých, z nichž přibližně jednomu vyjde test „falešně pozitivní" (v úlohách tohoto typu budeme vždy zaokrouhlovat na celé počty osob):



Pozitivní výsledek tedy vyjde průměrně dvěma osobám, jedné zdravé a jedné infikované. Pravděpodobnost, že je David nakažený, vyšel-li mu pozitivní test, je proto přibližně rovna $1/2$, tj. 50 %.

Podobně můžeme postupovat i v částech b) a c). Ve sbírce jsou uvedeny všechny obrázky, v tomto článku si však dovolím ponechat jejich vytvoření čtenářům a jen stručně popsat výsledky.

b) Je-li výskyt HIV v dané populaci čtyřikrát nižší než v celé České republice, pak bude infikován přibližně jeden člověk ze 40 000. Místo 10 000 osob, uvažovaných v předchozí části úlohy, si tedy představme 40 000 obyvatel Vysočiny. V průměru mezi nimi bude jeden infikovaný, jemuž opět vyjde téměř jistě pozitivní výsledek, a 39 999 zdravých. Přitom přibližně čtyřem zdravým osobám, tj. 0,01 % ze 39 999, vyjde falešně pozitivní test.

Pozitivní test tedy vychází v průměru pěti osobám, z nichž čtyři jsou zdravé a jen jedna infikovaná. Pravděpodobnost, že je David skutečně infikovaný, je proto přibližně rovna 1/5, tj. 20 %.

c) Je-li výskyt HIV v dané populaci roven 1 %, pak bude infikován přibližně jeden člověk ze 100. Aby nám vycházely celočíselné počty osob, uvažujme raději větší skupinu, například 1 000 000 osob. V průměru mezi nimi bude 10 000 infikovaných, z nichž 10 bude mít falešně negativní test, a 990 000 zdravých, z nichž přibližně 99 bude mít test falešně pozitivní. Pozitivní test tedy vychází v průměru 10 089 osobám, z nichž 99 je zdravých a 9990 je infikovaných. Pravděpodobnost, že je David skutečně infikovaný, je nyní přibližně $9990/10\,089 \doteq 0{,}9902$, tj. 99,02 %.

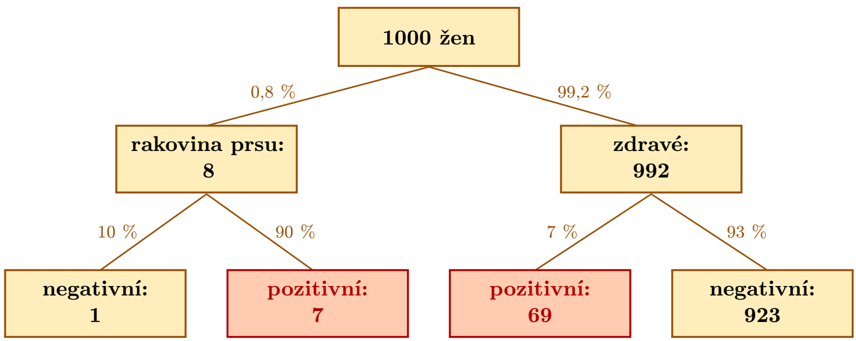
Poznámka. Povšimněte si, že hledaná pravděpodobnost závisí nejen na kvalitě testu, ale do velké míry také na výskytu dané nemoci. Je-li nemoc vzácná, pak je pravděpodobnost falešně pozitivního výsledku poměrně vysoká. S narůstajícím výskytem však tato pravděpodobnost rychle klesá.

Příklad: Mamografické vyšetření

Pravděpodobnost, že má žena rakovinu prsu, je 0,8 %. Pokud ji má, pak pravděpodobnost, že mamogram bude pozitivní, je 90 %. Pokud ji nemá, pak pravděpodobnost, že mamogram bude i tak pozitivní, je 7 %.

a) Představte si ženu, jejíž mamogram je pozitivní. Jaká je pravděpodobnost, že má skutečně rakovinu prsu?

b) Představte si ženu, jejíž mamogram je negativní. Jaká je pravděpodobnost, že rakovinu prsu nemá?



Řešení

a) Uvažujme například skupinu 1 000 žen. V průměru osm z nich má rakovinu prsu a přibližně sedm z těchto osmi žen bude mít pozitivní mamogram. Z ostatních 992 žen, které rakovinu nemají, jich bude mít zhruba 69 rovněž pozitivní mamogram. Celkem tedy vyjde pozitivní výsledek přibližně 76 ženám, z nichž jen 7 má rakovinu, viz obr. na str. 177. Hledaná pravděpodobnost je proto přibližně $7/76 \doteq 0{,}092$ tj. 9,2 %.

b) Ze stejného obrázku je patrné, že negativní mamogram vyjde celkem 924 ženám, z nichž jen jedna má rakovinu. Hledaná pravděpodobnost je proto přibližně $923/924 \doteq 0{,}9988$, tj. 99,89 %.

Poznámka. V předchozí úloze znamenal pozitivní výsledek poměrně nízkou, avšak nezanedbatelnou pravděpodobnost, že pacientka trpí rakovinou prsu, zatímco negativní výsledek tuto nemoc s velmi vysokou pravděpodobností vyloučil. Podobné testy tedy umožňují vyčlenit v prvním kole většinu zdravých pacientů a dále pak vyšetřovat jen ty, u nichž je podezření, že danou nemoc mají. K tomu se obvykle používají metody, které jsou sice přesnější, ale také dražší či znamenají výraznější zásah do organismu, a proto není vhodné je používat plošně na celou skupinu testovaných.

4. Posuzování věrohodnosti

Poslední typ úloh, pro jehož představení v tomto článku zbývá prostor, se týká situací, kdy je třeba prokázat, že určitý výsledek nastal například díky pozitivnímu působení jistého léku či procedury, zvláštním schopnostem jedince apod. Ve sbírce je nejprve objasněn pojem *p-hodnoty* jako pravděpodobnosti, že by ke stejnému nebo ještě výraznějšímu výsledku (např. stejně nebo ještě více uzdravených pacientů) došlo vlivem náhody za předpokladu, že by žádný pozitivní účinek neexistoval; je-li tato pravděpodobnost nižší než stanovená hranice (nejčastěji 5 %, někdy se požaduje jen 1 % nebo ještě méně), považuje se obvykle výsledek za statisticky významný, tj. prokazující, že k němu nedošlo pouhou náhodou.[6]

Příklad: Je lék skutečně účinný?

Nemoc, která se vyskytuje velmi vzácně a dosud se na ni nepodařilo nalézt účinnou léčbu, vede podle údajů Ministerstva zdravotnictví k úmrtí ve 30 % případů. Farmaceutická firma vyvine lék a oznámí, že snižuje

[6] Připomeňme ještě, že hypotéza, že žádný pozitivní účinek neexistuje, se obvykle označuje jako *nulová*, zatímco hypotéza, podle níž k pozitivnímu účinku dochází, se označuje jako *alternativní*.

úmrtnost na tuto chorobu. Pro ověření je objednána odborná studie. Předpokládejme, že k prokázání účinnosti je požadována p-hodnota menší než 5 %.

Lék byl podán dvaceti pacientům, z nichž sedmnáct přežilo a tři zemřeli. Prokazuje takováto studie účinnost léku?

Řešení

Předpokládejme, že lék je neúčinný, a vypočítejme pravděpodobnost, že by i tak náhodou přežilo alespoň 17 z 20 pacientů, tj. že by se stejný nebo ještě výraznější výsledek objevil pouhou náhodou. Tato pravděpodobnost je součtem pravděpodobností následujících jevů: přežije právě 17 pacientů a zbývající tři zemřou (přitom existuje $\binom{20}{3}$ možností, jak vybrat tři pacienty, kteří nepřežijí), přežije právě 18 pacientů a zbývající dva zemřou, přežije právě 19 pacientů a jeden zemře, přežije všech 20 pacientů, tedy

$$\binom{20}{3} \cdot 0{,}7^{17} \cdot 0{,}3^{3} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}7^{18} \cdot 0{,}3^{2} + 20 \cdot 0{,}7^{19} \cdot 0{,}3^{1} + 0{,}7^{20} \doteq 0{,}107.$$

Výsledná pravděpodobnost činí 0,107, tj. 10,7 %, což je více než požadovaná hranice 5 %. Studie proto účinnost léku neprokazuje.

Poznámka. Pětiprocentní hranice je ve vědách široce používána a je považována za rovnocennou s právním vyjádřením „nade vší pochybnost“. Připouští však, že z dvaceti studií bude v průměru jedna chybná. Někdy je proto tato hranice snížena například na jedno procento.

Literatura

[1] *Anděl, J.*: Matematika náhody, Matfyzpress, Praha, 2007.

[2] *Gigerenzer, G.*: Calculated Risks. How to Know When Numbers Deceive You, Simon & Schuster, New York, 2002.

[3] *Hromadová, J.*: Aplikační úlohy z geometrie, Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 22 (2013), s. 17–24.

[4] *Kaplan, M., Kaplanová, E.*: Chances are… Adventures in Probability. Viking Penguin, New York, 2006 [český překlad: Čtrnáct, M.: Šance je, že… Dobrodružství v pravděpodobnosti, Praha, Triton, 2008].

[5] *Pavlíková, P., Robová, J., Slavík, A.*: Fahrenheit, Celsius a americký cent. Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 20 (2011), s. 385–392.

[6] *Pavlíková, P., Robová, J., Slavík, A.*: Úlohy s dopravní tematikou. Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 20 (2011), s. 454–461.

[7] *Rosenthal, J. S.*: Struck by Lightning: The Curious World of Probabilities, Toronto, Harper Collins, 2005 [český překlad: Hykšová, M.: Zasažen bleskem. Podivuhodný svět pravděpodobností. Praha, Academia, 2008].

Násobení na prstech

ALICE BÍLÁ – MATĚJ BÍLÝ

Pedagogická fakulta UK, Praha – žák Gymnázia J. Keplera, Praha

V poslední době bývá věnována pozornost netradičním algoritmům, např. jak určit součin dvou dvojmístných čísel jinak než běžnou školskou metodou, jak násobit na prstech, co je čínské grafické násobení apod. (viz např. [2], [3], [4], [5]). Tyto algoritmy jsou uváděny nejen pro zajímavost a jako snaha motivovat a ozvláštnit často nepříliš oblíbený dril, ale též jako tréninkový můstek k odhalení principu daného algoritmu: proč je algoritmus správný a pro která čísla platí?

Obecně známé pravidlo, jak násobit na prstech číslo 9 čísly 1 až 9, může být doporučováno dětem i jako pomůcka. Je jednoduché. Položíme vedle sebe levou a pravou rukou dlaněmi dolů a natáhneme prsty. Chceme-li číslo 9 násobit např. osmi, skrčíme 8. prst počítáno zleva, tedy pravý prostředníček (levý malíček je 1. prst, pravý malíček 10. prst, podobně i dále). Počet 7 natažených prstů vlevo od skrčeného přečteme jako počet desítek a počet 2 natažených prstů vpravo od skrčeného je počet jednotek výsledku; součin čísel 8 a 9 je 72. Stejně tak i v dalších případech, např. při násobení dvěma skrčíme levý prsteníček.

Jiný způsob násobení na prstech (od 6×5 až po 9×9) je uveden v publikaci [1]. Tento postup však není obecně znám také proto, že zvýšení počtu byť snadnějších početních operací a spojů zvyšuje možnost chyby, a je tedy pro některé děti příliš náročný.

Zde ukážeme další typ násobení na prstech, který sice většinou nevede ke zjednodušení výpočtu, tedy ke zjednodušení mentálních operací, ale je docela zajímavý. (Snad jen násobení čísla 8 v rámci malé násobilky může být pro trénink násobilky výhodné.) Tento algoritmus obsahuje někdy složitější a někdy jednodušší násobení, než je to původně zadané a navíc jsou tu některé další početní úkony, takže nejde o vhodnou alternativu běžného způsobu vytváření či zapamatování některých spojů (malé či velké) násobilky. Každopádně však lze tímto algoritmem motivovat žáky k počítání většího množství příkladů s konkrétním cílem – aby si vyzkoušeli algoritmus i pro velká čísla, prozkoumali ho a hledali jeho zákonitostí. Nejzajímavější na našem algoritmu je skutečnost, že pro velká čísla funguje na všech prstech na rukou třeba i u sta princezen stojících v řadě vedle sebe. Jeho ověření je tak jednoduché, že je přístupné i žáku druhého stupně, jen částečně obeznámenému s úpravami výrazů.

Malá násobilka (od 1×1 do 9×9)

Chceme-li násobit např. 7×4, vybereme větší z činitelů (tzv. vedoucí číslo) a zvětšíme ho o 1. (V případě násobení např. 6×6 je vedoucí číslo 6). Zleva doprava na rukou položených vedle sebe dlaněmi dolů odpočítáme tolik prstů, kolik je toto zvětšené vedoucí číslo, a odpočítané prsty necháme natažené. V našem případě tedy odpočítáme 8 prstů a necháme je natažené. Schováme 9. a 10. prst, pravý prsteníček a pravý malíček, a pracujeme dále jen s osmi prsty. Pravý prsteníček a pravý malíček nás od této chvíle již nebudou zajímat a nebudeme je dále uvažovat ani jako skrčené prsty, jako bychom je ani neměli. (V případě součinu 6×6 odpočítáme 7 prstů a zbývající tři prsty neuvažujeme).

Dále skrčíme 4. prst (levý ukazováček). Vlevo od skrčeného prstu čteme počet desítek (počet natažených prstů), vpravo od skrčeného prstu čteme počet jednotek (počet natažených prstů) mezivýsledku. Konečný výsledek dostaneme, když od tohoto mezivýsledku ještě odečteme číslo, které je součinem dvou činitelů. Jedním z nich je údaj, o kolik je číslo 9 větší než vedoucí číslo, druhým je počet desítek mezivýsledku, tedy znovu počet natažených prstů, které jsou vlevo od skrčeného (levého ukazováčku). V případě součinu 7×4 tedy od 34 odečítáme 2×3, protože číslo 9 je o dvě větší než 7 a v mezivýsledku jsou 3 desítky; $34 - 6 = 28$. Zapišme nyní přehledně jednotlivé kroky algoritmu:

$\mathbf{7 \times 4 =}$

a) Větší z činitelů (vedoucí číslo) je 7.
b) Pracujeme s $7 + 1$ prsty, schováme všechny prsty vpravo od 8. prstu, tedy pravý malíček (10. prst) i pravý prsteníček.
c) Skrčíme 4. prst.
d) Počet prstů vlevo od skrčeného levého ukazováčku (3) čteme jako počet desítek mezivýsledku, tři desítky, tedy třicet.
e) Doplníme počet jednotek mezivýsledku, což je počet natažených prstů vpravo od prvního skrčeného (4), tedy mezivýsledek je 34.
f) Od mezivýsledku 34 odečteme součin $(9-7) \times 3 = 6$. Prvním činitelem je rozdíl čísla 9 a vedoucího čísla, druhým činitelem je počet desítek mezivýsledku.
g) Výsledek je $34 - 6 = 28$.

Všimněme si, že podle tohoto algoritmu pracuje i shora zmíněný algoritmus násobení čísla 9 (v tomto případě od mezivýsledku nic neodečítáme, protože vedoucí číslo je 9, takže první z činitelů v bodě f) by byl 0). Násobit $8 \times k$ v rámci malé násobilky ($k \leq 8$) pak znamená pracovat s devíti prsty, skrčit k-tý prst a rovnou „vyčíst“ výslednou operaci: $8 \times 4 = 35 - 3$. Zde je $9 - 8 = 1$, takže odečítáme přímo jen počet desítek (počet prstů vlevo od skrčeného).

V algoritmu je skryta následující identita

$$m \cdot n = 10(m-1) + (n+1-m) - (9-n)(m-1). \tag{1}$$

Tato identita platí pro všechna reálná čísla, tím spíš pro čísla přirozená, která jsou při počítání na prstech modelována pomocí prstů. Modelování na prstech, tak jak bylo popsáno výše, vyžaduje navíc podmínku $m \leq n$.

Pro učitele je zajímavé, že jednotlivé výrazy v identitě mají v modu násobení na prstech při nutné podmínce ($m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$) konkrétní význam:

$n+1$	počet prstů, se kterými pracuji,
$m-1$	počet natažených prstů vlevo od skrčeného,
$n+1-m$	počet natažených prstů vpravo od skrčeného,
$9-n$	vzdálenost obrazu vedoucího čísla n od obrazu čísla 9 na číselné ose pro $n < 10$,
$n-9$	vzdálenost obrazu vedoucího čísla n od obrazu čísla 9 na číselné ose pro $n \geq 10$ (viz část o rozšíření algoritmu).

Rozšíření algoritmu

Vzhledem k tomu, že identita (1) platí pro libovolná přirozená čísla, nemusíme se při použití uvedeného algoritmu omezovat jen na malou násobilku. Máme-li součin $m \cdot n$, kde $m \leq n$, $n \geq 10$, stačí si představit, že máme $n+1$ prstů, a algoritmus funguje. Například při součinu 3×13 potřebujeme 14 prstů. Protože je nemáme, tak si je na chvíli od někoho vypůjčíme, nebo vše řešíme pomocí čtrnácti čárek na papíru.

Jediné úskalí při počítání na prstech více než jedné princezny ve srovnání s postupem popsaným výše může nastat při operaci popsané v bodě f). Pomineme-li triviální případ $m = 1$, pak pro $m \neq 1$ a pro $n \geq 10$ odčítáme záporné číslo $z = (9-n)(m-1)$, což provedeme tak, že přičteme jeho absolutní hodnotu.

Vzhledem k tomu, že ve vzorci (1) platí pro poslední výraz

$$-(9-n)(m-1) = (n-9)(m-1),$$

lze rovnost (1) zapsat ve tvaru

$$m \cdot n = 10(m-1) + (n+1-m) + (n-9)(m-1), \tag{2}$$

který je pro $n \geq 10$ výhodnější (vyhneme se odčítání záporného čísla od mezivýsledku).

Vraťme se k součinu 3×13 a představme si 14 prstů, z nichž třetí je zahnutý, tj. vlevo od něj jsou dva a vpravo je zbývajících 11 prstů:

I I C I I I I I I I I I I I

Výpočet podle zobecněného algoritmu a vzorce (2) nám pak dává

$$3 \times 13 = 2 \times 10 + 11 + (13-9) \times 2 = 39.$$

Závěrečná poznámka

K objevu algoritmu násobení pomocí prstů i k jeho zobecnění dospěl druhý z autorů tohoto příspěvku (žák gymnázia), který znal algoritmus násobení na prstech pro číslo 9. V podstatě tedy jde o rozšíření výše zmíněného algoritmu násobení devíti. Dlužno dodat, že tomuto výsledku a procesu objevování předcházelo též detailní obeznámení se s algoritmem čínského násobení i s jinými postupy. Náš algoritmus vzešel z heuristického přístupu k řešení konkrétních příkladů (stejně tak zřejmě vznikaly i historické algoritmy), algebraických znalostí přitom autor nevyužil. Pro další zobecnění byl důležitý nápad nespokojit se pouze s násobením do 10×10 pomocí prstů na ruce, ale rozšířit násobení na libovolně velká čísla. Bylo to právě použití čárek na papíru, které umožnilo udělat kvalitativní zdvih – zobecnění pro všechna přirozená čísla. Prostředí objevování bylo doprovázeno emočním vzrušením a radostí, což je vždy příjemnou stránkou tvůrčí činnosti.

L i t e r a t u r a

[1] *Balková, L., Škarda, Č.*: Násobíme chytře? Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. roč. 57 (2012), č. 3.
Dostupné na: http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~balkolub/papers/PokrokyNasobeni.pdf

[2] Čínské násobení. Dostupné na: http://bimbo.fjfi.cvut.cz/~soc/Nasobeni_papir/cinske_nasobeni_graficke.html.
[3] Fast MathTricks – How to multiply 2 digit numbers up to 100 – the fast way! Dostupné na: http://www.youtube.com/watch?v=PYrgjMubh-c.
[4] Secret of Fast Math revealed. [Online] Dostupné na: http://www.glad2teach.co.uk/fast_maths_calculation_tricks.htm.
[5] Secret Trick: Math Division Long. Can you mentaly divide... Dostupné na: http://www.youtube.com/watch?v=IIwlBjNLpjI.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 10. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 205

Je dán pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D. Označme K, L, M po řadě středy jeho hran BC, CA, AB. Dokažte, že součet velikostí tří úhlů ve stěnách při vrcholu D čtyřstěnu $KLMD$ je 180°.

Jaroslav Švrček

Úloha 206

Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna čísla $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$xf(x) = xf\left(\frac{x}{y}\right) + yf(y).$$

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 199 a 200, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle loňského (22.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 199

Největší společný dělitel přirozených čísel a, b, c je 1. Dokažte tvrzení: Jsou-li

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{bc}{a}, \quad \frac{ca}{b}$$

celá čísla, pak jsou druhými mocninami vhodných přirozených čísel.

Ján Mazák

Řešení. Nechť p je libovolné prvočíslo, které dělí nejmenší společný násobek n čísel a, b a c. Protože p není současně dělitelem všech čísel a, b a c, předpokládejme bez újmy na obecnosti, že není dělitelem např. čísla c. Nechť p^k je nejvyšší mocnina prvočísla p, která dělí a a p^l (k, l jsou celá nezáporná čísla) nejvyšší mocnina p, která ještě dělí b. Protože bc/a je celé číslo, platí $k \leq l$, a analogicky, protože ca/b je celé číslo, je $k \geq l$, tedy $k = l$, a tudíž žádné z čísel bc/a, ca/b není dělitelné p. Proto je celé číslo ab/c dělitelné číslem $p^k p^l = (p^k)^2$ a není současně dělitelné žádnou vyšší mocninou prvočísla p. Stejnou úvahu lze provést pro libovolné prvočíslo, které dělí n. Vzhledem k tomu, že jiná prvočísla nedělí žádné z čísel ab/c, bc/a, ca/b, je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. Jelikož ab/c je přirozené číslo, existují přirozená čísla m a n tak, že platí $c = mn$, $m \mid a$, $n \mid b$. Nechť k a l jsou taková přirozená čísla, že platí $a = km$, $b = ln$. Protože největší společný dělitel čísel a, b a c je 1, jsou nesoudělná jak čísla k a n, tak i čísla l a m. Čísla $bc/a = n^2 \cdot (l/k)$ a $ca/b = m^2 \cdot (k/l)$ jsou celá, tedy k dělí l a l dělí k, proto $k = l$ a platí $a = km$, $b = kn$ a $c = mn$. Odtud již

$$\frac{ab}{c} = k^2, \qquad \frac{bc}{a} = n^2, \qquad \frac{ca}{b} = m^2,$$

což jsme chtěli dokázat.

Správná řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Markéta Calábková*, *Petr Vincena* a *Marian Poljak*, všichni z GJŠ v Přerově, *Antonín Češík* ze SPŠE v Pardubicích, *Jan Krejčí* z GMK v Bílovci, *Karolína Kuchyňová* z GML v Brně, *Tomáš Lysoněk* z G v Uherském Hradišti, *Milan Pultar* z GJK v Praze 6, Parléřova, *Martin Raszyk* z G v Karviné, *Jan Šorm* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Pavel Turek* z G v Olomouci–Hejčíně a *Martin Zahradníček* z G ve Šlapanicích.

Neúplné řešení zaslal *Viktor Němeček*, žák Gymnázia Jihlava.

Úloha 200

Pro komplexní číslo z platí

$$z + \frac{1}{z} = -1.$$

Určete

$$z^{2013} + \frac{1}{z^{2013}}.$$

Stanislav Trávníček

Řešení. Zřejmě $0 \neq z \neq 1$. Rovnici

$$z + \frac{1}{z} = -1$$

vynásobíme číslem z a upravíme na tvar

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Vynásobíme obě strany poslední rovnice číslem $z-1$, dostaneme $z^3-1 = 0$, tj. $z^3 = 1$. Tedy z je komplexní třetí odmocnina z čísla 1, platí

$$z^{2013} = \left(z^3\right)^{671} = 1^{671} = 1,$$

a odtud

$$\frac{1}{z^{2013}} = 1.$$

Platí tudíž

$$z^{2013} + \frac{1}{z^{2013}} = 1 + 1 = 2.$$

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Filip Bialas* z G Opatov v Praze 4, *Markéta Calábková* a *Marian Poljak*, oba z GJŠ v Přerově, *Antonín Češík* ze SPŠE v Pardubicích, *Ondřej Hübsch* z G v Praze 6, Arabská, *Lukáš Knob* z G v Kojetíně, *Matěj Konečný* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova 8, *Jan Krejčí* z GMK v Bílovci, *Tomáš Lysoněk* z G v Uherském Hradišti, *Viktor Němeček* z G v Jihlavě, *Martin Raszyk* z G v Karviné, *Jakub Svovoda* z G v Havířově, Komenského, *Pavel Turek* z G v Olomouci–Hejčíně,

Neúplné řešení zaslali: *František Jáchim* z Volyně a *Jan Šarman* z GMK v Bílovci.

Pavel Calábek

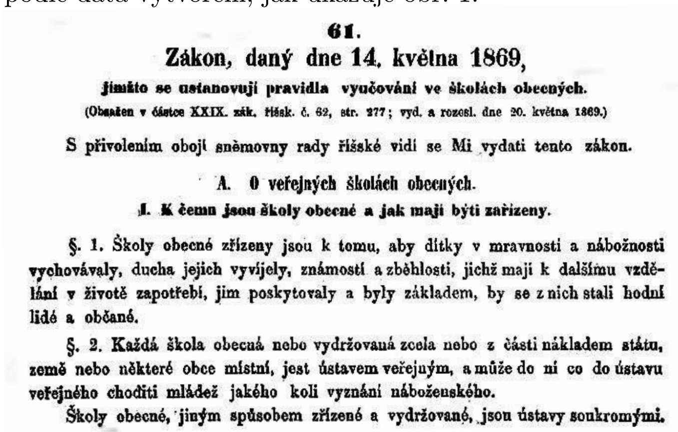
FYZIKA

Přírodozpyt jako vyučovací předmět mezi lety 1869 a 1939

BOHUMILA KROUPOVÁ – BOHUMIL VYBÍRAL

Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové

Pro učební osnovy a učebnice vyučovacích předmětů má velký význam, jak je organizováno školství, v jakých ročnících se daným předmětům vyučuje a jaká je hodinová dotace. České školství prošlo mnohými změnami, často docházelo ke střídání osmileté a devítileté povinné školní docházky především po druhé světové válce. O organizovaném školství, tak jak je známé dosud, se mluví již od vydání velkého říšského zákona 14. května 1869. V té době byl ministrem „kultu a vyučování“ *Leopold Hasner*. Zákon proto bývá někdy označován za „Hasnerův zákon“, nebo „květnový zákon“ podle data vytvoření, jak ukazuje obr. 1.



61.

Zákon, daný dne 14. května 1869,

jimžto se ustanovují pravidla vyučování ve školách obecných.

(Obsažen v částce XXIX. zák. říšsk. č. 62, str. 277; vyd. a rozesl. dne 20. května 1869.)

S přivolením obojí sněmovny rady říšské vidí se Mi vydati tento zákon.

A. O veřejných školách obecných.

I. K čemu jsou školy obecné a jak mají býti zařízeny.

§. 1. Školy obecné zřízeny jsou k tomu, aby dítky v mravnosti a nábožnosti vychovávaly, ducha jejich vyvíjely, známostí a zběhlosti, jichž mají k dalšímu vzdělání v životě zapotřebí, jim poskytovaly a byly základem, by se z nich stali hodní lidé a občané.

§. 2. Každá škola obecná nebo vydržovaná zcela nebo z části nákladem státu, země nebo některé obce místní, jest ústavem veřejným, a může do ní co do ústavu veřejného choditi mládež jakého koli vyznání náboženského.

Školy obecné, jiným spůsobem zřízené a vydržované, jsou ústavy soukromými.

Obr. 1: „Hasnerův zákon“ [12]

Uvedeným zákonem bylo zřízeno několik nových institucí – osmileté *školy obecné a městské* a *učitelské ústavy* pro přípravu učitelů na obecných a měšťanských školách. Zákon významným způsobem rozšířil obsah vzdělávání a zavedla se osmiletá školní povinnost. Obecné školy se členily na *obyčejné školy obecné* a *měšťanské školy*. Měšťanské školy existovaly jako osmileté nebo tříleté samostatné (byly spojené s pětiletou obecnou školou). Pro žáka, který nechtěl dále pokračovat ve studiu, byla nejvhodnější obecná škola. Vyšší úroveň měla škola měšťanská, která připravovala žáky pro praxi (průmysl, zemědělství) nebo pro studium na odborných školách i učitelských ústavech. Předměty vyučované na obecných i měšťanských školách také definuje zákon z roku 1869, jak je ukazuje obr. 2 a 3.

1. O obyčejných školách obecných.

§. 3. Na každé škole obecné vyučováno buď alespoň těmto předmětům, totiž:

náboženství,
jazyku,
počtům,
tomu, čeho nejvíce potřebí věděti z přírodovědy, ze zeměvědy a historie, zvláštní zřetel majíc k vlasti a ústavě vlastenské,
psání,
nauce o formách geometrických,
zpěvu, a
tělocviku.

Obr. 2: Předměty vyučované na obecné škole [12]

§. 17. Školy měšťanské zřízeny jsou k tomu, aby poskytovaly těm, kteří nechodí do školy střední, vzdělání vyššího, nežli jest to, jehož dojíti mohou na obyčejné škole obecné.

Na těchto školách vyučovati se má těmto předmětům:
náboženství,
jazyku a písemnostem,
zeměpisu a dějepisu, zvláštní zření majíc k vlasti a ústavě vlastenské,
přírodopisu,
přírodozpytu,
aritmetice,
geometrii,
vedení kněh,
kreslení od ruky,
kreslení geometrickému,
krasopisu,
zpěvu a tělocviku;

Obr. 3: Předměty vyučované na měšťanské škole [12]

Po vzniku Československa zůstalo školství beze změn až do roku 1922, kdy byl vydán „Malý školský zákon“, byly provedeny dílčí změny a zavedena osmiletá školní docházka po celém území republiky. Délka školní docházky a její charakter byl závislý na zřizovatelích a byl stejný jako od roku 1869.

V druhé polovině 19. století se přírodní vědy dělily do dvou skupin: na popisné, mezi něž patřil *přírodopis* (zahrnoval mineralogii, zoologii, botaniku, morfologii), a na „zpytovací“ – *přírodozpyt*, zahrnující fyziku, astronomii, elektrotechniku, chemii, fyziologii. Přírodozpyt ve školní praxi je název vyučovacího předmětu, který byl na českých školách vyučován až do 40. let 20. století. Jako vyučovací předmět byl přírodozpyt zaveden do škol až po vydání zákona ze 14. května 1869 a obsahoval jednak *silozpyt* (fyziku) a *lučbu* (chemii). Cíl přírodozpytného učiva byl určen řádem školním a vyučovacím v roce 1870, nařízením jednotlivých zemských rad školních byl určen rozsah učiva, byly vydány nové učebnice, pořízeny vhodnější pomůcky. Součástí přírodozpytu byla také technologie, kde se žáci učili o výrobě potravin (cukru, mouky, piva), o výrobních materiálech (oceli, porcelánu, skla, papíru). Tím mnozí žáci po skončení obecné nebo měšťanské školy dostali jistou minimální kvalifikaci pro práci v dílnách, živnostech, továrnách, na statcích. Na druhém sjezdu učitelstva československého ze dne 18. srpna 1871 byly přijaty návrhy, jako např.: „Z fysiky vyučováno budiž jen tomu, čeho k výkladu důležitých úkazů přírodních potřeba jest věděti, a co v životě praktickém při zacházení se stroji rozličnými výhody poskytovati může. Budiž však vyloučeno vše matematické, hravé a složité. Z lučby vykládáno budiž, co přístupno chápavosti dětské a čeho potřebí jest věděti porozumění nejobyčejnějších výjevů v přírodě, hospodářství, zahradnictví a jiných živnostech.“ ([13], str. 449).

Mezi přední autory metodické literatury přírodozpytu patřili *Josef Harapat*, *Dr. Otakar Kriebel*, *Filip Stanislav Kodym*, *Jan Hroník*, *Eduard Stoklas*, *Rudolf Sokol*. Většina autorů ve svých pracích navazuje na práce německého pedagoga *Adolfa Diesterwerga*, který kladl důraz na názornost a aktivnost při vyučování. Učebnice přírodozpytu, které byly napsány, byly určeny zvlášť pro obecné školy, zvlášť pro měšťanské školy, někdy byly určeny pro oba dva druhy školy, a pak záleželo na učiteli, jaké učivo si vybere. Mezi autory učebnic přírodozpytu je nutné zařadit *Jana Duchoslava Panýrka*, *Jana Pastejříka*, *Mikuláše Hofmanna*, *Emanuela Lemingera*, *Stanislava Petíru*, *Josefa Gregora*, *Václava Rošického*, *Emila Berku*, *Metoděje Ostrého*, *Ferdinanda Tomana*, *Josefa Hanuše* nebo *Václava Horáka*.

Zajímavé je, z jakých oblastí fyziky a chemie byly zkoušeni adepti na učitele. Např. při zkouškách r. 1871: „1. Udejte nejznámější prameny tepla, vysvětlete vodivost tepla, působení jeho ve hmoty a objasněte na příkladech, jakou důležitost má vodivost tepla v životě obecném. 2. Jak se odvozuje enharmonická a chromatická stupnice tonův? 3. Vyložiti uhlovodíky a vypsati stručně, kterak se vyrábí světelný plyn ve velkém.“ ([13], str. 308)

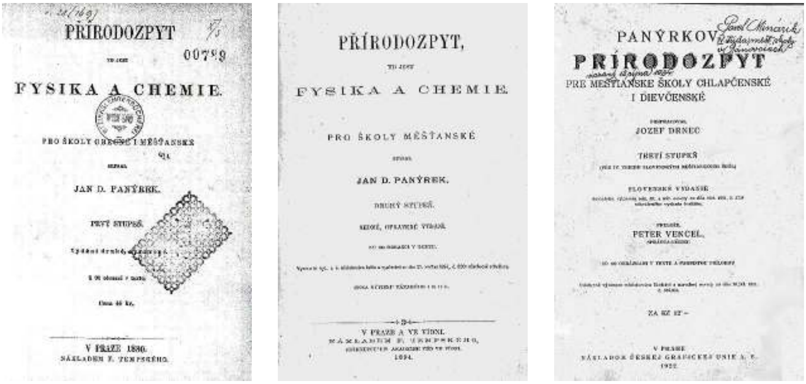
Přírodozpyt jako předmět v sobě zahrnoval předměty dnes známé jako fyzika a chemie. I tímto způsobem tak mohly být naplněny mezipředmětové vztahy. Žáci neoddělovali oba předměty, některé výklady fyzikálních veličin, jako např. hustoty, byly zařazeny do chemické části učebnice. Učitelé se snažili (a byli k tomu i vedeni inspektory), aby prohlubovali mezipředmětové vztahy, a to nejen mezi fyzikou, chemií a matematikou, ale i mezi ostatními předměty. Jak použít přírodozpytné učivo zdůraznili i *Ladislav Holý* a *Vladislav Černý* v knize *Podrobná příručka k učebným osnovám pro školy obecné*: „Jako i v jiných předmětech nesmíme ani v přírodozpytu přehlédati snahy po koncentraci učby a získávati tak z jednoho předmětu látku pro ostatní předměty a těmito zase podporovati učbu původní. Mluvní cviky a slohová cvičení mohou přímo čerpati z přírodozpytných výkladů ať rozhovorem o vykonaném pokusu nebo popisem přístroje a líčením jeho užití. Celá fysika, zejména mechanika svým bohatým číselným materiálem jest vděčnou zásobárnou pro počty, propočítáním fysikálních příkladů osvěžíme hodiny počtů a doplňujeme porozumění fysikálním principům. Meteorologická pozorování a záznamy poskytnou zajímavých úloh z rýsování. Ani kreslení nevychází u fysiky na prázdno, znalost zákonů o stálosti polohy, umístění těžiště jest pevnou oporou kreslení kombinačního a dekorativního, čemuž prospívá i nauka o barvách, zobrazování fyzikálních přístrojů a znázorňování různých stupňů pokusu jest cenný materiál kreslení podle jevu. Psaní opakuje fysikální učbu opisováním fyzikálních zákonů a jmen vynálezců. Zpěv jako nauka o tónu a tělocvik jako nauka o pohybu úzce souvisí s přírodozpytem.“ ([4], str. 19).

Výběr učebnic a přírodozpytného učiva se řídil především učebními osnovami. Ty byly pro obecné a měšťanské školy odlišné – učivo obecných škol bylo méně obsáhlé a jednodušší. Jedny z nejstarších osnov pocházejí z roku 1885, vyšly pod názvem *Normální učebné osnovy pro obecné školy na Moravě*, a jak název napovídá, byly určeny pro obecné školy. Obecné školy mohly být jednotřídní až osmitřídní, a právě podle toho, kolika třídní byly, řídil se výběr učiva. Osnovy měšťanských škol byly sepsány jiným způsobem, učivo bylo rozděleno na I., II. a III. stupeň.

V osnovách pro měšťanské školy byl mj. začleněn úkol: „Učiti žatstvo, kterak má přírodní jevy pozorovati a posuzovati a kterak chápati obecně důležité vynálezy a technická zařízení soudobého života. Seznamovati žatstvo s nejdůležitějšími fysikálními a chemickými pojmy a zákony, zejména s těmi, jichž je třeba k porozumění fysikálním a chemickým dějům, které se vyskytují v denním životě, v technické praxi a ve volné přírodě." ([5], str. 17).

Jak již bylo řečeno, učebnice přírodozpytu pro měšťanské a obecné školy spojovaly učivo silozpytu a lučby. Učivo bylo rozvrženo do 3 ročníků jak v obecné škole, tak ve škole měšťanské. Učivo chemie se dále členilo na chemii ústrojnou a neústrojnou (anorganickou a organickou). Učivo chemie navíc bylo obvykle uspořádáno tak, že v jednom roce byla probrána chemie obecná a anorganická a v dalším roce chemie organická. Dalším zajímavým jevem je, že, na rozdíl od fyziky, chemie není v dalších ročnících probírána znovu a důkladněji a obšírněji, jak je typické pro fyziku. Osnovy přírodozpytu se v průběhu let příliš neměnily, přibyly pouze některé kapitoly z atomistiky, konkrétně radioaktivita, která se vyskytla v osnovách v roce 1939. Ve všech učebnicích je proto možné najít učivo: Hmoty pevné, kapalné, plynné a jejich všeobecné vlastnosti, Základní pojmy o teple, zdroje a vodiči tepla, teploměr, větrání, vytápění a osvětlování obydlí, oheň, vod, vzduch, tlakoměr, počasí, Základní jevy magnetické a elektrické, bouřka, ochrana proti blesku, Vznik a šíření zvuku a světla. Zvučící tělesa, šíření světla, odraz, lom a rozklad světla. Mluvení, slyšení a vidění, Elektřina galvanická a indukční, její užití (telegraf, elektrický zvonek, telefon), Jednoduché stroje. Základní pojmy z mechaniky hmot tuhých, kapalných a vzdušných. Vždy byl kladen důraz na praktické využití přírodozpytných poznatků, na pozorování a pokus, mělo se probírat učivo tak, aby žáci poznali aplikace v průmyslu a hospodářství. Na vesnici měly být v popředí jevy hospodářské a v domácnosti. Naopak žáci ve městech měli být více vzdělávání pro průmysl.

Učebnice pro měšťanské školy psali především Mikoláš Hofmann, Emanuel Leminger, Jan Duchoslav Panýrek, Jan Pastejřík, Václav Rošický, Stanislav Petíra, Josef Gregor. Učebnice Jana Duchoslava Panýrka vznikly na konci 19. století. Tento autor napsal i učebnici pro 4. třídu, tedy pro žáky, kteří chtěli studovat na učitelských ústavech či odborných školách. Učebnice se vyznačují pěknými ilustracemi. Obálky Panýrkových učebnic ukazuje obr. 4. Další učebnice byly podobné.


PŘIRODOZPYT
FYSIKA A CHEMIE.
JAN D. PANÝREK.
V PRAZE 1880.
NÁKLADEM F. TEMPSKÉHO.

PŘÍRODOZPYT,
FYSIKA A CHEMIE.
PRO ŠKOLY MĚŠŤANSKÉ
JAN D. PANÝREK.
V PRAZE A VE VÍDNI.
1894.

PANÝRKOV
PRÍRODOZPYT
PRE MEŠTIANSKE ŠKOLY CHLAPČENSKÉ
I DIEVČENSKÉ
JOZEF DRNEC
PETER VENCEL

Obr. 4: Panýrkovy učebnice

Jako první je na obr. 4 Panýrkova učebnice *Přírodozpyt to jest fysika a chemie pro školy obecné i měšťanské*, prvý stupeň, vydáno v Praze 1880. Učebnice má 88 stran a výběr učiva byl dán učebnými osnovami nařízenými ministerstvem kultu a vyučování dne 18. května 1874. Učebnice je určena pro 1. třídu měšťanských škol, pro 5. třídu šestitřídních obecných škol a pro 6. třídu sedmitřídních a osmitřídních obecných škol. Autor v předmluvě říká: „Příkladem v přírodozpytu což jest jiného než pokus neb vlastní zkušenost žákova, cvičiva pak poskytují četné úlohy, dílem početní, dílem spekulativné, jež řeší žáci buď sami, buď pomocí učitelovou a to ústně i písemně.“ ([16], str. 1) V učebnici se nachází také výpočtové příklady, nejsou však zavedeny žádné vzorce. Vše jde vypočítat pomocí pouček a logického uvažování. Ze zajímavých definic je možné zmínit: „Velikost prostoru, který věcí nějakou jest zaujat, slove se objem“ ([16], str. 1). „Spojivost je síla, kteráž mezi částicemi sousedními působíc je v celek spojuje a spojivostí sluje“ ([16], str. 3), „Tlak na podporu nazýváme váhou těla“ ([16], str. 4). Hmotnost byla známá pod pojmem váha, a byla přirovnávání k hmotnosti vody o určitém objemu: „gram jest váha čisté vody, která se vejde do kostkového centimetru, 1 000 gramů slove kilogram“ ([16], str. 4). Hustota, tak je známa v současnosti, měla jiný význam. Bylo to bezrozměrné číslo, které udávalo, kolikrát je těleso těžší než voda o stejném objemu. Význam dnešní hustoty měla veličina měrná váha, která udávala, jakou hmotnost má 1 cm^3 nebo 1 dm^3 látky.

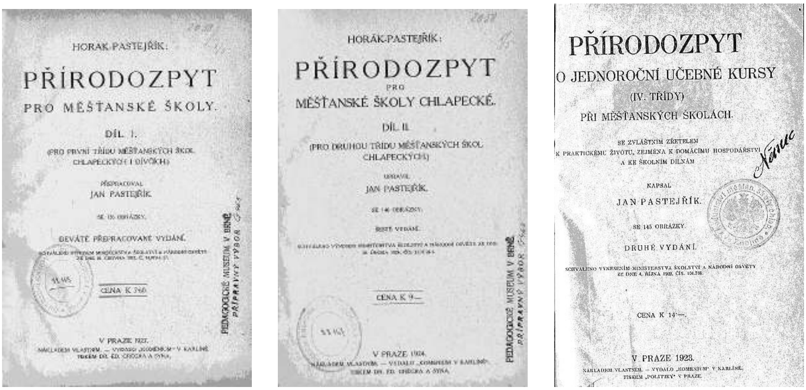
Běžnou součástí kapitol o teple bylo vysvětlení a používání obou teplotních stupnic, Celsiovy a Réamurovy. V kapitole o elektřině se vyskytuje také velmi zajímavá informace: „Rychlosť, s kterou se těmito dobrými vodiči električnost rozšiřuje, jest nad pomyšlení veliká, urazíť elektřina v měděném drátu 1,7 mm tlustém přes 450 000 000 m za vteřinu.“ ([16], str. 60). V textu se neobjevují názvy fyzikálních zákonů po jejich objevitelích (Archimedes, Pascal, Newton, ...).

Další učebnice, určená pro druhý stupeň školy měšťanské, obsahuje podobné názvy kapitol jako předchozí učebnice. Chemie tvoří přibližně 22 % učiva. V kapitole o teple je zajímavá definice skupenského tepla tání, která by možná i dnešním žákům byla srozumitelnější než současná: „Aby 1 kg ledu o 0° obrácen byl ve vodu téže teploty 0°, potřebí jest tolik tepla, že by se jím 1 kg vody z 0° na 80° ohřál.“ ([17], str. 4). Skupenské teplo vypařování: „Teplem, kterého je třeba, aby se 1 kg vařící vody proměnil v páru taktéž 100° teplou, lze ohřáti 537 kg vody o 1°.“ ([17], str. 4).

V kapitole o elektřině lze najít zajímavé informace o galvanických článcích jako je Voltův, Smeeovův, Danielův, Meidingerův, Bunsenův, Grenetův článek. O elektrických svítilnách, lučebných (chemických) účincích proudu a o galvanoplastice, což byl starý název pro galvanické pokovování. Zároveň je velmi zajímavé, že rychlost se neuvádí v metrech za sekundu nebo kilometrech za hodinu jak je zvykem dnes, ale pouze v metrech nebo kilometrech. Žáci počítali rychlost, dráhu a čas podle pouček: „Dráhu při pohybu rovnoměrném vypočteme, násobíce rychlost časem. Čas vypočteme dělíce dráhu rychlostí. Rychlost vypočteme dělíce dráhu časem.“ ([17], str. 39). Samozřejmě ani, jak se dá čekat, jednotka práce není joule, ale kilogrammetr, což je práce potřebná k vyzdvižení 1 kg do výšky 1 m. Jednotkou výkonu byla koňská síla: „Síla koňská činí 75 kilogramometrů, tj. 75 kg vyzdvižených za vteřinu do výše 1 m.“ ([17], str. 40).

V každé učebnici inspirované Janem Duchoslavem Panýrkem je zmiňována Réamurova a Celsiova stupnice, jaké mezi nimi platí převodní vztahy a učebnice také obsahují definici skupenského tepla tak, jak ji zavedl právě J. Panýrek. V případě učebnice autora Josefa Drnce je definice skupenského tepla poněkud zvláštní. Je otázka, jestli autor špatně pochopil originál, nebo je definice správně, tedy v duchu tehdejšího vyjadřování jednotek: „... množství tepla, potřebného k roztavení 1 kg pevné látky (ledu) na tekutinu (vodu), nazývá se skupenská teplota.“ ([18], str. 51) Na rozdíl o jiných učebnic Drncova učebnice obsahuje poznámky o gravitaci, Keplerovy zákony, popis vodních motorů, obilního mlýna, parostroje, druhy energie a její přeměny. Celá učebnice je doplněna o význam přírodozpytu pro lidstvo: „Ze znalosti chemie a fyziky těží celé odvětví průmyslové, poskytujíc zaměstnání tisícům vzdělanců a pracovitých rukou, jako výrobky z kamene, zemin, porcelánu, skla, výroba kovů, kovového zboží a strojů, zpracování dřeva, kůží a výrobků z kůže, výrobě kyselin a barev, papírnictví, pivovarnictví, lihovarnictví, škrobařství, cukrovarnictví, barvířství. Pátravý duch lidský vynalézá stroje, které konají všechnu práci samostatně a nezávisle na vůli pracovníka, nové stroje zužitkují suroviny bez jakýchkoliv odpadů, ty poznají jen výrobu hlavní a vedlejší.“ ([18], str. 117)

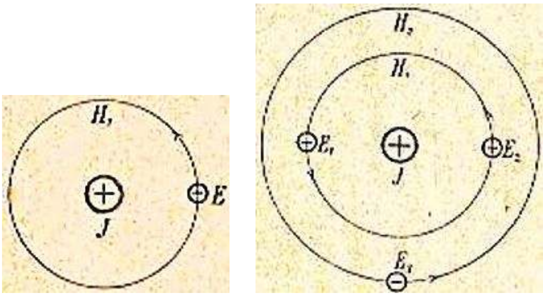
K dalším autorům přírodozpytných učebnic je nutné zařadit Mikuláše Hofmanna a Emanuela Lemingera. Ti jsou také autory učebnice pro měšťanské školy, třetí stupeň. Učebnice vyšla v roce 1898. V učebnici se vyskytuje definice tepla mírně odlišná od Panýrkovy učebnice. „Jednotkou pro měření tepla bylo zvoleno množství tepla, jehož je třeba, aby 1 kg vody čisté byl zahřát o 1 °C, jednotka tato jmenuje se kalorie (teplina). Aby 7 kg vody bylo zahřáto o 1 °C, je třeba 7 kalorií, aby 1 kg vody byl zahřát o 15 °C, je třeba 15 kalorií.“ ([19], str. 2). Pro vysvětlení, jakou rychlostí padá volné těleso, je v učebnici podobný postup jako v jiných učebnicích. Žáci prováděním pokusů a z nich vyvozenými slovními poučkami by měli být schopni vypočítat dráhu při volném pádu. Vyvozená poučka má znění: „Dráhy tělesem padajícím proběhnuté, pokaždé od začátku pohybu měřené, rostou jako čtverec dob uplynulých. Tělesu padajícímu přibývá rychlosti, jako přibývá času.“ ([19], str. 45).



Obr. 5: Přírodozpyt pro měšťanské školy o Jana Pastejříka

Další kolekci učebnic pro obecné a měšťanské školy napsal Jan Pastejřík (obr. 5). V kapitole O vlastnostech hmot se objevuje termín prostornost, který se dnes nepoužívá. Prostornost je tvar těles. Autor zavádí pojem těleso a jeho vlastnosti (délka, plocha, objem), zavádí pojem skupenství hmot, neprostupnost, pórovitost. V učebnici se nevyskytuje pojem tělo, jak tomu bylo v Panýrkově přírodozpytu. Kapitola také obsahuje definici, která je vzhledem k roku vzniku zajímavá: „Částečky hmoty, kterých nelze dále děliti žádným fysikálním prostředkem, slovou se molekuly“. ([20], str. 4) Soudržnost „je síla, která drží molekuly pohromadě. Jeví se pouze u hmot tuhých a u kapalin. Plyny jsou rozpínavé“ ([20], str. 8).

Chemická neboli lučebná část učebnice poskytuje základní úvodní informace z chemie. V textu je zařazena i informace o počtu prvků. V roce 1926 bylo známo 86 prvků (z dnešních 92), jak je dále napsáno: „. . . je však docela možné, že se podaří objeviti ještě jiné, nebo snad rozložiti některé z dosavadních (Pak se ovšem přestanou pokládati za prvky). Domníváme se, že molekuly prvků jsou složeny z částeček ještě menších, jmenujeme je atomy.“ ([20], str. 16). Rok 1926 a Jan Pastejřík vnesl do učebnic i myšlenku o stavbě atomu: „Co je elektřina, dosud nevíme. Je však pravděpodobná domněnka, že každý atom je složen z jádra nabitého kladnou elektřinou a z nesmírně drobných, záporně nabitých elektronů, které obíhají kolem jádra v různě odlehlých drahách.“ ([20], str. 61). Je zde také vyobrazen model atomu, který je znázorněn na obr. 6.



Obr. 6: Model atomu ([20], str. 62)

Učebnice Václava Rošického, určená pro měšťanské školy, obsahuje velmi zajímavé pasáže o pevnosti těles, které by mohly mít uplatnění i v dnešních učebnicích. Nejen v tehdejší době by měla velkou platnost věta: „Staví-li se pavlače, zapouštějí se trámce pouze jedním koncem do zdi. Kdyby se rozložilo břímě stejnoměrně po celé délce, snesl by trám pouze čtvrtinu, a kdyby se pošinulo až na volný konec, snesl by pouze osminu váhy břemene, rozloženého původně stejnoměrně na trámu na obou koncích upevněném. Zkouškami bylo dokázáno, že pevnost závisí též na průměru a výšce sloupu nebo zdi. Je-li sloup anebo zeď o 2 krát, 3 krát, větším průměru, má 2 krát 3 krát, větší pevnost. Je-li sloup anebo zeď 2 krát, 3 krát, nižší je 2 krát 3 krát pevnější.“ ([10], str. 5). Jistě také překvapí věta, kterou znají žáci z učebnic o 100 let mladších, a její znění se nezměnilo: „U síly třeba znáti působiště, směr, velikost.“ ([10], str. 9).

Učebnice pro obecné školy byly jiné, než učebnice pro měšťanské školy. Jedny z nejstarších osnov pocházejí z roku 1885. Osnovy vyšly pod názvem Normální učebné osnovy pro obecné školy na Moravě, a jak název napovídá, byly určeny pro obecné školy. Obecné školy mohly být jednotřídní až osmitřídní a právě podle toho, kolika třídní byly, řídil se výběr učiva. V těchto osnovách se nevyskytoval pojem přírodozpyt, ale silozpyt. Silozpyt byl obsažen v předmětu reálie. Do reálií ještě patřil přírodopis a zeměpis. Podobně jako v dnešních osnovách byl i v tehdejších osnovách uveden cíl učiva: účel učiva. Účel silozpytu: „Známosť nejdůležitějších a nejjednodušších silozpytných a lučebných změn se zřetelem ku potřebám života a zjevům v přírodě“ ([2], str. 14). Pro pozdější ročníky bylo také důležité znát: „Co jest ze silozpytu nejpochopitelnější a nejvíce věděli hodno, při čemž jest míti zřetel k poměrům živnostním a místním a u děvčat k potřebám domácího hospodářství.“ ([2], str. 14). Učební osnovy přírodozpytu, vydané zemskou školní radou v roce 1915, již byly obsáhlejší a konkrétnější. Přírodozpyt se vyučoval 2 hodiny týdně v šesté, sedmé a osmé třídě. V cíli učiva bylo definováno: „Přírodozpytné učivo má buditi v žácích úctu k důležitým vynálezům, lásku k fysické i duševní práci a poučovati o velikém významu tvořivé práce ve službách národa a lidstva.“ ([4], str. 14).

O 17 let později, v roce 1932, byl počet vyučovacích týdenních hodin společně s přírodopisem stanoven na 3. Učivo bylo rozděleno na běh A, B a C, což odpovídalo 6., 7., a 8. ročníku obecné školy. Byl zde rovněž stanoven úkol přírodozpytného učiva: „Seznámiti žatstvo na podkladě pozorování a zkoumání přírodovědných jevů z denního života, z přírodního dění a z technické praxe lidské s nejdůležitějšími fysikálními a chemickými poznatky, pojmy a zákony, které by je naváděly těchto jevů si všímati a o nich správně usuzovati“. ([5], str. 51).

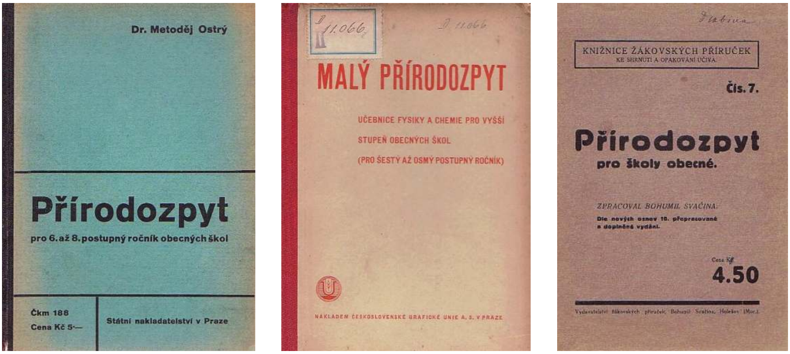
Pro porovnání s dnešními osnovami zařazujeme ukázku osnov v jednotlivých bězích A, B a C. Náplní šestého postupného ročníku (běh A) byly: „Základní fysikální a chemické pojmy a jevy. Obecné vlastnosti hmot. Chemická přitažlivost. Nejdůležitější prvky, sloučeniny a děje z neústrojné chemie.“ ([5], str. 52). V sedmém postupném ročníku (běh B) se mělo vyučovat: „Základní fysikální a chemické pojmy a jevy. Nejdůležitější poznatky z ústojné chemie. Vodní síla a její praktické užití. Magnetismus. Elektřina." ([5], str. 52). V osmém ročníku (běh C) bylo doporučeno probírat ročník: „Chemie denního života. Rovnováha a pohyb tuhých hmot. Zvuk a světlo." ([5], str. 52). Osnovy obecných škol byly až do roku 1939 velmi podobné, pouze v roce 1939 bylo doporučeno probírat už i radioaktivitu.

K jedněm z prvních učebnic přírodozpytu patří učebnice Přírodozpyt pro obecné školy od Dr. Jana Crügera, který do českého jazyku přeložil a vydal spolek učitelek v Praze. V této učebnici nebyly kapitoly seřazeny tak, jak doporučovaly osnovy, ale názvy jednotlivých kapitol jdou za sebou, aniž by bylo patrné, zda učivo patří například do kapitoly o teple, o magnetičnosti atd. Řazení kapitol vypadalo například následovně: Vodorovný povrch vody, Spojité nádoby, Vodomet, Přilnavost kapalin a věcí tuhých, Prolnavost, Vláskovitost, Galvanoplastika atd. Mnohé výrazy by byly dnešním žákům jistě nepochopitelné a možná i směšné [3]. Tato kniha se dá řadit k prvním systematickým pokusům o učebnice po roce 1869, kdy byla zavedena povinná školní docházka.

Další učebnicí ze stejné řady byl Přírodozpyt pro školy obecné, opět autora Dr. Jana Crügera z roku 1882. V předmluvě knihy je řečeno: „Dr. Jan Crüger razil cestu vyučování přírodozpytu novou cestou. Od příkladu k pravidlu, od úkazu k zákonu přírodnímu. Z pokusů uvedeny hlavně ty a takové, jež snadno lze provésti a k nimž si žák často sám potřebných přístrojů lehce zhotoviti může. Mimo to se hledělo k zvláštním potřebám dítek českých a jmenován je vedle Franklina také Diviš co vynálezce bleskosvodu." ([6], str. 1) Mezi další autory učebnic přírodopytu je nutné zařadit Bohumila Svačinu, Dr. Emila Berku, Medoděje Ostrého. Všechny učebnice mají společné to, že jsou zaměřeny spíše na obsah učiva, obsahují málo otázek a pokusů. Učebnice obsahují látku všech tří běhů (A, B, C) tak, jak je uvedeno v osnovách. Ukázky učebnic jsou na obr. 7.

Ve všech učebnicích pro obecné školy se prolíná učivo fyziky i chemie tak, jak předepisují osnovy a jak je to náplní všech učebnic přírodozpytu během téměř stoletého období existence předmětu přírodozpyt. Kromě spojení jmenovaných předmětů je v učebnici propagován i přístup k ručním a domácím pracím tak, aby si potřebné znalosti odnesli chlapci i děvčata. Samozřejmostí bylo také, že každá učebnice byla schválena výnosem ministerstva školství a národní osvěty, které vzniklo po roce 1918.

Učebnice *Malý přírodozpyt* od Emila Berky obsahovala různě obsáhlé kapitoly. Nejobsáhlejší kapitolou byla Elektřina, pomocník moderního člověka, která zaujímá 20 % učebnice a obsahuje popis přístrojů jako například žárovka obloukové lampy, elektromagnet, elektrický zvonek, telegraf, galvanoskop, galvanometr, telefon, transformátor, lékařské přístroje, telegraf aj. Celému učivu chemie je vymezeno jen 14 %. Součástí učebnice byla také, jako v ostatních typech učebnic, kapitola Povětrnost, což byla věda o počasí, kde se vysvětlovaly pojmy jako teplota vzduchu, tlak vzduchu, vítr, směr větru, rychlost větru, vlhkost, vodní srážky, vlhkoměry.



Obr. 7: Učebnice přírodozpytu pro obecné školy [7], [8], [9]

„Konkurencí“ učebnice E. Berky byla učebnice *Přírodozpyt pro 6. až 8. postupný ročník* od Dr. Metoděje Ostrého. Autor věnoval chemické části 35 % z celkového učiva, tradičně obsáhlá kapitola o elektřině zahrnovala 14 % učiva. Téměř ve všech učebnicích se vyskytuje popis telegrafu, telefonu, mikrofonu nebo lékařského induktoru. Další učebnici přírodozpytu napsal Bohumil Svačina, který je autorem více učebnic, které se liší učivem. V některých učebnicích přírodozpytu se objevuje chemické učivo, v některých naopak zcela chybí. Obsah je přesto dostačující pro žáky obecné školy, u kterých se nepředpokládalo další studium.

Závěr

Studium starých učebnic nás přesvědčuje o tom, že bychom měli považovat i historii za velkou učitelku didaktiky. Ve všech učebnicích pro měšťanské školy, méně pro obecné školy, je uvedeno množství příkladů, které by se daly použít i v dnešní době. Je podtržena role experimentu – jsou uvedeny návody na pokusy s jednoduchými pomůckami, proveditelné nejen ve škole, ale i doma. Toto téma by si zasloužilo hlubší rozbor a aktivaci vhodných příkladů a pokusů. Některé staré příklady jsou uvedeny ve sborníku „Jak získat žáky pro fyziku? – Vlachovice, 2013“.

Literatura

[1] *Crüger, J.*: *Přírodozpyt pro školy obecné.* Spol. učitelek, Praha, 1882.

[2] *Normální učebné osnovy pro obecné školy na Moravě.* K. Winkler, Brno, 1885.

[3] *Crüger, J.*: *Přírodozpyt pro obecné školy.* Spol. učitelek, Praha, 1877.

[4] *Holý, L., Černý, V.*: *Přírodozpyt: podrobná příručka k učebným osnovám.* J. Rašín, Praha, 1919.

[5] *Křivánek, J.*: *Normální učebné osnovy pro obecné (ľudové) školy: výnos ministerstva školství a národní osvěty ze dne 10. července 1933, č. 67.311/33-I.* Státní nakl., Praha, 1933.

[6] *Crüger, J.*: *Přírodozpyt pro obecné školy.* Spol. učitelek, Praha, 1882.

[7] *Ostrý, M.*: *Přírodozpyt pro 6. až 8. postupný ročník obecných škol.* Státní nakladatelství, Praha, 1936.

[8] *Berka, E.*: *Malý přírodozpyt, učebnice fyziky a chemie pro vyšší stupeň obecných škol.* Československá grafická unie, Praha, 1935.

[9] *Svačina, B.*: *Přírodozpyt pro školy obecné.* Holešov, 1931.

[10] *Rofšický, V.*: *Přírodozpyt čili fysika a lučba pro školy měšťanské: 2. stupeň.* A. Píša, Brno, 1900.

[11] *Konířová, M.*: *Fyzika: soupis učebnic fyziky ve sbírkách oddělení dějin školství Muzea Komenského v Přerově.* Muzeum Komenského, Oddělení dějin školství, Přerov, 2004.

[12] *Stehlík, M.*: Říšská sbírka zákonů. [Online] [Citace: 6. 8 2013] Dostupné z: http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/praf/ps09/dlibrary/web/rs.html

[13] *Beseda učitelská: týdenník pro učitele a přátele školství národního.* Beseda učitelská, Praha, 1869–1913 (1× týdně).

[14] *Harapat, J.*: *Silozpyt a lučba na všech stupních školy obecné a měšťanské.* A. Šašek, Velké Meziříčí, 1905.

[15] *Panýrek, J. D.*: *Přírodozpyt, t. j. silozpyt a lučba: učebnice pro měšťanské školy chlapecké.* 10. vyd., Unie, Praha, 1905.

[16] *Panýrek, J. D.*: *Přírodozpyt to jest fysika a chemie pro školy obecné i měšťanské.* F. Tempský, Praha, 1880.

[17] *Panýrek, J. D.*: *Přírodozpyt to jest fysika a chemie: pro školy měšťanské.* 8. vyd., zkrác. a opr., Tempský, Praha, 1897.

[18] *Panýrek, J. D., Drnec, J.*: *Panýrkův přírodozpyt pro měšťanské školy chlapecké.* 13. vyd., Unie, Praha, 1913.

[19] *Hofmann, M., Leminger, E.*: *Přírodozpyt pro měšťanské školy.* I. L. Kober, Praha, 1897.

[20] *Pastejřík, J.*: *Přírodozpyt pro jednoroční učebné kursy (IV. třídu) při měšťanských školách: se zvláštním zřetelem k praktickému životu, zejména k domácímu hospodářství a ke školním dílnám.* 2. vyd., Komenium, Praha, 1923.

[21] *Pastejřík, J.*: *Přírodopis pro měšťanské školy: pro třídy měšťanských škol chlapeckých i dívčích.* J. Pastejřík, Praha, 1934.
[22] *Pastejřík, J.*: *Přírodopis pro měšťanské školy: pro třídy měšťanských škol chlapeckých i dívčích.* J. Pastejřík, Praha, 1927.
[23] *Kriebel, O.*: *Jak učíme na škole měšťanské reáliím metodami pracovními: Přírodozpyt.* Československá grafická Unie, Praha, 1935, 1 sv. (přeruš. str.).

Radioamatérské rádiové vysílání a výuka fyziky

RUDOLF BLÁHA

Olomouc

Dalo by se předpokládat, že v době moderních prostředků globální komunikace pozbývá radioamatérské rádiové vysílání na významu. Přesto se možnosti tohoto druhu spojení rozšiřují a poznatky o něm mohou být i motivačním prostředkem pro výuku fyziky. Historicky vzato, již německý fyzik *H. R. Hertz* byl vlastně prvním radioamatérem, když svými pokusy s anténami na ostrově Helgoland v roce 1887 potvrdil předpoklad vyslovený v roce 1872 *J. C. Maxwellem* o existenci elektromagnetických vln.

Bezdrátový přenos informací je ovšem výsledkem práce řady skvělých Hertzových následovníků. Na počátku dvacátého století se pokusy soustřeďovaly do oblasti dlouhých a středních vln a směřovaly ke komerčnímu využití. Dlouhé a střední vlny bylo v té době možno vysílat na vzdálenost i několika stovek kilometrů. Menší profesionální zájem byl o krátké vlny pro údajně jejich malý dosah a tyto vlny byly velkoryse dány k dispozici amatérským zájemcům o vysílání.

Zásadní změna nastala, když se podařilo amatérským operátorům uskutečnit v roce 1923 na kratších vlnách první transatlantické spojení. Toto se uskutečnilo mezi amatérskými stanicemi 1MO, 1XAM (USA) a 8AB (Francie) na vlnové délce 110 m.

Opakovanými pokusy se zjistilo, že na velmi velké vzdálenosti jsou pro přenos informace za jistých okolností lépe použitelné právě vlny kratší. Poté zájem o tyto vlny extrémně vzrostl. Bylo nebezpečí, že amatérští zájemci a průkopníci dálkových spojení budou postupně vytlačeni profesionálními službami rozhlasovými, leteckými, námořními, vojenskými apod. Došlo však k dohodě, která se sice postupně měnila a třeba ani nedodržovala, a pro zájemce byly vyhrazeny výseky z celkového spektra rádiových vln. V současné době tyto intervaly garantuje ITU (*International Telecommunication Union*) a jejich hodnoty najdete na webu [1]. Uvedená pásma tak slouží k účelům vzdělávacím, společenským i sportovním a v rámci daných pravidel se mohou v těchto pásmech konat i experimenty.

Modulace rádiového vysílání

Pro přenos informací jsou povoleny všechny druhy modulací vysílaných signálů, avšak některé z nich mají dominantní postavení.

Telegrafie klíčováním nosné vlny označovaná CW je na ústupu. Jde v podstatě o přerušování jednoho kmitočtu vysílače v rytmu Moresových telegrafních značek definovaných *Samuelem Morse* už v počátcích používání telegrafu v 19. století. Jeho abeceda se přenesla i do bezdrátové telegrafie a je užívána dodnes. Oba dva operátoři, na vysílací straně i na straně přijímací, musejí znát tuto abecedu a s dostatečnou rychlostí ji vysílat i přijímat. Zvládnutí Morseovy abecedy byla dříve nutná podmínka pro získání soukromé vysílací koncese. Radiotelegrafní provoz CW má výhodu, že obsadí v pásmu jen malou šířku. Pro čitelnost značek postačí šíře pásma 100 Hz až 200 Hz. Minimální šíře pásma musí být zajištěna, i když se jedná o jeden kmitočet. Nevýhoda CW modulace je, že se nemůže používat u větších výkonů. Problémy mohou nastat už při výkony nad 1 kW. Vysílač vlastně zatěžuje napájecí síť v rytmu značek přerušovaně.

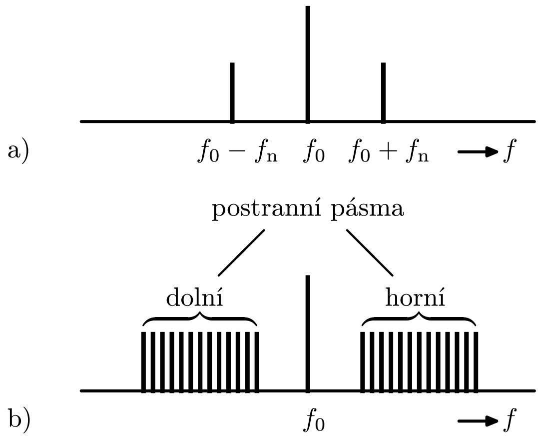
Amplitudová modulace (AM) je charakteristická tím, že nosné vysokofrekvenční kmitání o frekvenci f_0 modulované nízkofrekvenčním signálem o frekvenci f_n má dvě postranní pásma s frekvencemi $f_0 + f_\mathrm{n}$ a $f_0 - f_\mathrm{n}$ (obr. 1a). To snadno dokážeme i středoškolskými prostředky. Amplitudově modulovaný signál je součtem vysokofrekvenčního signálu $u = U_\mathrm{v} \sin \omega_0 t$ a nízkofrekvenčního akustického signálu $u_\mathrm{n} = U_\mathrm{n} \sin \omega t$, kde $\omega_0 \gg \omega$. Výsledný modulovaný signál je popsán rovnicí

$$u_\mathrm{m} = \Big(U_\mathrm{v} + U_\mathrm{n} \sin \omega t\Big) \sin \omega_0 t,$$

odkud po úpravě pomocí vzorce $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ dostaneme

$$u_\mathrm{m} = U_\mathrm{v} \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} U_\mathrm{n} \cos(\omega_0 - \omega)t - \frac{1}{2} U_\mathrm{n} \cos(\omega_0 + \omega)t.$$

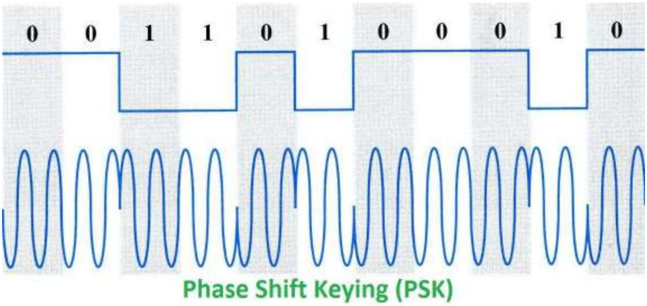
Rozšíření postranních pásem při modulaci vysokofrekvenční nosné frekvence (vf) f_0 nf signálem o zvukové frekvenci f_n, když je použit signál z mikrofonu, ukazuje obr. 1b. Protože veškerou zvukovou informaci obsahují obě postranní pásma, využívá se způsob zvaný SSB (*Single Side Band*), kdy se k přenosu použije pouze jedno z postranních pásem. Nosný kmitočet f_0 a druhé postranní pásmo se při dalším zpracování potlačí. K dostatečné srozumitelnosti není nutno přenášet celé akustické pásmo 20 kHz, postačí jeho část kolem 3,5 kHz. Tím se docílí podstatně většího dosahu vysílače.



Obr. 1

Modulace fázová PSK (*Phase Shift Keying*) se stále více uplatňuje při přenosu signálů v binárním kódu. Spočívá v tom, že délka kódování znaků je stanovena podle četnosti jejich výskytu v textu. Nejkratší jsou kódována písmena, která se v textu vyskytují nejčastěji. Každé písmeno, znak začíná a končí 1. Dvakrát za sebou uvnitř nejsou 0 (00 se používá pro oddělení písmen a znaků). Kódování se nazývá ASCII Varicode a tabulku kódů viz [2]. Příklady: a – 1011, b – 1011111, e – 11, i – 1101. Na obr. 2 je vyznačen modulační signál 00110100010 a vlastní modulace je založená na změně fáze o 180° při přechodu z 1 na 0 a naopak. Modulace PSK zabírá na pásmu neobyčejně úzkou část (30 Hz) a je velmi odolná proti rušení.

Modulační signál se generuje ve zvukové kartě počítače po stisknutí příslušné klávesy. V počítači musí být samozřejmě nainstalován příslušný program, který to dovede. Modulační signál se potom přivede ze zvukové karty počítače do modulačního bodu vysílače, např. mikrofonních zdířek a vyšle. Demodulace proběhne tak, že rádiovým přijímačem zachycený signál se ze sluchátkového výstupu přijímače přivede do mikrofonního vstupu počítače a po vyhodnocení se fázově upravený signál se srovná se sinusovým a zobrazí se na obrazovce.



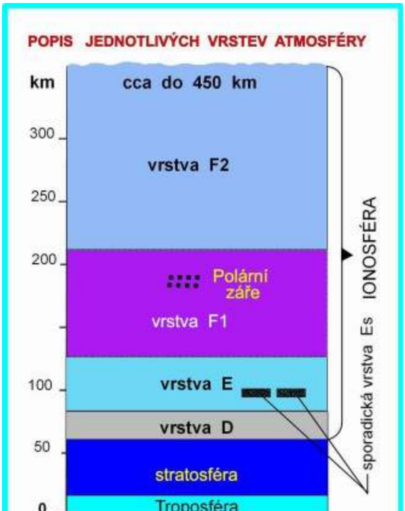
Obr. 2

Při amatérském používání rádiových vln se profilují některé další obory činnosti. Stavba technických zařízení se zaměřuje spíše na doplňková zařízení k *transceivru*, což je vysílač i přijímač konstruovaný v jedné jednotce. Konstruují se vhodné antény a měřidla jejich vyzařovaného výkonu. Pozornost je věnována výkonovému zesilovači i přizpůsobovací jednotce vsazované mezi transceiver a anténu. Při přenosu zpravidla malých výkonů zde platí zvlášť požadavek přizpůsobení, tzn. srovnání impedancí mezi vysílačem a anténou.

Dálkový přenos radioamatérského vysílání

Jednou z hlavních činností amatérů vysílačů je dosažení oboustranného spojení na co největší vzdálenosti. Pomineme li kontakty sestávající jen ze vzájemného klábosení, lze spojení uskutečnit dvěma způsoby. Obvyklé je, že stanice odpoví na volání výzvy a při uskutečnění v první části si vymění reporty o slyšitelnosti, poloze a jméno. V druhé části se sdělují zpravidla technické údaje a údaje o počasí apod. Až do zakončení kontaktu je vše doplňováno častými zdvořilostními frázemi. Platí zde etický kodex zvaný *ham spirit*. Druhým způsobem jsou kontakty závodní. Jde zde o co nejkratší oboustranné předání kódu, o co největší počet kontaktů. Závody vyhlašují zpravidla národní radiokluby. Během roku jich bývá vyhlášeno na stovky. Doba jejich trvání je hodiny až dny. Výhoda je, že se do závodu může bez ohlášení předem kdykoliv vstoupit i vystoupit. Podmínka pro hodnocení je zaslání deníku ze závodu.

Dálkové přenosy na krátkých vlnách (KV) se uskutečňují odrazem rádiových vln od ionosféry. Ionosféra je rozvrstvena do vrstev: D, E, F1 a F2 (obr. 3). Vznik vrstev je důsledkem exponenciálního rozvrstvení atmosféry, které má vliv na průnik slunečního záření. Uplatňuje se také energie pro ionizaci různých atmosférických částic. Pro dálkové přenosy jsou důležité vrstvy E, F1 a F2. Vrstvy F1 a F2 mohou za jistých podmínek splývat v jednu vrstvu označovanou F. Rekombinací elektronů s ionty v nepřítomnosti slunečního záření se ve vrstvách D, E a F1 snižuje hustota elektronů a pro jisté časové úseky vrstvy z hlediska šíření vln zanikají. Zánik vrstvy po západu Slunce a přerušení ionizace se počítá v minutách či desítkách minut. Ale zeslabená vrstva F2 zbývá přes noc. To umožňuje spojení na KV, a tím, že je položena nejvýše, má pro tato spojení největší význam.



Obr. 3

Všechny ionosférické vrstvy jsou velmi dynamické útvary a jejich fyzikální konstanty (hustota ionizace, relativní permitivita) se značně mění. Zvláštním ionizovaným útvarem je sporadická vrstva Es.

Uspořádání vrstev

vrstva	výška / km	hustota / cm^{-1}	kritický kmitočet / MHz	původ ionizace / nm
D	60–90	10^3	0,1–0,7	RTG záření tvrdší
E	90–120	$2{,}5 \cdot 10^5$	4,5	RTG záření měkčí
F1	180–240	$6 \cdot 10^5$		
F2	220–450	$2 \cdot 10^6$		
F	spojení F1 a F2		5–15	UV záření

Pro index lomu v ionosféře byl teoreticky odvozen vztah

$$n = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{i}}} = \sqrt{1 - 80{,}6\frac{N(z)}{f^2}},$$

kde ε_{i} je relativní permitivita ionizovaného plynu (pro ionizovaný plyn je vždy $\varepsilon_{\mathrm{i}} < 1$), $N(z)$ je koncentrace volných elektronů v uvažovaném místě atmosféry ve výšce z (m^{-3}), f je frekvence dopadající vlny (Hz).

Po vstupu elektromagnetické vlny do ionosféry mohou nastat pro danou frekvenci tři případy: relativní permitivita $\varepsilon_{\mathrm{i}} = 0$, nebo $\varepsilon_{\mathrm{i}} > 0$, popř. $\varepsilon_{\mathrm{i}} < 0$. Připomeňme, že relativní permitivita vakua i neutrálního vzduchu se rovná 1.

Podle velikosti relativní permitivity mohou nastat případy:

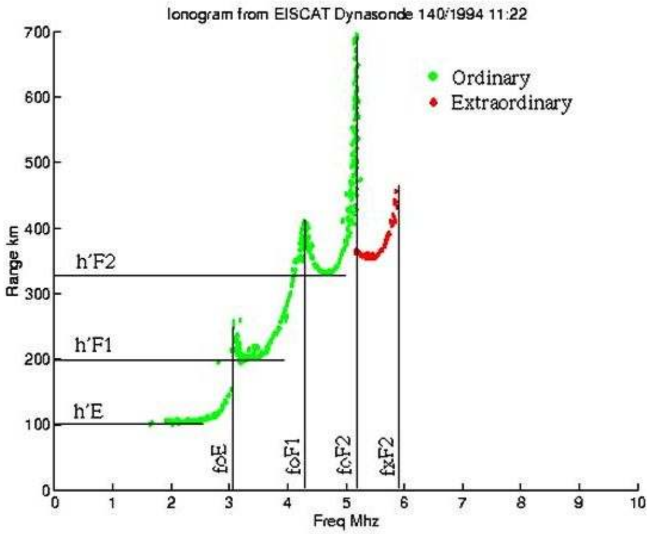
A) Jsou-li hodnoty $N(z)$ a f takové, že $\varepsilon_{\mathrm{i}} < 0$, je n imaginární, vlna se do prostředí nedostane a odráží se zpět.

B) Jsou-li hodnoty $N(z)$ a f takové, že $\varepsilon_{\mathrm{i}} > 0$, vlna ionosférou projde dále, třeba i značně utlumená.

C) Zvláštní případ nastane dosažením hodnot $n = 0$, $\varepsilon_{\mathrm{i}} = 0$. K tomu dojde při frekvenci $f = \sqrt{1 - 80{,}6N(z)}$. Pro danou výšku z o příslušné koncentraci $N(z)$ nastává odraz.

D) Jestliže odpovídá tato hodnota frekvence f (ad C) současně i maximální ionizaci vrstvy $N_{\max}$, označujeme tento kmitočet jako kritický ($f_{\mathrm{kr}} = \sqrt{1 - 80{,}6N_{\max}}$), kde $N_{\max}$ je maximální koncentrace elektronů. Rádiové vlny o vyšší frekvenci než f_{kr} vrstvou projdou.

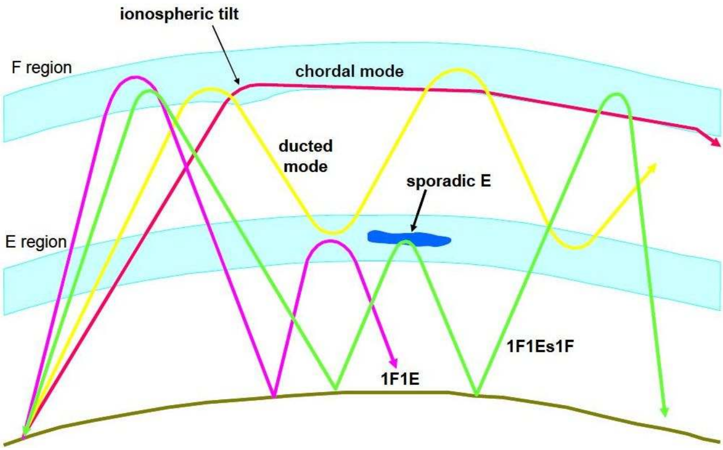
Stav ionosféry sledují ionosférické stanice rozmístěné po celé zeměkouli. Ionosféra se sonduje tak, že se kolmo vzhůru vysílá elektromagnetická vlna o proměnném kmitočtu. Pokud se vlna odrazí, zaznamená se tento odraz na grafu. Výsledkem sondování je sestavení a zveřejnění ionogramu. U nás sleduje ionosféru Ústav fyziky atmosféry v Průhonicích a v několikaminutových intervalech údaje zveřejňuje. Příklad spíše idealizovaného ionogramu je na obr. 4 (zdroj [4]).



Obr. 4

Na grafu jsou na vodorovné ose vyznačeny kritické kmitočty foE, foF1, foF2, fxF2. Jsou to hraniční kmitočty vln, které se jsou ještě schopné odrazit od dané vrstvy. Vyšší kmitočty vrstvou projdou, třeba i s nezanedbatelným útlumem. Na svislé ose jsou vyznačeny efektivní výšky. Vzhledem k tomu, že odraženou vlnu od ionosféry přijímá zařízení s časovým odstupem a nezkoumá proměnnou rychlost vlny v ionosféře, je tato efektivní výška určena, jakoby se vlna pohybovala rychlostí světla c.

Na obr. 5 (zdroj [3]) jsou znázorněny způsoby dálkového šíření elektromagnetických vln více odrazy od vrstev E a F a zemského povrchu. Je zřejmé, že při šikmém dopadu se použitelný kmitočet může i několikanásobně zvýšit, než je kmitočet kritický. Pravděpodobnost, že dojde k odrazu od ionosféry, je ovlivněna denní a roční dobou a sluneční činností. Právě sluneční činnost vnáší do prognózy dálkového spoje nejistotu, a proto každý, kdo se dálkovými spojeními zabývá, musí sluneční činnost sledovat. V současné době máme výhodu, že parametry, které vyjadřují sluneční vlivy na atmosféru, jsou k disposici bezprostředně. Mailem je možno získat data i několikrát denně od SWPC (*Space Weather Prediction Center*), včetně varování před možnými důsledky nejen v oboru šíření vln. (viz http://www.swpc.noaa.gov/). Pětistupňovou klasifikací jsou ohodnoceny především tři události. Narušení magnetického pole Země. Bombardování vrchních vrstev atmosféry částicemi ze Slunce. Vliv slunečního záření v oblasti rentgenového záření.



Obr. 5

Šíření rádiových vln ovlivňuje také zvláštní útvar – *sporadická vrstva* E_s (viz obr. 5). Vyskytuje se ve výšce řádné vrstvy E. Na rozdíl od vrstev E a F, jak už z názvu vyplývá, se nedá předpovídat a její příčina není dost dobře známá. Protože se vyskytuje především v letních měsících, spekuluje se o tom, že příčinou jsou bouřky v nižších vrstvách. Vrstva Es se vyznačuje vysokou koncentrací elektronů, takže je schopná odrážet i VKV vlny a umožnit na omezenou dobu jejich dálkové přenosy. O její existenci se mohli přesvědčit v dřívějších dobách i televizní diváci, sledující program v I. TV pásmu (Stanice Praha a Ostrava). Stávalo se, že v letních měsících jejich přijímaný obraz byl přerušen a vystřídán třeba obrazem španělským či ruským. Dosáhnout dálkových spojení na VKV prostřednictvím této anomálie je v centru zájmu mnoha radioamatérů. Proto je vrstva Es soustavně sledována a její výskyt je oznamován (např.: http://www.dxmaps.com/spots/map.php?Lan=S&Frec=50&Map=EU).

Dalšími experimenty, kterými se dá docílit spojení na velké vzdálenosti použitím VKV, je použít odrazu elektromagnetické vlny od ionizovaných stop po průchodu meteoritu atmosférou. Vlivem rychlé rekombinace však musí být spojení uskutečněno během velmi krátké doby. Operátoři, zajímající se o tento způsob komunikace, se tak stávají doslova lovci dálkových spojení.

Dálkové spojení na VKV se dá uskutečnit také odrazem elektromagnetických vlny od Měsíce. Způsob se nazývá EME (*Earth-Moon-Earth*). Je pochopitelné, že na tak velkou vzdálenost s použitím malých výkonů vysílačů musejí být použity vysoce směrové antény. Protože vědecký výzkum v USA probíhá souběžně se vzdělávací činností, může být používán pro zájmovou činnost zaměřenou na přenos EME třeba i gigantický radar observatoře Arecibo (průměr antény 305 m) v Portoriku. První spojení odrazem při použití antény tohoto radaru navázaly stanice W6DNG (USA) a OH1NL (Finsko) v dubnu 1964 v pásmu 2 m. Dnes jde o velmi zajímavý způsob experimentů s elektromagnetickými vlnami, spojený s amatérskou astronomií i na podstatně kratších (UKV) vlnách.

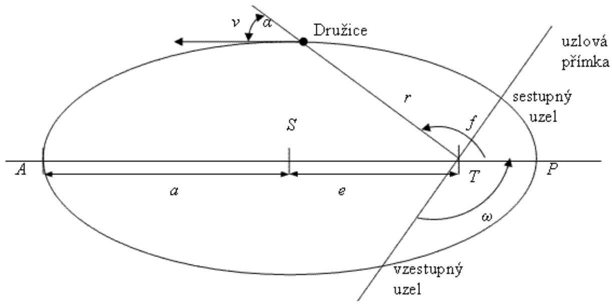
Sledování a komunikace se satelity

V prostoru kolem naší Země se pohybuje spousta satelitů. Vznikl i obor pro zájemce o tuto problematiku, který se zabývá jejich sledováním. Dokonce jsou vypouštěny satelity, které mají na palubě doplňky určené pro rádiové kontakty. Pro zájemce je v současné době dostatek informací a také prostředků pro tuto činnost. Není proto divu, že se o tuto problematiku zajímá stále více amatérských účastníků. Vznikla rovněž organizace AMSAT, která toto úsilí koordinuje.

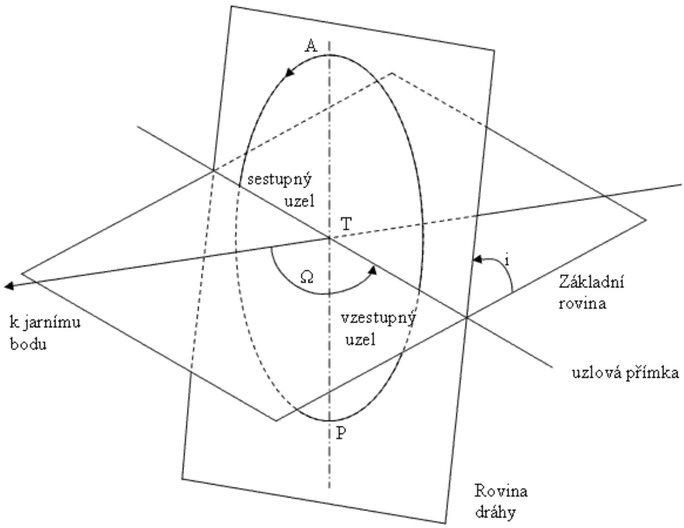
Kromě vizuálního pozorování je možno se satelity i komunikovat prostřednictvím rádia. Buď jednostranně, kdy jen přijímáme satelitní signály, nebo oboustranně, když přes satelit můžeme uskutečňovat dálková spojení. Vyvrcholením této komunikace je bezesporu oboustranná komunikace s posádkou lodi ISS. Ve svém volném času si jeden z kosmonautů vyhradí čas, ve kterém odpovídá na otázky školních dětí.

Pro vizuální, stejně jako pro rádiové pozorování je potřeba znát polohu satelitu. Ta se stanoví z Keplerových elementů. Keplerovy elementy lze zjistit na internetu, ale výpočet pozice satelitu z těchto elementů bez počítačového programu je zdlouhavý a pro bezprostřední sledování satelitu nepoužitelný.

Keplerovy elementy tvoří soubor šesti údajů a je vhodné, aby se s nimi žáci v návaznosti na výklad Keplerových zákonů seznámili. Připomeňme si je (obr. 6 a 7, zdroj [5]):



Obr. 6



Obr. 7

Vnitřní: a – délka hlavní poloosy elipsy, e – excentricita elipsy, t_p – okamžik průchodu perigeem
Vnější: i – inklinace (sklon dráhy družice vzhledem k rovníkové rovině), Ω – rektascenze (délka) výstupního (vzestupného) uzlu T, ω – parametr (argument) perigea (úhlová vzdálenost perigea od vzestupného uzlu).

Základní souřadnou soustavou pro výpočty polohy je soustava odvozená od roviny zemského rovníku a od zemské osy, která je současně souřadnicí Z mířící na sever. Souřadnice X v rovině rovníku míří k jarnímu bodu. Souřadnice Y je kolmá k oběma a leží rovněž v rovině rovníku.

Keplerovy elementy lze dekódovat z údajů, které satelit vysílá, nebo se získají na některé webové stránce. Dále uvedené údaje jsou převzaty z [6]:

Dvouřádkový formát NASA

1 07530U 74089B 13241.54020365 -.00000047 00000-0 -21869-4 0 7642
2 07530 101.4393 228.4011 0012261 142.9920 328.4528 12.53597962774970

Formát AMSAT

Catalog number	07530	Arg of perigee	142.9920 deg
Epoch time	13241.54020365	Mean anomaly	328.4528 deg
Element set	764	Mean motion	12.53597962 rev/day
Inclination	101.4393 deg	Decay rate	4.7e-07 rev/day^2
RA of node	228.4011 deg	Epoch rev	77497
Eccentricity	0.0012261	Checksum	291

Tyto údaje slouží pro výpočet postavení družice na dráze.

Požadavky na základní vybavení pro rádiové pozorování satelitu:

1. Transceiver vybavený příslušnými kmitočty, odpovídajícími alespoň vlnovým délkám 2 m a 70 cm. Transceiver musí mít schopnost být ovládán počítačem.
2. Nejlépe směrová anténa schopná pomocí rotátoru řízeného počítačem měnit úhly azimutální i elevační.
3. Počítač s příslušným programem ovládajícím frekvence (uplink, downlink), které se mění v důsledku Dopplerova efektu. Příčinou posunu je radiální složka pohybu satelitu vůči pozemské stanici a projevuje se tak, že při přeletu se pracovní frekvence na stupnici mění i o několik kHz, na vyšších kmitočtech i o desítky kHz.
4. Příslušné povolení k vysílání od ČTÚ.

Přímá účast na konferenci s některým z kosmonautů se uskutečňuje prostřednictvím amatérského rádia. Žáci mohou některému z kosmonautů ISS pokládat otázky týkající se života ve vesmíru a činnosti posádky na stanici. Konference trvá zhruba 10 minut, což je doba přeletu od výstupu satelitu nad horizont do sestupu pod něj. Aby bylo možno realizovat tento kontakt, je zapotřebí splnit mnoho požadavků stanovených organizací NASA. Pro tuto přípravnou činnost NASA pověřila dobrovolnou organizaci ARISS, která představuje veřejnosti tento vzdělávací projekt. Mohou se zúčastnit školy z celého světa, splní-li dané podmínky projektu. Pro přímý kontakt s kosmonautem si škola musí zajistit radioklub, který se postará o technickou stránku. Škola musí do svého vzdělávacího programu také zařadit učební témata týkající se kosmonautiky. ARISS posoudí program a technické zajištění a jsou-li podmínky splněny, zařadí školu s radioklubem na seznam čekatelů.

Na seznam NASA se podařilo dostat Gymnázium, Olomouc, Čajkovského a ČRK – Hanácký radioklub OK2KYJ (viz [7]). Jsme zařazeni pod číslem 303 v evropské oblasti a stali jsme se čekateli.

Stanice s mezinárodní posádkou má následující parametry:

Číslo v katalogu: 25544
Datum startu: 20. 10. 1998
Rádiové přijímací frekvence:
145,990 MHz FM, 145,200 MHz FM, 144,490 MHz FM
Rádiové vysílací frekvence:
145,800 MHz FM, 145,800 MHz FM, 145,800 MHz FM
Uplink převaděče: 437,800 MHz FM
Downlink převaděče: 145,800 MHz FM
Mód a polarizace antén: lineární

Na stanici jsou umístěny amatérské rádiové stanice s volacími znaky RS0ISS, RZ3DZR (Rusko), NA1SS (USA).

Závěr

Není potřeba zdůrazňovat, že pokusy tohoto typu jsou ve školní praxi velmi náročné. NASA počítá i s tím, že se spojení s posádkou kosmické lodi ISS nemusí podařit. Stačí, kdyby se v blízkosti pozemského stanoviště vyskytla obyčejná bouřka nebo se neodhadnutou sluneční činností narušila ionosféra. V každém případě však stojí za to, využít možnost nabízenou NASA k motivaci zájmu žáku o fyziku, astronomii a kosmonautiku.

Literatura

[1] http://cs.wikipedia.org/wiki/Radioamatérská_pásma
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Varicode
[3] http://www.ips.gov.au/Educational/5/2/2
[4] http://www.wdc.rl.ac.uk/ionosondes/ionogram_interpretation.html
[5] *Kovář, J., Kasal, M.*: Automatická kompenzace Dopplerova posunu frekvence při komunikaci s družicemi na negeostacionárních drahách. Elektrorevue – Internetový časopis http://www.elektrorevue.cz, roč. 2008, č. 1/08, s. 1–8.
[6] http://www.amsat.org/amsat/ftp/keps/current/nasa.all
[7] http://www.gcajkol.cz/web-aktuality/2013-09-06-konference-iss.html

Hrajme si i hlavou 2013

JANA ČESÁKOVÁ – MICHAELA KŘÍŽOVÁ

Přírodovědecká fakulta UHK, Hradec Králové

Ve dnech 20.–21. 6. 2013 se na Tylově nábřeží v Hradci Králové uskutečnil již 6. ročník akce *Hrajme si i hlavou* [1]. Jedná se o popularizační akci Katedry fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové, která je zaměřena na přírodovědné disciplíny, obzvláště potom na fyziku. Akce je určena především pro žáky základních a středních škol, ale může na ni dorazit každý, kdo má zájem se něco zajímavého dozvědět.

Hrajme si i hlavou probíhá pod širým nebem a každý rok bývá k dispozici velké množství stánků s pokusy, aby si mohl každý účastník sám vyzkoušet, co se ve škole většinou nestihne. Tradičně nechybí tekutý dusík, ohňová kouzla, hrátky se suchým ledem a škrobem, oblíbené optické klamy, obří bubliny a netradiční pokusy se zvukem, optikou i elektřinou. Akci jsme rozšířili i o „Temnou sluj“, kde jsme ukazovali nevšední experimenty, které ke svému efektnímu provedení potřebují tmu. Zde bylo k vidění mnoho světélkujících látek, různé fascinující výboje, plazmové koule a třeba i duha.

Obr. 1: Stánky *Hrajme si i hlavou* a účastníci zkoušející různé experimenty

Na akci se od počátku podílí i Hvězdárna a planetárium Hradec Králové, díky nimž návštěvníci pozorují Slunce a dozví se i mnoho zajímavého o Sluneční soustavě. Letošní novinkou byla účast dalších vystavovatelů, která snad vydrží i na další léta. Velmi zajímavý stánek s pomůckami pro nevidomé připravilo Speciálně pedagogické centrum pro zrakově postižené děti Hradec Králové. Zde bylo možné jen podle hmatu poznávat různé obrázky a bankovky, vyzkoušet si chůzi se slepeckou holí nebo si třeba napsat své jméno Braillovým písmem. Nejen své robotické výtvory přišli představit děti a jejich vedoucí z Domu dětí a mládeže v Hradci Králové a v neposlední řadě se představil i stánek ELI beamlines, kde byly k vidění zajímavé experimenty s lasery, a účastníci se dozvěděli o výstavbě nejmodernějšího laserového zařízení na světě.

Aby se akce nestala pouze pěknou podívanou, ze které si žáci odnesou „pouze“ zážitky, zavedli jsme tzv. hlavounky. Ty děti získávají za aktivitu a správné odpovědi na záludné otázky a později si je mohou vyměnit za různé ceny – balónky, píšťalky, kompasy, magnetky atd. U každého pokusu je k dispozici návod s popisem, vysvětlením, otázkou a dalšími náměty. Mnoho návodů si potom účastníci mohou odnášet i domů. Cílem akce je ukázat fyziku zábavnou a zajímavou formou a vymanit ji tak ze škatulky neoblíbených, a těžko pochopitelných školních vyučovacích předmětů. Uvědomujeme si, že dostat se do „dětského“ světa s fyzikou v jiném světle bude ještě náročná práce, ale tato naše cesta se nám jeví jako dobrý začátek. K tomu nám pomáhá i *maskot Albert*, který na akci ověřoval, zda všichni účastníci opravdu plní úkoly s vervou a nadšením.

Obr. 2: Maskot Albert s logem akce

U naprosté většiny pokusů se snažíme využívat pomůcky a materiály běžně dostupné a technicky nenáročné, aby děti měly možnost si je podle návodu vyrobit doma a učitelé v nich našli inspiraci do své výuky fyziky. Uveďme nyní konkrétní návody několika jednoduchých experimentů.

Podivná zrcadla

Do dvou krabic od kartónu nalepíme ze všech stran zrcadla. V první krabici nalepíme zrcadlo na všechny vnitřní stěny. V druhé krabici potom místo zrcadla na zadní stěnu nalepíme dvě zrcadla, která svírají úhel 90°. V zrcadle v první krabici se vidíme „normálně“. Ale co to znamená „normálně“? Protože v rovinném zrcadle vzniká obraz osově souměrný, vidíme tam, kde u jiných osob vidíme pravé oko, své oko levé. Nevidíme se tedy tak, jak nás vidí ostatní. Abychom zjistili, jak se skutečně jevíme ostatním, musíme se podívat do zrcadla, připraveného ve druhé krabici. Jak tato soustava zrcadel zobrazuje, dobře znázorňuje i případ na obr. 3, kdy se do zrcadel dívají dvě osoby.

Obr. 3: Pohled do krabice, ve které jsou umístěna zrcadla pod úhlem 90°

Žákům můžete úlohu zadat i jako domácí aktivitu, jejímž cílem bude fotografie obsahující určitý počet obrazů při různém úhlu mezi zrcadly [2].

Se staršími žáky můžete navázat na závislost velikosti úhlu mezi dvěma zrcadly a počtu obrazů, které můžeme pozorovat

$$n = \frac{360°}{\alpha} - 1,$$

kde n je počet obrazů a α je úhel mezi zrcadly.

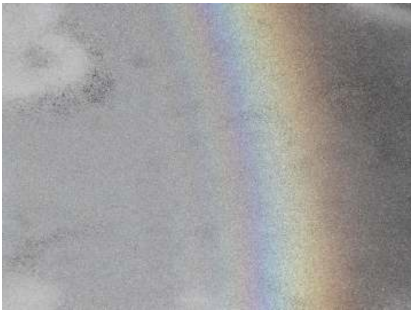
Další podivné zrcadlo si můžete vyrobit, když použijete proužky rovinného zrcadla o šířce asi 3 cm. Vždy dva proužky slepte nezrcadlící plochou k sobě a připevněte je s mezerami asi 3 cm do dřevěného rámu (obr. 4). Můžete použít tavnou pistoli nebo oboustrannou lepicí pásku. Jen musíte pracovat opatrně, protože proužky zrcadel jsou křehké. Pak stačí, když si dva lidé podrží vyrobené zrcadlo před sebou (obličeje by měli mít nejlépe ve stejné výšce) a uvidí svůj obličej úplně jinak, než jsou zvyklí z obyčejného zrcadla. Obraz, který uvidí, je totiž složením obou obličejů.

Obr. 4: Proužky rovinného zrcadla zamíchají vašimi obličeji

Jak vyrobit duhu bez deště

Na černou čtvrtku nastříkejte lepidlo ve spreji, které není na bázi vody, a tak čtvrtka zůstane rovná. Potom na ni rovnoměrně nasypte skleněné mikrokuličky. Sehnat se dají různé průměry od 0,001 mm do 0,7 mm, i různé barvy. Nám se nejvíce osvědčily čiré bezbarvé kuličky o průměru 0,32–0,43 mm. Dávejte však pozor, mikrokuličky se špatně uklízejí, když se rozsypou, a proto je vhodnější lepit je venku. Po nalepení stačí na čtvrtku posvítit kapesní svítilnou nebo ji vystavit přímému slunečnímu světlu. Natáčením čtvrtky s mikrokuličkami nebo zdroje světla tak vyrobíte krásnou duhu [3]. Duha vznikne lomem a odrazem světelných paprsků na malých skleněných kuličkách tak, jako se tomu děje, když duha vzniká na dešťových kapkách. Fialová barva se láme pod největším úhlem (má nejkratší vlnovou délku) a tvoří vnitřní část oblouku, červená (má nejdelší vlnovou délku) se láme nejméně a tvoří vnější část duhového oblouku.

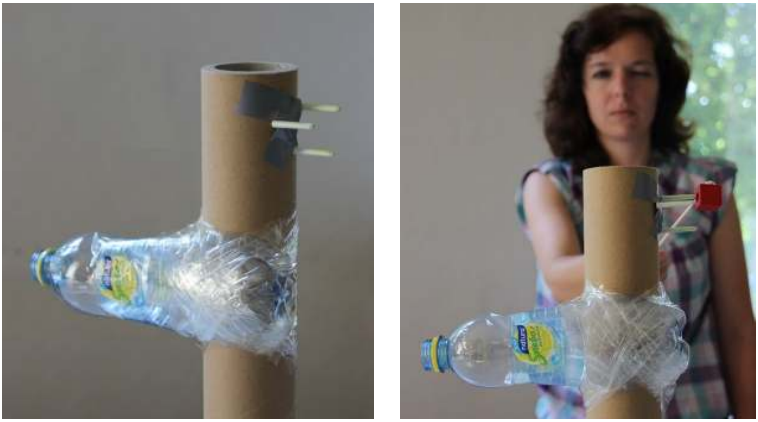
Mikrokuličky jsou velmi malé kuličky ze sodnodraselné skloviny, které mají vynikající optické vlastnosti. Používají se proto například na promítací plátna, při značení silnic, jako nátěrové hmoty i omítky. Můžete je však najít i na vánočních ozdobách či v přesýpacích hodinách. Objednat je můžete snadno přes internet. Jejich cena je příznivá, za 500 g mikrokuliček zaplatíte méně než 100 Kč.



Obr. 5: Duha na mikrokuličkách osvícených slunečním světlem

Poznej vzdálenost

Další nápad vznikl kombinací využití odpadového materiálu a zajímavého experimentu, kterým vyzkoušíme v reálu důležitý poznatek o našich očích. Žáci všech stupňů škol totiž bývají překvapeni tím, že bez použití obou očí se nám velmi špatně rozeznávají vzdálenosti. Je mnoho způsobů, jak tento fakt ověřit. My jsme využili trojnožku od pizzy, plastovou láhev, roli od papíru, korálky, špejle a izolepu (obr. 6). Úkolem bylo nejprve provléknout korálek připevněný na špejli jednotlivými nožkami trojnožky. Druhou možností je z boku se trefit korálkem do hrdla PET láhve, aniž by došlo k doteku. Vše si žáci vyzkouší s jedním okem zavřeným, potom s očima otevřenýma.



Obr. 6: Využití odpadového materiálu – k určování vzdálenosti předmětů potřebujeme obě oči

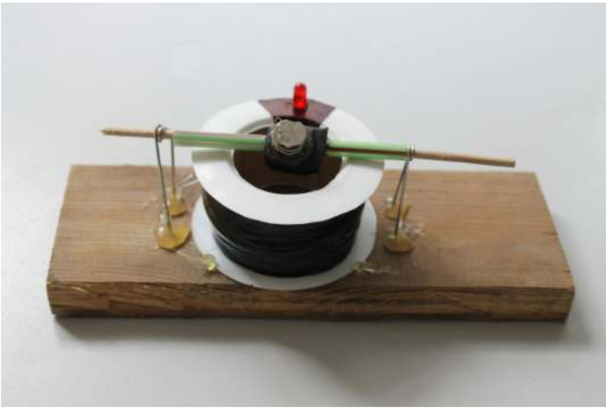
Generátor ze špulky a jednoduché elektromotorky

Stánek s elektřinou byl na *Hrajme si i hlavou* plný různých elektromotorků, generátorů, elektrických bludišť a netradičních zdrojů energie. U elektromotorků byla základem vždy cívka z měděného drátu, magnet a baterie. Děti si na základě našich ukázek mohly podle své fantazie vyrobit svůj motorek.

Obr. 7: Elektromotorky

Pro výrobu generátoru ze špulky budete potřebovat následující pomůcky: izolovaný měděný drát, 8 malých silnějších magnetů, špejle, LED dioda červená, 2 velké spínací špendlíky, brčko, kelímky od dvou jogurtů 500 g, rolička od toaletního papíru (uřízněte ji na délku cca 3 cm), izolepa, nůž, kousek gumy, tavicí pistole, prkénko.

Odřízněte kruhová dna kelímků od jogurtů a připevněte je izolepou k roličce od toaletního papíru, abyste vytvořili špulku. Na tuto špulku pak namotejte cívku z měděného drátu s co nejvíce závity. Oba konce ponechte asi 3 cm volné, nožem je odizolujte a připojte na ně diodu. Diodu připevněte na okraj špulky (obr. 8). Celou cívku zpevněte a zaizolujte izolepou. Kouskem gumy propíchněte špejli a na gumu dejte magnety. Na konce špejle potom navlékněte kousky brček jako zarážky. Na prkénko připevněte tavnou pistolí proti sobě dva svírací špendlíky, do kterých rotor zasadíte.



Obr. 8: Generátor ze špulky

Pak už stačí jen zatočit špejlí a dioda se rozsvítí. Pohybem magnetu uvnitř cívky se totiž v cívce indukuje elektrické napětí, které je dostatečné pro rozsvícení diody.

Podrobné informace o akci *Hrajme si i hlavou* včetně fotografií i akčního videa z posledního ročníku najdete nejen na webových stránkách [1] ale i na našem facebookovém profilu, kde nás můžete také podpořit.

Literatura

[1] http://www.hrajme-si-i-hlavou.cz

[2] http://angelgilding.com/Multiple_Reflections.html

[3] *Lewin, W., Goldstein, W.*: Z lásky k fyzice: Od konce duhy až na okraj času – putování po divech fyziky. Argo, Praha, 2012.

INFORMATIKA

Srovnání vývojových diagramů a pseudokódu ve výuce algoritmizace

ONDŘEJ KOŘÍNEK

Pedagogická fakulta, Univerzita Hradec Králové

Algoritmizace, jeden z možných přístupů v programování, patří k nejpoužívanější možnosti, jak začínat výuku programování u začínajících studentů. Lze ji vyučovat několika možnými způsoby. V článku jsou zhodnoceny a porovnány dva způsoby výuky algoritmizace pomocí vývojových diagramů nebo pomocí pseudokódu. Článek se zabývá zavedením proměnné a základními algoritmickými konstrukcemi: sekvence, větvení a cykly.

Studentům na různých typech škol dělají největší potíže předměty, které se zabývají programováním. Výuka předmětu může probíhat více způsoby, protože existuje několik paradigmat programování. S paradigmaty úzce souvisejí i přístupy v programování. Přístup v programování je užší specifikace paradigmatu, kde není např. upřesněn programovací jazyk.

V současné době je asi nejrozšířenějším a nejpoužívanějším paradigmatem i přístupem objektově orientované programování. Přesto i jiné přístupy mají ve výuce svoje místo. Dalšími možnými přístupy ve výuce programování může být komunikativní přístup nebo algoritmizace.

Nejen objektově orientované programování vychází z reálného světa. V algoritmizaci se pracuje s pojmem algoritmus, což je postup, který nás přivede v konečném čase k cíli. S algoritmy se setkáváme v běžném životě např. při přecházení silnice nebo vaření jídla podle receptu. Takže i algoritmizace má v reálném životě zastoupení.

Pro výuku algoritmizace existují algoritmické jazyky, které se dělí na graficky orientované a textově orientované. Mezi graficky orientované programovací jazyky řadíme strukturogramy (Nassi–Schneidermanovy diagramy) nebo vývojové diagramy. Mezi textově orientované algoritmické jazyky řadíme pseudokód, rozhodovací tabulky, slovní popis algoritmu nebo zápis algoritmu v programovacím jazyku [1]. Mezi nejčastěji používané zápisy algoritmu patří vývojové diagramy a pseudokód.

Vývojové diagramy

Vývojové diagramy zobrazují algoritmus v grafické podobě. Jsou dány ISO normou. Každý vývojový diagram má jeden začátek a alespoň jeden konec. Tok výpočtu je znázorněn šipkami. Kromě základních symbolů obsahují i speciální symboly, které se moc nevyužívají. Mezi základní symboly patří symbol pro vstup a výstup dat, symbol zpracování, mezní značka a spojka.

Vývojové diagramy „sváděly programátory k používání nestrukturovaných konstrukcí a dalších programátorských konstrukcí, jež v současné době považujeme za nečisté“ [2].

Nečistost může být v tomto případě dána při složitějším problému velikou nepřehledností, což je v rozporu s moderními metodami o jednoduchém a přehledném kódu [3]. Tyto metody se nevyskytují pouze v programování, ale i při tvorbě statických webových stránek v jazyku HTML (XHTML) a kaskádových stylů.

Podle M. Viriuse [4] již používání vývojových diagramů není aktuální, vzhledem k jejich složitosti. Zpravidla se jim vytýká, že spíše než logickou strukturu programu zdůrazňují druh operací.

Výhody vývojových diagramů jsou v jejich přehlednosti a názornosti, ale algoritmus nesmí být moc složitý, jinak výše uvedené výhody neplatí. Mezi nevýhody vývojových diagramů patří jejich obtížná upravitelnost i neaktuálnost, pokud se zadání algoritmu změní.

Pseudokód

Pseudokód je možností zápisu algoritmu pomocí nezávislosti na programovacím jazyku. Studenti se nemusí zabývat syntaxí příslušného programovacího jazyka. Stačí, aby se naučili pár základních jednoduchých příkazů, které se vyskytují v různých programovacích jazycích s jinou syntaxí. Výhodou používání pseudokódu je, že pro začínající programátory se příkazy v pseudokódu mohou psát i v češtině nebo v jiném jazyce.

Výuce algoritmizace pomocí pseudokódu v jazyce Pascal se zabývá profesorka Milková na Univerzitě Hradec Králové v předmětu Algoritmy a datové struktury. Předmět prošel vývojem, když k němu byla postupně vydána čtyři skripta. Předmět se ustálil v roce 2010 vydáním skript [5]. V průběhu vývoje se ve skriptech zkoušelo začít výklad od datové struktury pole, kdy byly cykly a podmínka vysvětleny pouze zjednodušeně a až potom se vysvětlovala důkladněji práce s jednoduchou proměnnou.

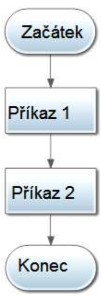
Základní algoritmické konstrukce

V obou výše uvedených možnostech výuky se používají pojmy: jednoduchá proměnná, symbol přiřazení, podmínka, cyklus, pole. Začínajícím studentům dělá největší problémy práce s jednoduchou proměnnou a symbol přiřazení. Symbol přiřazení se v různých programovacích jazycích značí odlišně, obvykle symbolem = nebo := . Při práci se strukturovanou proměnnou již tolik problémy nemívají. Proměnná označuje objekt nebo místo v paměti. Její zavedení je možné pomocí paměti rozdělené na malé paměťové buňky:

Součet	A
B	Průměr

Sekvence

Sekvence patří mezi základní algoritmické konstrukce, kde jednotlivé příkazy jsou vykonávány postupně za sebou. Rozdíl v zápisu pomocí vývojových diagramů a pseudokódu není příliš patrný (obr. 1). V obou případech je kód jednoduchý a celkem srovnatelný, vývojový diagram je pracnější na vytvoření.

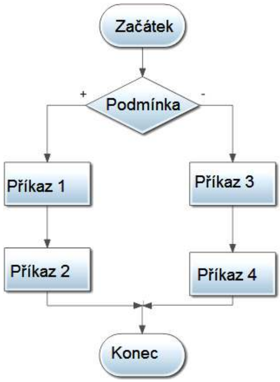



```
Začátek
   Příkaz 1;
   Příkaz 2;
Konec
```

Obr. 1

Větvení

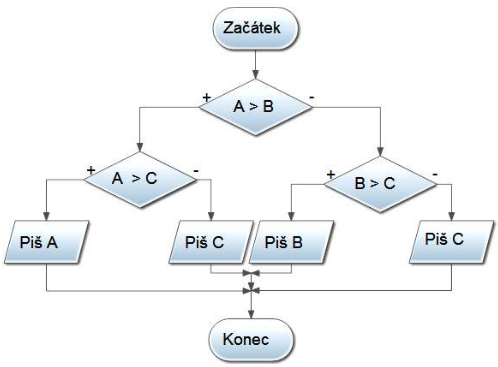
Větvení je další z algoritmických konstrukcí, která se často využívá. Větvení, podmíněný příkaz, může být úplné nebo neúplné. Při zápisu pomocí pseudokódu a vývojového diagramu rozdíl opět příliš patrný není, i když znázornění podmínky pomocí vývojového diagramu je o něco názornější než oproti pseudokódu (obr. 2), ale pouze pro jednodušší příklady.




```
Začátek
   jestliže (podmínka) pak
      začátek
         Příkaz 1;
         Příkaz 2;
      konec
   jinak
      začátek
         Příkaz 3;
         Příkaz 4;
      konec
Konec
```

Obr. 2

Při složitějších úlohách je již znázornění pomocí vývojového diagramu náročnější a může být méně přehledné. Při vnořování podmínek do sebe se již nevýhoda vývojového diagramu projeví, protože zápis pomocí symbolů je již dost nepřehledný na rozdíl od pseudokódu, jehož zápis je přehledný i snadno pochopitelný. Na obr. 3 je příklad na zjištění maxima ze tří čísel.




```
Začátek
   jestliže (A>B) pak
      jestliže (A>C) pak
         Piš A;
      jinak
         Piš C;
   jinak
      jestliže (B>C) pak
         Piš B;
      jinak
         Piš C;
      konec
Konec
```

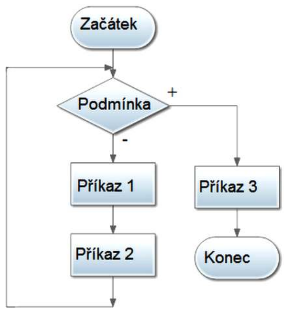
Obr. 3

Cyklus

Cyklus slouží k opakování určité činnosti příkazů. Existují cykly s pevným počtem opakování, s podmínkou na začátku a s podmínkou na konci. Poslední dva uvedené cykly jsou zástupné, tzn., že cyklus s podmínkou na začátku lze vyjádřit pomocí cyklu s podmínkou na konci a naopak.

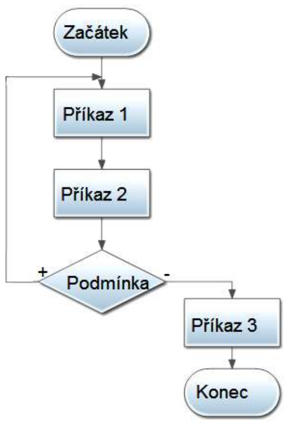
Cykly dělají začínajícím studentům potíže, protože často nevědí, jaký typ mají používat. Cyklus s podmínkou na začátku nemusí proběhnout ani jednou. Cyklus s podmínkou na konci proběhne vždy alespoň jednou.

Cyklus s pevným počtem opakování se v zápisu pomocí vývojových diagramů liší od ostatních, protože pro tento typ cyklus je k dispozici symbol přípravy, který někteří vyučující nepoužívají. Obrázky cyklů s neznámým počtem opakování jsou uvedeny na obr. 4 a 5.




```
Začátek
   dokud (podmínka) opakuj
      začátek
         Příkaz 1;
         Příkaz 2;
      konec
      Příkaz 3;
      konec
Konec
```

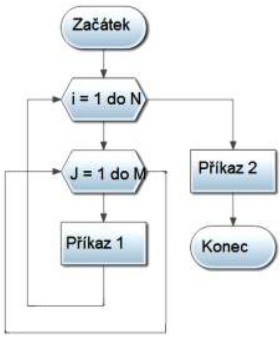
Obr. 4




```
Začátek
   opakuj
      začátek
         Příkaz 1;
         Příkaz 2;
      konec
   dokud (podmínka)
      konec
Konec
```

Obr. 5

Při zápisu cyklu pomocí vývojového diagramu může vést k problémům při vnořování překrývání spojnic. Ukázka špatného vnořování u cyklu s pevným počtem opakování je na obr. 6.




```
Začátek
  pro i od 1 do N opakuj
    pro j od 1 do M opakuj
      Příkaz 1;
  Příkaz 2;
Konec
```

Obr. 6

Cykly zapsané pomocí vývojových diagramů jsou opět náročnější na vytvoření než pomocí pseudokódu. Pomocí pseudokódu je jejich zápis pro studenta, který se učí samostatně pochopitelnější, protože pomocí vývojového diagramu nemusí být jejich smysl na první pohled, hlavně u cyklu s pevným počtem opakování, pochopitelný.

Článek shrnul možnosti zápisu základních konstrukcí algoritmů pomocí vývojových diagramů a pomocí pseudokódu. Při jednodušších příkladech je použití vývojových diagramů názornější než pomocí pseudokódu. Jednodušších příkladů se vyskytuje ale daleko méně, než složitějších. Vývojové diagramy jsou pracnější na zápis a při složitějších úlohách jsou méně názorné, protože řada spojnic může vést k nepřehlednosti, což bylo v článku ukázáno. Křížení spojnic, kterému se při složitých úlohách nevyhneme, vede k rozporu s ISO normou. Pseudokód je bližší k programovacímu jazyku, je přehlednější a lépe se vytvoří, než vývojové diagramy. Úskalím u pseudokódu je špatné odsazování a z toho pramenící horší přehlednost. Stejně jako je nutný při programování přehledný kód, tak u pseudokódu začínající programátoři získají při správném výkladu a jasných požadavcích na dobré odsazování správné návyky, které pak snadno využijí při přechodu na konkrétní programovací jazyk, což vývojové diagramy neumožňují. K lepší vizualizaci pseudokódu existuje pro skripta [5] program, který slouží k dobré vizualizaci a odstraňuje drobné nedostatky na začátku výkladu.

Literatura

[1] *Klimeš, C., Skalka J., Lovászová G., Švec P.*: Informatika pro maturanty a zájemce o studium na vysokých školách. Enigma, Nitra, 2008.

[2] *Pecinovský, R.*: Methodology Architecture First. [online] 2013. Dostupné z: http://vyuka.pecinovsky.cz/prispevky/2013_DIG_Metodika_Architecture_First.pdf [cit. 2013-12-23].

[3] *Fiala, M.*: Vytvořte editor kopenogramů. Diplomová práce, VŠE, Praha, 2012. Dostupné z: https://www.vse.cz/vskp/34803_vytvorte_editor_kopenogramu.

[4] *Virius, M.*: Základy algoritmizace. ČVUT, Praha, 1998.

[5] *Milková, E.*: Algoritmy: základní konstrukce v příkladech a jejich vizualizace. Vyd. 1., Gaudeamus, Hradec Králové, 2010.

Modelování a vizualizace fyzikálních polí v QuickFieldu

JAN RŮŽIČKA

Ústí nad Labem

Druhy fyzikálních polí (Malé repetitorium)

Přírodní děje často popisujeme pomocí polí. Jedná se zejména o skalární a vektorová pole.

Skalární pole je zobrazení, které události (v čase a prostoru) přiřazuje jedinou reálnou veličinu. Jako příklad lze uvést: hustotu, tlak nebo teplotu prostředí. V elektromagnetickém (dále EM) poli je tímto polem např. elektrostatický potenciál, nebo hustota náboje. Obecně je skalární pole funkcí tří prostorových proměnných a času. Vizualizujeme ho pomocí *isočar* nebo *ekvičar*, tedy míst, kde příslušná veličina má konstantní hodnotu.

Vektorové pole je zobrazení, které události (v čase a prostoru) přiřazuje trojici veličin – složek. Příkladem mohou být rychlost proudu kapaliny, napětí a deformace tělesa aj. V elektromagnetickém poli to je např. magnetická indukce nebo intenzita elektrického pole. S vektorovým polem souvisí pojem *siločar* a *indukčních linií*. Tečný vektor k siločáře zobrazuje směr intenzity elektrického pole. Hustota siločar v místě, je mírou její velikosti. Pojem indukčních linií platí analogicky pro magnetické pole.

Vývoj zkoumání polí

Hloubka a přesnost poznání polí bezprostředně ovlivňuje ne jen správný a ekonomický návrh mnoha průmyslových zařízení, ale i jejich bezpečný a optimální provoz. Cesty k dosažení tohoto cíle v průběhu lidského poznávání byly různé a postupně se zdokonalovaly. Hlavní směry byly:

1) Matematické řešení vztahů pro tato pole.

2) Fyzikální model (zmenšenina) skutečného tělesa nebo zařízení.

Analytické řešení rovnic většiny polí je možné pouze v případech s jednoduchou geometrií a okrajovými podmínkami. Poměry u reálných těles se od těchto ideálních, značně liší. Rovněž nelineární vlastnosti materiálů takovéto řešení vylučují. Nouzově se proto přijímají různá zjednodušení v geometrii i v popisu vlastností těles. Výsledky těchto postupů bývají značně nepřesné, až nepoužitelné. Proto se v minulosti při návrhu nového zařízení a ověřování jeho fungování používaly fyzikální modely. Jako příklad lze uvést modelování leteckých profilů v aerodynamickém tunelu, nebo ověřování proudění vody v přívodním kanálu turbíny na modelu hydroelektrárny. Z elektrotechniky: např. zkoušení modelů transformátorů a elektromotorů. Tyto modely představují velmi dobré přiblížení ke skutečnosti. Jejich značnou nevýhodou je jejich finanční nákladnost. Při použití pro návrh průmyslového výrobku, je nevýhodou rovněž značná doba nutná k realizaci modelu.

I když se ani dnes v průmyslové výrobě bez fyzikálního modelu neobejdeme, výše uvedené důvody byly příčinou rychlého rozvoje *numerického řešení* polí. Významné pokroky byly patrné zhruba od poloviny minulého století a byly akcelerovány nástupem samočinných počítačů. Jejich skutečný boom nastal cca před čtvrt stoletím, po zkonstruování prvního PC. Tím se pro užití numerických metod otevřela možnost přímé vizualizace zadání i výsledků na monitoru. Z numerického modelování polí se díky dramatickému vývoji SW a HW počítačů stal mocný nástroj pro analýzu polí, bez kterého si dnes další vývoj mnoha oborů již neumíme představit. Kromě použití v průmyslu je užití simulačních programů EM polí, i významným pomocníkem při výuce na vysokých školách. Na sklonku minulého století došlo ve světě k bouřlivému rozvoji v tvorbě simulačních programů. Podle užité geometrie rozlišujeme dvě skupiny: tzv. 2D a 3D.

Programy 2D jsou určeny pro řešení dvojrozměrných polí. Zde lze dle konkrétní úlohy volit mezi souřadným systémem rovinným (plane-parallel), nebo osově symetrickým (axisymmetric). Typickou aplikací rovinného systému je řešení pole několika přímých paralelních vodičů. Typickou aplikací osově symetrického systému je řešení magnetického pole válcové cívky.

Programy 3D umožňují řešit trojrozměrná pole. Jde výhradně o zahraniční programy, které snaží obsáhnout co nejvíce fyzikálních polí. EM pole je tak pouze jedno z mnohých. To souvisí rovněž s propracovaností pre a postprocessorů pro EM pole a zejména uživatelskou vlídností. Ta bývá u 2D programů obvykle větší. Rovněž ceny 3D programů bývají výrazně vyšší než jejich 2D obdoby.

V žebříčku kvality a oblíbenosti nabízených, světově významných a rozšířených simulačních programů zaujímá *QuickField* (dále QF) jedno z nejvyšších míst. Mezi jeho uživatele patří ne jen řada předních světových univerzit, ale i NASA a jaderné středisko v Los Alamos.

QuickField (Co umí a jak pracuje)

V porovnání s jinými programy jsou jeho hlavními přednostmi snadnost vytvoření geometrického modelu úlohy, rychlost výpočtu a přesnost výsledků. Je orientovaný zejména na modelování a analýzu elektromagnetického pole, v menší míře na teplotní a deformační pole.

Standardní oblasti použití jsou:
– Elektrostatika
– Proudová pole stejnosměrná a střídavá
– Magnetostatika
– Střídavá magnetická pole (ne jen harmonická)
– Přechodné elektromagnetické jevy

Umožňuje řešit i tzv. sdružené úlohy, kdy změny jednoho pole vyvolávají změny druhého. Typickým příkladem může být vysokofrekvenční ohřev ocelových součástek ve strojírenství, kde elektromagnetické pole mění teplotní pole i deformační v součástce. Kromě toho umožňuje řešit i obvody s téměř neomezeným počtem prvků.

Teoretický podkladem pro numerické řešení jsou čtyři Maxwellovy rovnice a dvojice materiálových vztahů.

Nástin principu numerického řešení

K numerickému řešení parciálních diferenciálních rovnic v inženýrské praxi slouží metoda konečných prvků (MPK). Základní myšlenka MPK je založena na diskretizaci oblasti řešení, tj. na její rozdělení do mnoha elementů jednoduchého tvaru, které se nazývají konečné prvky. Prvek je určen svými vrcholy, nazývanými uzly. Nejjednodušším prvkem pro rovinnou úlohu je trojúhelník, QF ho používá. Veličina popsaná parciální diferenciální rovnicí (např. teplota, potenciál, složky vektoru pole) je aproximovaná na každém prvku z uzlových hodnot. Pro uzlové hodnoty počítané veličiny je na základě diskretizace příslušné parciální diferenciální rovnice některou z variant MPK sestavena soustava rovnic. Vyřešením soustavy obdržíme hledané uzlové hodnoty. Podrobnější informace k numerickému řešení lze nalézt např. v [2], [3] a [4]. Výše uvedené kroky provádí program sám – bez zásahu uživatele.

Řešení úlohy lze rozdělit do těchto tří etap:

1. Příprava úlohy (Preprocessing)
2. Řešení úlohy (Processing)
3. Analýza výsledků (Postprocessing)

1. Příprava úlohy

V této etapě vybereme podle druhu řešené úlohy příslušnou standardní oblast analýzy (např. magnetostatiku). Dále zvolíme souřadný systém (např. osově symetrický) a délkovou jednotku (např. mm). Následuje vytvoření *geometrického modelu* úlohy grafickým editorem programu. Jednotlivé oblasti modelu vznikají spojováním hraničních bodů, zadaných z klávesnice, nebo přímo myší. Jejich spojením úsečkami a oblouky lze vytvořit i velmi složitý tvar. K takto vytvořeným oblastem se přiřadí fyzikální *vlastnosti* a k jejich hranicím *okrajové podmínky*. Přípravu úlohy zakončíme vygenerováním diskretizační *sítě*. Tato činnost je zcela automatizovaná a optimalizovaná – uživatel pouze klikne na ikonu pro start generování.

2. Řešení úlohy

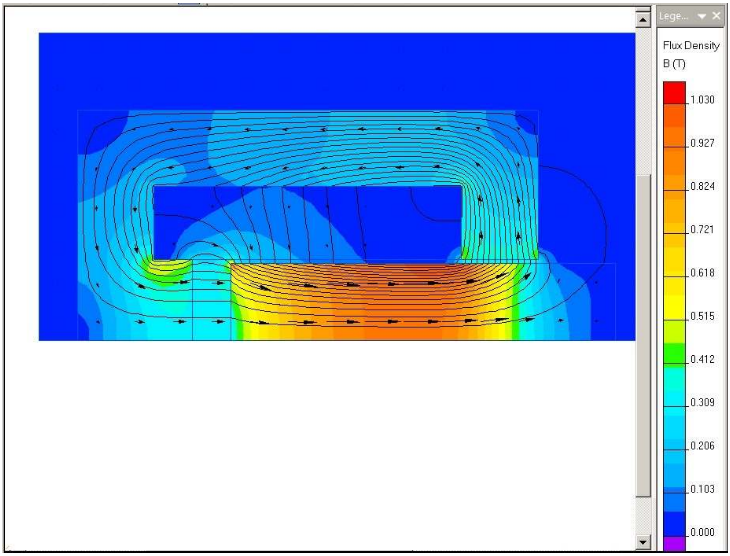
Jde o etapu, ve které probíhá vlastní řešení úlohy. Uživatel kliknutím na příslušnou ikonu tento proces pouze odstartuje a v jeho průběhu do něj nemusí zasahovat. Obvyklé doby řešení na běžném domácím PC se dle složitosti a typu úlohy pohybují v řádu sekund až minut.

3. Analýza výsledků

Po vyřešení úlohy v předchozí etapě se v této etapě vyhodnocují získaná data. Programy zobrazují rozložení vypočtených veličin pomocí tzv. barevných map. Dále lze zobrazit potřebné ekvičáry, rozložení vektorů v poli aj. Kliknutím na libovolné místo oblasti, lze v doprovodném okně získat informaci o velikosti všech veličin v tomto místě. Tyto veličiny, které přísluší pouze konkrétnímu místu, se nazývají *lokální*. Pokud vybereme celou podoblast (blok), můžeme získat výčet tzv. *integrálních* veličin bloku (např. mechanickou sílu, celkový proud aj.). U střídavých polí a přechodných jevů lze časový průběh děje snadno zobrazit v animaci.

Na závěr uvádíme tři ukázky map polí realizovaných QF.

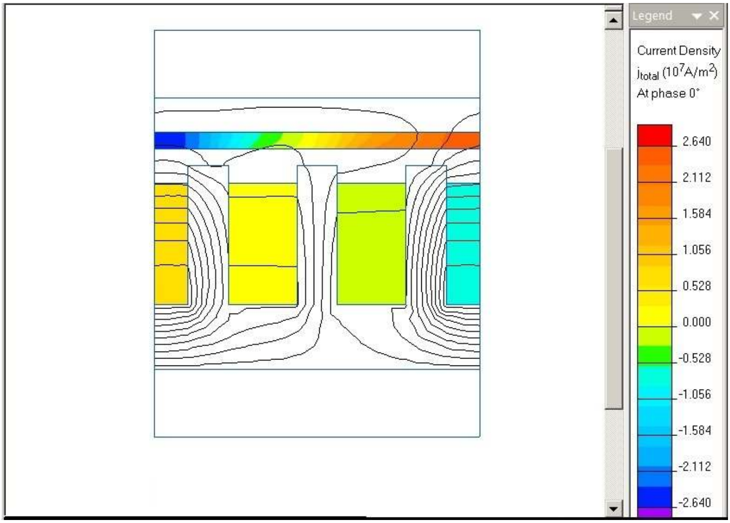
Barevnou mapu indukce a průběh indukčních linií v osovém řezu elektromagnetem vidíme na obr. 1. Oranžová oblast v obrázku přísluší pohyblivé části elektromagnetu – táhlu.



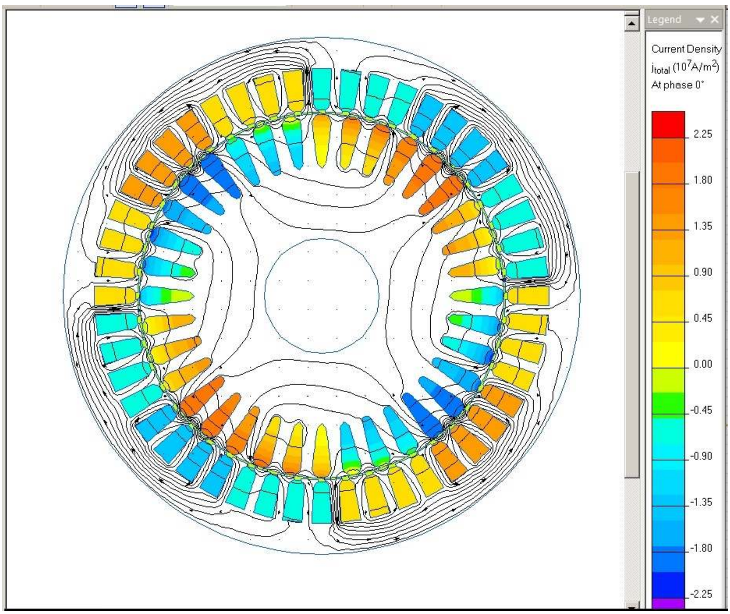
Obr. 1: Magnetické pole válcového elektromagnetu – aktuátoru

Mapu proudové hustoty a indukční linie v lineárním elektromotoru představuje obr. 2. Dobře je patrná duhová oblast indukovaných vířivých proudů.

Mapa proudových hustot v příčném řezu třífázového čtyřpólového asynchronního elektromotoru s kotvou nakrátko je na obr. 3. Současně je zobrazen i průběh indukčních linií. V tomto případě je simulován stav pro nulové otáčky rotoru.



Obr. 2: Pole v lineárním elektromotoru



Obr. 3: Pole v asynchronním elektromotoru

Program existuje ve dvou verzích – profesionální a studentské –, které se liší zejména přesností výsledků, dané hustotou diskretizační sítě a cenou.

Verze *Professional*, má téměř neomezenou hustotu sítě a dává velmi přesné výsledky.

Verze *Student*, má limitovaný počet uzlů a dává méně přesné výsledky. Přesto, že tvorba vlastních aplikací je zde limitovaná malým počtem, uzlů, lze tuto verzi používat i jako prohlížeč aplikací, vytvořených na husté síti ve verzi Professional.

Zatím co verze Professional je cenově nákladná (pro školy však poskytují výraznou slevu), je Studentská verze zcela zdarma. Vtom lze spatřovat její hlavní velký potenciál pro využití v českých školách, zejména pro další vzdělávání pedagogů a doktorandů.

Další informace lze získat na stránkách http://www.quickfield.cz nebo http://www.quickfield.com a v níže uvedené literatuře.

Literatura

[1] *Růžička, J.*: Simulace, vizualizace a analýza fyzikálních polí v počítači. (seriál) Elektro 8-9/2011 – 4/2012.

[2] *Mayer, D.*: Elektrodynamika v elektrotechnice. BEN, 2005.

[3] *Mayer, D.*: Aplikovaný elektromagnetizmus. Koop, 2012.

[4] *Claycomb, J. R.*: Applied Electromagnetics Using QuickField and MATLAB. Infinity Science Press LLC, 2008.

ZPRÁVY

Ústřední kolo 63. ročníku MO (kategorie A)

Organizací ústředního kola 63. ročníku Matematické olympiády v kategorii A a P byla v letošním školním roce pověřena krajská komise MO Moravskoslezského kraje. Finále soutěže v kategorii A se konalo od 23. do 26. března 2014 v Ostravě, jejím garantem bylo ostravské Wichterlovo gymnázium. Slavnostní zahájení soutěže v kategorii A se uskutečnilo v neděli 23. března v nové aule VŠB TU Ostrava. Soutěžící i členové Ústřední komise MO byli ubytováni v nedalekém hotelu Garni, který je součástí vysokoškolského ubytovacího komplexu VŠB v Ostravě-Porubě. Zahájení soutěže se zúčastnili přední osobnosti společenského a politického života, zástupci významných vědecko-technických institucí v České republice a zástupci

Moravskoslezského kraje a statutárního města Ostrava. Mezi pozvanými čestnými hosty nechyběli např. ministr zahraničních věcí ČR PhDr. Lubomír Zaorálek anebo předseda Akademie věd ČR prof. Ing. Jiří Drahoš, DrSc., dr.h.c.

Na základě jednotné koordinace úloh krajského (II.) kola v kategorii A pozvala ÚK MO k účasti ve III. kole nejlepších 45 úspěšných řešitelů II. kola z celé České republiky. Soutěžními dny byly 24. a 25. březen 2014. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící již tradičně vyhrazeny vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu mohli přitom získat maximálně 7 bodů (s celočíselnými hodnotami).

Organizátoři ústředního kola připravili pro soutěžící a členy ústřední komise MO zajímavý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu byl zajištěna pro všechny účastnícky III. kola exkurze do oblasti Dolních Vítkovic, která byla spojena s prohlídkou dnes již významné kulturně-historické památky – komplexu vysokých pecí přímo v centru vítkovických železáren. První část odpoledne po druhém soutěžním dni bylo vyhrazeno prohlídce památek v centru Ostravy a poté účastníci III. kola navštívili divadelní představení hry Nikolaje Vasiljeviče Gogola „Hráči“ v ostravském divadle Aréna.

Slavnostní vyhlášení výsledků a předání cen nejlepším účastníkům soutěže proběhlo ve středu 26. března 2014 v dopoledních hodinách ve velkém zasedacím sále ostravské radnice. Předseda ÚK MO *doc. Jaromír Šimša* ve svém závěrečném projevu poděkoval celému týmu organizátorů III. kola v kategorii A v čele s ředitelem Wichterlova gymnázia v Ostravě – PaedDr. *Antonínem Balnarem*, Ph.D, za kvalitní přípravu a mimořádně zdařilý průběh ústředního kola 63. ročníku MO v kategorii A.

Dále uvádíme texty soutěžních úloh ústředního kola a přehled nejúspěšnějších řešitelů 63. ročníku MO v kategorii A.

24. března 2014

1. Nechť n je přirozené číslo. Označme všechny jeho kladné $d_1, d_2, \dots, d_k$ tak, aby platilo $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ (je tedy $d_1 = 1$ a $d_k = n$). Zjistěte všechny takové hodnoty n, pro něž platí $d_5 - d_3 = 50$ a $11d_5 + 8d_7 = 3n$.

Matúš Harminc

2. V rovině, v níž je dána úsečka AB, uvažujme trojúhelníky XYZ takové, že X je vnitřním bodem úsečky AB, trojúhelníky XBY a XZA jsou podobné ($\Delta XBY \sim \Delta XZA$) a body A, B, Y, Z leží v tomto pořadí na kružnici. Najděte množinu středů všech úseček YZ.

Michal Rolínek a Jaroslav Švrček

3. Mějme šachovnici 8×8 a ke každé „hraně“, která odděluje dvě její pole, napišme přirozené číslo, jež udává počet způsobů, kterak lze celou šachovnici rozřezat na obdélníky 2×1, aby dotyčná hrana byla součástí řezu. Určete poslední číslici součtu všech takto napsaných čísel.

Michal Rolínek

25. března 2014

4. Do kina přišlo 234 diváků. Určete, pro která $n \geq 4$ se mohlo stát, že diváky bylo možno rozesadit do n řad tak, aby každý divák v i-té řadě se znal právě s j diváky v j-té řadě pro libovolná $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$. (Vztah známosti je symetrický.)

Tomáš Jurík

5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme k kružnici s průměrem AB. Kružnice, která se dotýká osy úhlu BAC v bodě A a prochází bodem C, protíná kružnici k v bodě P, $P \neq A$. Kružnice, která dotýká osy úhlu ABC v bodě B a prochází bodem C, protíná kružnici k v bodě Q, $Q \neq B$. Dokažte, že průsečík přímek AQ a BP leží na ose úhlu ACB.

Peter Novotný

6. Pro libovolná nezáporná reálná čísla a a b dokažte nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\geq\frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost.

Tomáš Jurík a Jaromír Šimša

Výsledková listina ústředního kola 63. ročníku MO – kategorie A.

Vítězové:

1. *Pavel Turek* (5/8, G Olomouc–Hejčín) 41 b., 2. *Filip Bialas* (5/8, G Opatov, Praha 4) 34 b., 3. *Radovan Švarc* (7/8, G Česká Třebová) 33 b., 4. *Tomáš Novotný* (8/8, G Česká Lípa) 31 b., 5. *Marian Poljak* (6/8, GJŠ Přerov) 30 b., 6. *Vojtěch Dvořák* (7/8, GJGJ Praha 1) 26 b., 7. *Viktor Němeček* (7/8, G Jihlava) 25 b.

Úspěšní řešitelé:

8. *Martin Raszyk* (4/4, G Karviná) 22 b., 9. *Martin Hora* (8/8, G Plzeň, Mikulášské nám.) 22 b., 10. *Matěj Konečný* (7/8, G České Budějovice, Jírovcova), 22 b., 11. *Jiří Guth Jarkovský* (8/8, G České Budějovice, Jírovcova), 21 b., 12. *Václav Rozhoň* (7/8, GJVJ České Budějovice), 17 b., 13. *Karolína Kuchyňová* (3/4, GML Brno), 16 b., 14. *Jakub Svoboda* (8/8, G Havířov, Komenského), 16 b.

Úspěšní účastníci:

15. *Kristýna Bukvišová* (4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše) 15 b., 16. *Jan Krejčí* (8/8, GMK Bílovec) 15 b., 17. *Libor Drozdek* (7/8, G Holešov), 13 b., 18. *Petr Vincena* (7/8, GJŠ Přerov), 13 b., 19. *Jan Soukup* (7/8, GJV Klatovy), 12 b., 20. *Hana Pařízková* (8/8, G Velké Meziříčí) 11 b., 21. *Aranka Hrušková* (8/8, GChD Praha 5) 11 b. 22. *Markéta Calábková* (7/8, GJŠ Přerov), 11 b., 23. *Lukáš Knob* (8/8, G Kojetín), 11 b.

K účasti na výběrovém soustředění před 55. MMO, které se uskutečnilo tradičně počátkem dubna v Kostelci nad Černými lesy, bylo pozváno deset nejlepších soutěžících ústředního kola. Z nich pak bylo vybráno šestičlenné reprezentační družstvo pro aktuální ročník MMO, který se uskuteční od 3. do 13. července 2014 v Jihoafrické republice (v Kapském Městě). Zde bylo vybráno také šestičlenné družstvo (sestavené z dalších úspěšných řešitelů a úspěšných účastníků ústředního kola – nematurantů) pro 8. ročník MEMO (Středoevropské matematické olympiády), která se bude konat koncem září 2014 v Drážďanech. Zprávu o účasti českého reprezentačního družstva na 55. MMO najdete v této rubrice v následujícím čísle a zprávu z 8. MEMO pak v posledním čísle aktuálního ročníku našeho časopisu.

Jaroslav Švrček

Ústřední kolo 63. ročníku MO (kategorie P)

Ve dnech 26.–28. 3. 2014 se konalo v Ostravě ústřední kolo 63. ročníku Matematické olympiády – kategorie P. Soutěž probíhala tradičně ve druhé polovině týdne v přímé návaznosti na ústřední kolo Matematické olympiády – kategorie A. Organizátorem celého ústředního kola MO bylo Wichterlovo gymnázium v Ostravě-Porubě, ubytování, stravování i soutěžní prostory byly zajištěny v nedalekém areálu VŠB-TU Ostrava. Odbornou náplň soutěže zajistili pracovníci z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, kteří připravili soutěžní úlohy, soutěžní prostředí na počítačích (testovací data a vyhodnocovací software) a také na místě zajistili opravování odevzdaných řešení.

V letošním ústředním kole MO kategorie P soutěžilo 26 z 27 pozvaných úspěšných účastníků krajských kol. Jedenáct z nich se probojovalo do ústředního kola MO v obou kategoriích A a P a strávili tak v Ostravě celý týden, v jehož průběhu absolvovali obě soutěže. První soutěžní den ústředního kola kategorie P je teoretický. Probíhá obdobně jako krajské kolo, tedy bez použití počítačů. Studenti v této části soutěže řeší tři úlohy zaměřené na návrh efektivního algoritmu pro zadaný problém. Některé úlohy navazují na domácí a krajské kolo, jedna z teoretických úloh vždy pracuje s nějakým neobvyklým výpočetním modelem, který prochází všemi koly příslušného ročníku olympiády. Druhý soutěžní den ústředního kola je praktický, studenti v něm soutěží u počítačů. Novinkou letošního ročníku MO bylo zadání tří praktických úloh místo dříve obvyklých dvou. Řešení praktických úloh je třeba dovést do podoby odladěných funkčních programů. Odevzdané programy jsou po skončení soutěže testovány pomocí předem připravené sady testovacích vstupních dat, přičemž se hodnotí nejen správnost dosažených výsledků, ale i rychlost výpočtu. Pomocí časových limitů omezujících dobu výpočtu programu lze odlišit kvalitu různých řešení z hlediska časové složitosti zvoleného algoritmu. Praktická část ústředního kola MO-P probíhá v obdobných podmínkách a podle stejných pravidel, jaká se uplatňují při mezinárodních středoškolských olympiádách v informatice.

Za každou soutěžní úlohu mohl řešitel získat maximálně 10 bodů, celkově tedy až 60 bodů. Na základě dosažených bodů se stanovuje výsledné pořadí, přičemž vzájemné umístění řešitelů se stejným bodovým součtem je odvozeno na základě dalších pomocných pravidel. V souladu s organizačním řádem olympiády byli čtyři nejlepší soutěžící vyhlášení vítězi ústředního kola, další čtyři obdrželi diplom úspěšného řešitele a další čtyři diplom úspěšného účastníka.

Výsledky ústředního kola 63. ročníku Matematické olympiády – kategorie P.

Vítězové:

1. Jan-Sebastian Fabík, 4/4, G tř. Kpt. Jaroše, Brno, 46 bodů; 2. Martin Raszyk, 4/4, G Karviná, 40 bodů; 3. Dominik Smrž, 8/8, G E. Krásnohorské, Praha 4, 36 bodů; 4. Ondřej Hübsch, 4/4, G Arabská, Praha 6, 31 bodů;

Úspěšní řešitelé:

5. Michal Punčochář, 8/8, G Jírovcova, České Budějovice, 30 bodů; 6. Martin Hora, 8/8, G Mikulášské nám., Plzeň, 29 bodů; 7. Tomáš Novotný, 8/8, G Česká Lípa, 29 bodů; 8. Matěj Konečný, 7/8, G Jírovcova, České Budějovice, 28 bodů.

Úspěšní účastníci:

9. Jakub Svoboda, 8/8, G Komenského, Havířov, 25 bodů; 10. Václav Rozhoň, 7/8, G J. V. Jirsíka, České Budějovice, 25 bodů; 11. Dalimil Hájek, 3/4, G J. Keplera, Praha 6, 25 bodů; 12. Anna Gajdová, 5/6, G F. Palackého, Valašské Meziříčí, 25 bodů.

Ostatní účastníci:

Filip Bialas, 5/8, G Opatov, Praha 4, 24 bodů; Jan Knížek, 3/4, G Strakonice, 24 bodů; Lukáš Černý, 8/8, G Turnov, 22 bodů; Jan Priessnitz, 5/8, G tř. Kpt. Jaroše, Brno, 22 bodů; Jan Soukup, 7/8, G J. Vrchlického, Klatovy, 21 bodů; Martin Zahradníček, 7/8, G Šlapanice, 21 bodů; Antonín Češík, 4/4, SPŠE Pardubice, 20 bodů; Richard Hladík, 5/8, G a OA Mariánské Lázně, 19 bodů; Martin Mareš, 4/4, G Jihlava, 11 bodů; Radovan Švarc, 7/8, G Česká Třebová, 11 bodů; Jan Tománek, 7/8, G Pelhřimov, 11 bodů; Jan Pokorný, 6/8, G a OA Bučovice, 10 bodů; Jaroslav Kňap, 8/8, G Turnov, 8 bodů; Richard Škutek, 7/8, G Dr. K. Polesného, Znojmo, 6 bodů.

Na základě výsledků dosažených v ústředním kole 63. ročníku Matematické olympiády – kategorie P byli vybráni čtyři reprezentanti, kteří se v červenci 2014 zúčastní na Taiwanu 26. mezinárodní olympiády v informatice IOI 2014. Další naše čtyřčlenné reprezentační družstvo bude soutěžit na 21. středoevropské olympiádě v informatice CEOI 2014, která se uskuteční již v červnu v Německu. Družstvo pro IOI je tvořeno čtyřmi vítězi ústředního kola, do družstva pro CEOI jsou zařazeni všichni čtyři úspěšní účastníci ústředního kola, kteří letos ještě nebudou maturovat.

Podrobnější informace o průběhu celého 63. ročníku MO kategorie P, kompletní výsledkovou listinu, texty soutěžních úloh i jejich vzorová řešení najdete na Internetu na adrese http://mo.mff.cuni.cz/. Na stejném místě se můžete seznámit i se staršími ročníky této soutěže a také se všemi aktuálními informacemi týkajícími se Matematické olympiády – kategorie P.

Pavel Töpfer

Celostátní kolo 55. ročníku FO (kategorie A)

Uspořádání celostátního kola kategorie A 55. ročníku FO se ve školním roce 2013/2014 ve dnech 24.–27. 2. 2014 ujalo *Gymnázium Ladislava Jaroše Holešov* (www.gymhol.cz). Nad soutěží převzali záštitu hejtman Zlínského kraje *MVDr. Stanislav Mišák* a radní Zlínského kraje pro oblast školství, mládeže a sportu *PaedDr. Petr Navrátil*. Předcházející krajská kola soutěže proběhla 24. 1. 2014 a v celé ČR se jich zúčastnilo celkem 125 soutěžících, z nichž 59 bylo úspěšných. Z nich pak 46 nejlepších řešitelů, z toho osm dívek, bylo pozváno do Holešova. Slavnostního zahájení soutěže se v podvečer 24. 2. ve slavnostních prostorách holešovského zámku Salla terrena kromě členů Ústřední komise FO a pořadatelů zúčastnili radní Zlínského kraje *PaedDr. Petr Navrátil*, starosta města *Pavel Svoboda* a předseda zlínské pobočky JČMF *Mgr. Lubomír Sedláček, Ph.D.*. Setkání doplnilo klavírní vystoupení žáků gymnázia a společná večeře v zámecké restauraci.

V úterý 25. 2. dopoledne čekaly soutěžící čtyři teoretické úlohy, s nimiž se museli vypořádat během pěti hodin.

Autorem první, třetí a čtvrté teoretické úlohy byl *RNDr. Jan Thomas* (První české gymnázium Karlovy Vary), autorkou druhé *PhDr. Miroslava Jarešová, Ph.D.* První úloha s názvem *Ležící jehlan* se zabývala prací při zvedání jehlanu nad vodní hladinu. Řešitelé za ni získali v průměru 4,99 bodu z deseti možných (osm z nich plný počet bodů), a podle názoru poroty nejoriginálnější řešení vypracoval *Jiří Kučera* (G J. Keplera Praha). Druhá úloha s názvem *Hod míčku na střechu* věnovaná oblíbené problematice vrhů byla podle průměrného bodového zisku 8,47 bodu soutěžícím nejbližší (šestnáct řešitelů získalo plný počet bodů), porota ocenila zejména postup *Zuzany Vlasákové* (G Rumburk). Třetí úloha *Účinnost kruhového děje* se nakonec podle průměrného hodnocení 4,98 bodu ukázala jako nejobtížnější a nejvíce zaujalo opět řešení *Jiřího Kučery*, který jako jediný obdržel plný počet bodů. Čtvrtá úloha s názvem *Undulátor* navazovala na studijní text [1] a soutěžící získali v průměru 6,05 bodu (osm dosáhlo plného bodového zisku); porota ocenila přístup *Martina Raszyka* (G Karviná).

Obr. 1: Řešení teoretických úloh v aule gymnázia

Odpoledne si účastnici prohlédli výrobní prostory firmy ELKO EP Holešov, kde je zaujal zejména vývojový program, a večer vyslechli přednášku prof. RNDr. Zdeňka Bouchala, Dr. z Přírodovědecké fakulty UP Olomouc na téma „Mechanické účinky světla: od slunečních plachetnic ke světelným motorům“.

Ve středu 26. 2. dopoledne soutěžící ve dvou skupinách řešili praktickou úlohu z elektřiny *Čtyřstěn*, kterou pečlivě připravili *RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.* (Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové) a *PaedDr. Přemysl Šedivý*, jenž již tradičně provedl finální úpravu všech úloh. Soutěžící získali v průměru 13,19 bodu, čtyři vybojovali plný bodový zisk a nejlepší experimentátorkou porota vyhlásila nejúspěšnější dívku v soutěži *Zuzanu Vlasákovou* (G Rumburk).

Obr. 2: Z řešení experimentální úlohy

Po obědě následovala exkurze do Technologického parku Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, konkrétně do laboratoře elektromagnetické kompatibility, laboratoře bezpečnostních technologií a laboratoře terahertzové optiky. Večer pak na tuto problematiku navázala přednáška *doc. RNDr. Vojtěcha Křesálka, CSc.* (Univerzita T. Bati Zlín) „Terahertzová oblast spektra a její aplikace".

Ke slavnostnímu vyhlášení výsledků se řešitelé i členové ústřední komise sešli ve čtvrtek 27. 2. opět ve slavnostních prostorách zámku. Uveďme základní statistické údaje: devět účastníků se stalo vítězi, jedenáct úspěšnými řešiteli, osmnáct úspěšnými účastníky a osm účastníky soutěže. Celkové průměrné hodnocení všech úloh bylo 36,67 bodu, tj. 61,0 % z možných 60. Na vítěze kromě zajímavých cen čekala i pozvánka na výběrové soustředění pořádané Katedrou fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové, z něhož vzejde pětice reprezentantů na 45. Mezinárodní fyzikální olympiádě, která proběhne od 13. do 21. července 2014 v kazachstánské Astaně (viz ipho2014.kz.). Pomyslnou zlatou medaili vybojoval *Martin Raszyk* (Gymnázium Karviná), stříbrnou *Václav Miřátský* (Gymnázium Pelhřimov) a bronzovou *Martin Hora* (Gymnázium Plzeň, Mikulášské náměstí). Zástupce generálního partnera soutěže společnosti ČEZ, a.s. *Ing. Martina Sýkorová* předala prvním třem vítězům šeky v hodnotě 10 000 Kč, jejichž čerpání je podmíněno zápisem na některou vysokou školu s technickým či přírodovědným zaměřením. Přítomné také pozdravila předsedkyně krajské komise FO Zlínského kraje *RNDr. Jana Buršová*.

Obr. 3: V pořadí zprava zlatý absolutní vítěz *Martin Raszyk* (G Karviná), stříbrný *Václav Miřátský* (G Pelhřimov) a bronzový *Martin Hora* (G Plzeň, Mikulášské náměstí) s Ing. Martinou Sýkorovou

Uspořádání celostátního kola je nemyslitelné bez podpory a pomoci řady organizací a firem v regionu. Kromě Zlínského kraje a města Holešov jmenujme Vyšší policejní školu a Střední policejní školu Ministerstva vnitra v Holešově, v jejímž internátu byli účastníci po dobu soutěže ubytováni, Univerzitu Tomáše Bati ve Zlíně, Univerzitu Palackého v Olomouci, dále firmy RAPOS, s.r.o., ELKO EP, s.r.o., Meopta–optika, s.r.o. Přerov, FEI Czech Republic, s.r.o. Brno, VYDONA s.r.o. Pravčice, GISIT s.r.o. Brno, Jospo a.s. Holešov a KOPO Buchlovice. Zvláštní uznání zaslouží tým organizátorů celostátního kola z Gymnázia Ladislava Jaroše pod vedením *Mgr. Jaroslava Machačíka* a ředitele školy *PaedDr. Zdeňka Janalíka.* Celostátní kolo totiž mělo původně proběhnout na jiném místě Zlínského kraje a rozhodnutí pomoci ÚKFO a ujmout se pořádání soutěže na počátku roku 2014 nebylo určitě jednoduché. Mnohem kratší čas na přípravu, který měli organizátoři k dispozici, však na samotném hladkém průběhu akce nebyl díky jejich obětavosti vůbec znát, což účastnici opakovaně velmi ocenili.

Pro příští školní rok v 56. ročníku FO přebírá organizátorskou štafetu Jihočeský kraj, kam v závěru účastníky a členy ústřední komise pozval doc. RNDr. Josef Blažek, CSc. Zájemci najdou všechny potřebné informace na internetových stránkách ÚKFO fo.cuni.cz popř. na stránkách Gymnázia Ladislava Jaroše www.gymhol.cz/fyzikalni-olympiada.

Literatura

[1] *Šedivý, P.*: Kapitoly ze speciální teorie relativity. 2. upravené vydání, MAFY, Hradec Králové, 2012. Dostupné z: fyzikalniolympiada.cz/texty/str2.pdf.

Výsledková listina celostátního kola

S ohledem na zpracování dat pro program Excelence středních škol (http://excelence.nidm.cz) je nutné stanovit jednoznačné pořadí soutěžících při stejném počtu bodů. Za tímto účelem Ústřední komise v roce 2013 odsouhlasila pomocné kritérium, tzv. modifikované body (mb), které jsou pro jednotlivé soutěžící vypočteny podle vztahu

$$\mathrm{mb} = \sum_i b_i \left(b_i^{\mathrm{m}} - \bar{b}_i \right),$$

kde b_i je bodový zisk soutěžícího z dané i-té úlohy, b_i^{m} je maximální možný počet bodů za danou úlohu (10 b u teoretických úloh, 20 b za praktickou úlohu) a $\bar{b}_i$ je průměrný bodový zisk z dané úlohy.

Vítězové:

1. Martin Raszyk (G Karviná, 56 b, 277,33 mb), 2. Václav Miřátský (G Pelhřimov, 54,5 b, 272,13 mb), 3. Martin Hora (G Plzeň, Mikulášské náměstí, 52,5 b, 255,3 mb), 4. Jiří Kučera (G Jana Keplera Praha, 52 b, 255,5 mb), 5. Jakub Dolejší (G Boženy Němcové Hradec Králové, 51,5 b, 248,68 mb), 6. Tomáš Novotný (G Česká Lípa, 49 b, 240,31 mb), 7. Jiří Guth Jarkovský (G České Budějovice, Jírovcova, 48 b, 225,31 mb), 8. Viktor Skoupý (G Moravská Třebová, 47 b, 227,09 mb), 9. Zuzana Vlasáková (G Rumburk, 46,5 b, 234,38 mb).

Úspěšní řešitelé:

10. Adam Příhoda (G Ostrov, 45 b, 216,45 mb), 11. Jan Soukup (G Jaroslava Vrchlického Klatovy, 44,5 b, 219,22 mb), 12. Ondřej Skácel (G Šternberk, 44 215,88 mb), 13. Jakub Rösler (G J. Gutha-Jarkovského Praha, 43,5 b, 209,35 mb), 14. Martin Wirth První české G Karlovy Vary, 42 b, 188,91 mb), 15. Ondřej Műler (G Břeclav, 41,5 b, 191,02 mb), 16. Tomáš Lysoněk (G Uherské Hradiště, 41 b, 203,13 mb), 17. Petr Kepčija (G České Budějovice, Jírovcova, 40,5 b, 197,79 mb), 18. Jiří Oskar Zmek Arcibiskupské G Kroměříž, 40 b, 188,49 mb), 19. Martin Balouch (G Uherské Hradiště, 40 b, 182,34 mb), 20. Petr Horvát (G Zábřeh, 39,5 b, 196,95 mb).

Úspěšní účastníci:

21. David Jiříček (G Hranice, 39 b, 196,41 mb), 22. Jakub Sláma (G Opatov, 38,5 b, 180,83 mb), 23. Lucie Fořtová (G Pierra De Coubertina Tábor, 37,5 b, 171,81 mb), 24. Marek Zmeškal (G Pelhřimov, 37 b, 180,65 mb), 25. Lukáš Supik (G Třinec, 37 b, 175,76 mb), 26. Jan Jirátko (G a Jazyková škola Zlín, 36,5 b, 175,2 mb), 27. Štěpán Marek (G Jana Keplera Praha, 36,5 b, 171,27 mb), 28. Lukáš Knob (G Kojetín, 36 b, 164,07 mb), 29. Filip Bialas (G Opatov, 35 b, 166,55 mb), 30. Ráchel Sgallová (G Christiana Dopplera

Praha, 34,5 b, 179,38 mb), 31. Jan Holeček (G Plzeň, Mikulášské náměstí, 34 b, 154,68 mb), 32. Pavel Kroupa (G Brno, tř. Kpt. Jaroše, 33,5 b, 164,07 mb), 33. Kristýna Bukvišová (G Brno tř. Kpt. Jaroše, 33,5 b, 142,42 mb), 34. Eliška Šestáková (G Josefa Jungmanna Litoměřice, 29,5 b, 129,57 mb), 35. Petr Vincena (G Jakuba Škody Přerov, 29 b, 164,8 mb), 36. Benedikt Peťko (G Matyáše Lercha Brno, 27,5 b, 111,68 mb), 37. Jan Krejčí (G Mikuláše Koperníka Bílovec, 26 b, 130,33 mb), 38. Tomáš Iser (G Jablonec nad Nisou, 26 b, 118,98 mb).

Ostatní účastníci:
39. František Prinz (G Břeclav, 25,5 b, 143,46 mb), 40. Pavel Vrbka (G Třebíč, 24 b, 107,15 mb), 41. Vlasta Dostálová (G Pardubice, Dašická, 22 b, 119,37 mb), 42. Darek Cidlinský (G Brno, tř. Kpt. Jaroše, 22 b, 88,15 mb), 43. Karolína Kuchyňová (G Matyáše Lercha Brno, 21,5 b, 101,95 mb), 44. Václav Melichárek (G Brno, tř. Kpt. Jaroše, 19,5 b, 87,05 mb), 45. Jana Ziková (G Brno, tř. Kpt. Jaroše, 19 b, 64,39 mb), 46. Dalibor Zeman (G Strakonice, 8,5 b, 45,68 mb).

Foto: Jaroslav Machačík
G Ladislava Jaroše Holešov

Lukáš Richterek

LITERATURA

František Kuřina: Elementárne o neelementárnom *Gaudeamus*, Hradec Králové, 2012

Problémy s vyučovaním matematiky nie sú nového dáta. Rozdiel je možno v tom, že v dávnejších časoch sa natoľko nepoužívali štatistické metódy na zisťovanie reality. Preto sa dnes vo väčšej miere meria úspešnosť žiakov v matematike na strane jednej a obľúbenosť predmetu na strane druhej. Navyše v dôsledku informatizácie sa neznižuje, skôr zvyšuje potreba rozumieť matematickým figúram ako aj potreba vychovávať v naznačenom duchu mládež.

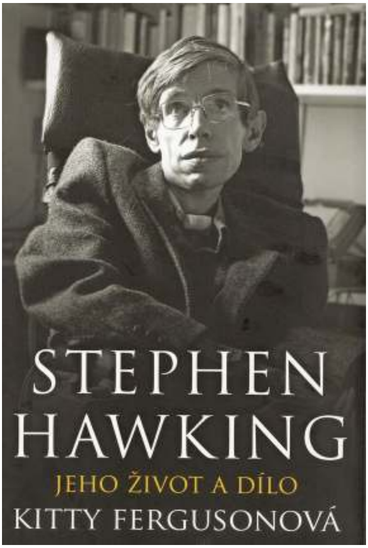
Nepochybne ideálnym priestorom pri plnení naznačených cieľov je elementárna matematika. Preto treba s radosťou uvítať vydanie knihy Františka Kuřinu Elementární matematika a kultura, Gaudeamus, Hradec Králové 2012. Táto kniha oplýva množstvom široko dostupných príkladov z najrôznejších období histórie i súčasnosti. Ale kniha môže poslúžiť aj čítajúcim študentom, lebo nevyžaduje osobitné vedomosti. A pokiaľ sem tam vyžaduje, vzdelaný čitateľ si ich osvieži a začínajúci do nich môže vniknúť, lebo sú zrozumiteľne podávané. Takými sú hoci odvodenie vzťahov pre goniometrické funkcie súčtu uhlov, či vzorec pre súčet nekonečného geometrického radu.

Najrozsiahlejšia časť knihy je venovaná jazyku matematiky a dominantou v nej je geometria. Nie div vzhľadom na postavenie v matematike geometrickej predstavivosti. Autor si tu pomohol citátmi Eduarda Čecha i Petra Vopěnku. Ostatne citácie z diel mnohých významných osobností sa prelínajú celým spisom Františka Kuřinu a sú jeho silnou stránkou. Ak pre iné nie, už preto sa oplatí siahnuť po Kuřinovej knihe. Autor sa zmieňuje o tvorbe detí (napr. mimoriadne zaujímavý žiacky test), tvorbe prírody, umeleckej tvorbe, ďalej sa venuje reláciám, súmernosti a fraktálom.

V knihe sa vyskytuje viacero historických informácií, napr. 4 dôkazy Pytagorovej vety od slávnych autorov spomedzi prekvapujúceho počtu 300 známych rôznych dôkazov. Vyzdvihnúť možno aj grafickú stránku diela, kniha dýcha krásnymi obrázkami, a to tak umeleckými ako technickými. Aj vzhľadom na obrovské skúsenosti Františka Kuřinu v didaktike matematiky možno jeho knihu odporúčať širokému okruhu čitateľov.

Beloslav Riečan

Kitty Fergusonová:
Stephen Hawking – Jeho život a dílo



Vznik a vývoj vesmíru jsou pro většinu čtenářů neobyčejně zajímavými tématy, pokud jsou tyto události popisovány jednoduše, takřka beletristicky a bez nároků na nějaké další doprovodné znalosti. Má-li autor dát tématu jistý přírodovědecký rámec, musí se nezbytně opírat o současné fyzikální poznatky a výsledky mnohých pozorování a experimentů. Čím ve větší míře tak činí, zužuje se okruh čtenářů až na ty nejvážnější zájemce.

Americké spisovatelce *Kitty Fergusonové*, která se dlouhodobě věnuje psaní o historii matematiky a fyziky, se podařila nadmíru obtížná věc, a to podat téměř celoživotní dílo jednoho z nejvýznamnějších astrofyziků – *Stephena Hawkinga* – fyzikálně a astronomicky zaměřenému čtenáři, přičemž to nemusí být specialista na kvantovou mechaniku, teorii relativity nebo kosmologii. Zde mám na mysli především učitele fyziky a fyzikálně laděné studenty středních škol.

Obsah knihy, kterou v roce 2013 vydalo v Praze nakladatelství Práh, se vyvíjí současně po dvou liniích: životní osudy Stephena Hawkinga a rozšiřování fyzikálních poznatků o vesmíru. Má-li čtenář dojem, že v Hawkingově životopisu dospěl do míst, kdy bude potřebovat fyzikální podporu, v textu knihy se mu jí na správném místě dostane, a to srozumitelnou formou. U čtenáře se pouze předpokládá, že má základní znalosti o kvantové mechanice a teorii relativity, neboť o společný náhled na tyto dvě teorie – teorii mikrosvěta a teorii megasvěta – v Hawkingově letité práci jde.

V roce 1979 byl Hawking jmenován profesorem na katedře Trinity College v Cambridge, která je pojmenována po Henry Lucasovi. Ve své inaugurační „lucasianské“ přednášce s názvem Blíží se konec teoretické fyziky? 29. dubna 1980 před zaplněným sálem deklaroval mj.: „Naším cílem není nic menšího než úplný popis vesmíru, v němž žijeme“. Podaří-li se to, bude ještě mít teoretická fyzika o čem bádat? Název přednášky je spíše provokativní a motivační, neboť lidské poznávání je nekonečné a badatelská touha si vždy nějaké nezodpovězené otázky najde.

Značnou část knihy tvoří problematika černých děr, míst obrovských koncentrací hmoty, jejichž gravitační pole vytvoří horizont událostí s únikovou rychlostí rovnou rychlosti světla, tudíž slupkou uzavírající tuto oblast jako neviditelnou. Na těchto objektech se Hawking usilovně snaží nalézt společné body fundamentálních teorií – relativity a kvantové fyziky. Hledání unitární teorie je nesmírně obtížná věc, jednak z důvodů obrovských školových rozdílů a jednak z důvodů předpovědí stavů vesmíru a jeho částí. Zde se do zorného pole bádání dostává současně předpověď deterministická spolu s předpovědí pravděpodobnostní. Celé toto myšlenkové rozpětí Hawking obsáhl a stále pracuje ve smyslu svého kréda: „Úplné porozumění vesmíru, proč je, jaký je, a proč vůbec existuje.“

Pokud jde o lidský pohled na Hawkingův život, zasluhuje tento člověk bezmezné uznání. Autorka v knize astrofyzika kontinuálně sleduje v čase, po většinu jeho života v těžké nemoci, ve stavu fyzické imobility. Je s podivem, že není na světě významné vědecké centrum, které by Hawking nenavštívil, nenajde se specialista na zmiňovanou problematiku, s nímž by nepohovořil, nepřel se, jemuž by se neomluvil, když se ve svých domněnkách mýlil. To vše vyžaduje obrovské fyzické i psychické nasazení člověka, který takřka nemůže udělat pohyb. Všechny tyto okolnosti autorka velmi detailně a citlivě zmapovala, čtenáři se skoro zdá, že s Hawkingem vše prožila.

Kniha je cenná i v jiné věci: Čtenáři poskytne kvalitní a úplný přehled o současné kosmologii včetně hlavních směrů výzkumů dalekého vesmíru i jeho mikročástic. Autorka zmiňuje výsledky částicového výzkumu v CERN, sdělení ze sond COBE a WMAP o reliktním záření i takové novinky, jakými je objev, že vesmír se rozpíná zrychleně.

Obsažná kniha (366 stran) se čte velmi dobře. Text nepostrádá dramatičnost, je jazykově elegantní a přitom fyzikálně spolehlivý.

František Jáchim

Clifford A. Pickover: Matematická kniha Od Pythagora po 57. dimenzi: 250 milníků v dějinách matematiky

Autorem knihy, kterou v roce 2012 vydala společně nakladatelství Dokořán a Argo, je známý americký matematik, autor řady knih o matematice *Clifford Alan Pickover*. Svoje knižní publikace uvádí na konci knihy v seznamu literatury a internetových zdrojů.

Knihu nejlépe charakterizuje její podtitul – 250 milníků v dějinách matematiky. Každému problému je věnována jedna stránka, na protější straně je obrázek. Kniha má 544 stran a je poměrně drahá (její americké vydání, jestli jsem správně postřehl, je levnější než české). Nemohu se zmínit o všech matematických problémech uvedených v knize, jen uvedu, že obsah knihy, a tedy seznam problémů, je v knize vysázen ve dvou sloupcích na čtyřech stránkách. Vedle známých matematických problémů jako je Pythagorova věta, Eratosthenovo síto, Velká Fermatova věta, Pascalův trojúhelník, mosty v Královci, Gödelova věta, atd., si určitě každý čtenář (i z řad matematiků) najde problémy, o kterých nečetl. Jediný problém, který má na svědomí český matematik, je zřejmě problém galerie (s. 450), tedy problém *Václava Chvátala*, pražského rodáka (1946), který v roce 1968 emigroval. V současnosti je profesorem na univerzitě Concordia v Montrealu v Kanadě. Předmětem jeho vědecké práce je zejména teorie grafů.

Pro mne byly nejzajímavějšími zmínky o matematicích, kteří nejsou Evropanům příliš známí. Mám na mysli třeba arabské středověké matematiky, jako je např. *Al Káší*, který nezávisle na *F. Vietovi* objevil kosinovou větu. Nebo indické matematiky – např. zmínku o indickém Bakšálském rukopisu, či „kapitoly z indické matematiky“ na s. 92.

Pickover čtenáře seznamuje s historii matematiky přístupnou formou a i když kniha má do jisté míry americký styl charakteristický velkým počtem obrázků, vizuální ztvárnění problémů možná může přitáhnout k zájmu o matematiku i ty, kteří ji považují za příliš abstraktní. Nečekejte ale nějaké hluboké poznatky o jednotlivých problémech, není na to, vzhledem k jedné stránce věnované každému problému, místo. Bližší informace si případný zájemce musí vyhledat v literatuře či internetových zdrojích, uvedených v knize na 18 stranách.

Karel Vašíček