[10] *Kuřina, F.*: Naše pedagogická realita. Matematika, fyzika, informatika, roč. 23, č. 1 (2014), s. 1–8.

[11] *Kuřina, F.*: Oborové didaktiky a školská praxe. Pedagogika, č. 3 (2003), s. 321–324.

[12] *Kuřina, F.*: Problémové vyučování v geometrii. SPN, Praha, 1976.

[13] *Kvasz, L.*: Pattern of Changes. Birkhäuser, Basel, 2008.

[14] *Mareš, J.*: Pedagogická psychologie. Portál, Praha, 2013.

[15] *Miller, H.*: Nexus. Votobia, Olomouc, 1995.

[16] Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha. Výzkumný ústav pedagogiky, Praha, 2001.

[17] *Průcha, J.*: Moderní pedagogika. Portál, Praha, 2005.

[18] Rámcové vzdělávací programy. Výzkumný ústav pedagogický, Praha, 2002.

[19] *Selye, H.*: K záhadám vědy. Orbis, Praha, 1975.

[20] *Straková, J.*: Jak dál s kurikulární reformou. Pedagogická orientace, roč. 23, č. 5 (2013), s. 734–743.

[21] *Štech, S.*: Když je kurikulární reforma evidence-less. Pedagogická orientace, roč. 23, č. 5. (2013), s. 615–63

O niektorých vlastnostiach štvorstena vektorovo

DUŠAN VALLO

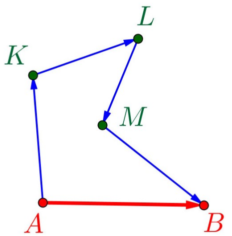
Fakulta prírodných vied UKF, Nitra

Vo výučbe vektorového počtu na strednej škole sa niekedy príliš skoro prechádza od názorných pojmov k analytickému vyjadreniu pomocou súradníc. Vedomosti sú potom často formálne, žiaci si nevytvoria správne predstavy o objektoch, s ktorými pracujú. Naučia sa len algoritmické postupy riešenia úloh. Takto nadobudnuté poznatky nie sú schopní aplikovať.

Na príklade problematiky štvorstena ukážeme, aká užitočná môže byť práca s vektormi bez použitia sústavy súradníc. Budeme vychádzať z názorných predstáv, a ako je na školách zvykom, umiestnenia vektorov znázorníme orientovanými úsečkami.

Predpokladáme znalosť základných operácií s vektormi vrátane skalárneho, vektorového a zmiešaného súčinu, ako aj ich geometrického významu.

Ďalej predpokladáme znalosť sčítania vektorov pomocou vektorového mnohouholníka. Napr. pri označení na obr. 1 pre vektor $\overrightarrow{AB}$ platí



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MB}.$$

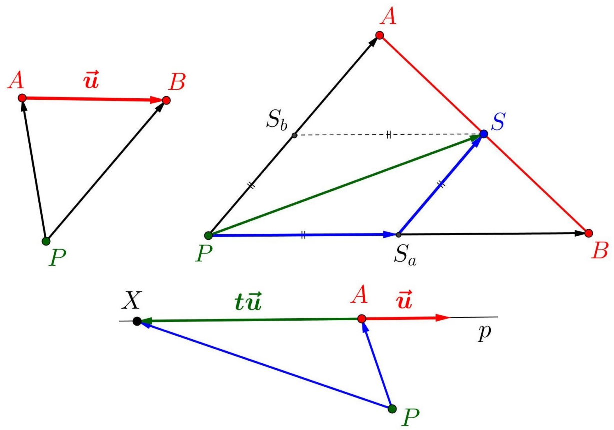
Obr. 1 Grafické sčítanie vektorov pomocou vektorového mnohouholníka

Symbolické vzťahy (zápis vektora, vzťah pre stred S úsečky AB a parametrické vyjadrenie priamky p určenej bodom a smerovým vektorom $\overrightarrow{u}$)

$$\overrightarrow{u} = B - A, \qquad S = \frac{A+B}{2}, \qquad p\colon X = A + t\overrightarrow{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

chápeme ako zjednodušené zápisy faktov, že pre ľubovoľne zvolený bod P platia vektorové rovnice

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}, \quad \overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}, \quad p\colon \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PA} + t\overrightarrow{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

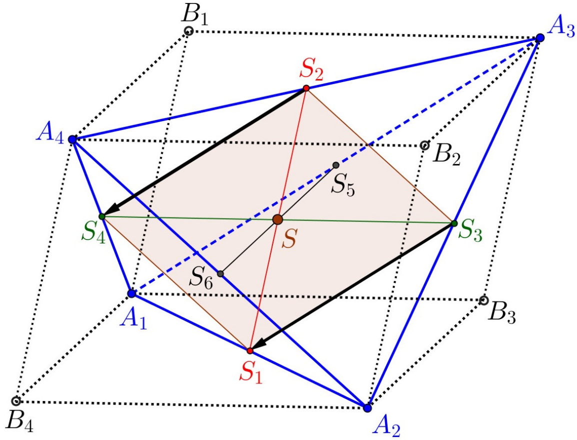


Obr. 2 Geometrické znázornenie vektorových vzťahov pre ľubovoľný bod P

Odpovedajúce si vzťahy možno podľa potreby zamieňať.

V článku pracujeme so štvorstenom $A_1A_2A_3A_4$. Podstatné úvahy sú založené na vzájomnej súvislosti medzi štvorstenom a rovnobežnostenom.

Každý štvorsten vieme umiestniť do rovnobežnostena tak, aby protiľahlé hrany štvorstena boli incidentné so stenovými uhlopriečkami navzájom rovnobežných stien rovnobežnostena. Konštrukcia je založená na posunutí (obr. 3).



Obr. 3 Rovnobežnosten $A_1B_4A_2B_3B_1A_4B_2A_3$ opísaný štvorstenu $A_1A_2A_3A_4$

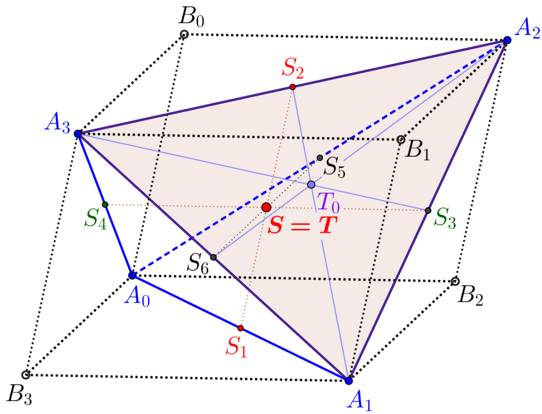
Ak S_1, S_2 sú postupne stredy protiľahlých hrán A_1A_2, A_3A_4, potom v posunutí s vektorom $\overrightarrow{S_1S_2}$ sa hrana A_1A_2 zobrazí do úsečky B_1B_2. Štvoruholník $B_1A_4B_2A_3$ je rovnobežníkom, pretože jeho uhlopriečky B_1B_2, A_3A_4 sa bodom S_2 rozpoľujú. V posunutí s vektorom $-\overrightarrow{S_1S_2}$ sa zase hrana A_3A_4 zobrazí do úsečky B_3B_4, pričom rovnobežník $A_1B_4A_2B_3$ je zhodný s rovnobežníkom $B_1A_4B_2A_3$. Oba štvoruholníky sú podstavami hľadaného rovnobežnostena. Hovoríme, že štvorsten $A_1A_2A_3A_4$ je *vpísaný* do rovnobežnostena $A_1B_4A_2B_3B_1A_4B_2A_3$, prípadne, rovnobežnosten $A_1B_4A_2B_3B_1A_4B_2A_3$ je štvorstenu $A_1A_2A_3A_4$ *opísaný*.

Vlastnosti opísaného rovnobežnostena využijeme v ďalších úvahách.

Ťažisko štvorstena

V zhode s obr. 4 označme postupne S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 a S_6 stredy hrán A_1A_2, A_3A_4, A_2A_3, A_1A_4, A_1A_3, A_2A_4 štvorstena $A_1A_2A_3A_4$ a skúmajme, čo môže znamenať výraz

$$S = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}.$$



Obr. 4 Ťažisko T štvorstena $A_1A_2A_3A_4$ je stredom opísaného rovnobežnostena

Z úpravy

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1 + A_2}{2} + \frac{A_3 + A_4}{2}\right)$$

vyplýva, že bod S je stredom úsečky S_1S_2, ktorú budeme nazývať *stredná priečka štvorstena*. Necháme na čitateľa, aby si analogicky overil, že bod S je taktiež stredom úsečiek S_3S_4 a S_5S_6. Vzhľadom k tomu, že štvoruholník stredovo súmerný podľa priesečníka uhlopriečok je rovnobežník, sú útvary $S_1S_3S_2S_4$, $S_1S_5S_2S_6$ a $S_3S_5S_4S_6$ rovnobežníky so spoločným stredom S.

Z priestorových štvoruholníkov $A_1A_2A_3B_1$ a $A_1A_4B_2B_1$ ďalej vyplývajú vzťahy

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3B_1}, \qquad \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_4B_2} + \overrightarrow{B_2B_1}.$$

Ak tieto vzťahy sčítame, potom vzhľadom k faktom

$$\overrightarrow{A_1A_2} = -\overrightarrow{B_2B_1}, \qquad \overrightarrow{A_3B_1} = -\overrightarrow{A_4B_2}$$

zistíme, že

$$2\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_4}. \tag{1}$$

Po prepise na symbolický tvar a úprave dostaneme vzťah

$$B_1 = \frac{A_1 - A_2 + A_3 + A_4}{2},$$

pomocou ktorého dokážeme, že bod S je stredom telesovej uhlopriečky A_2B_1 opísaného rovnobežnostena:

$$\frac{B_1 + A_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1 - A_2 + A_3 + A_4}{2} + A_2\right) = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4} = S.$$

Analogicky možno ukázať, že aj ostatné telesové uhlopriečky rovnobežnostena $A_1B_4A_2B_3B_1A_4B_2A_3$ majú stred v bode S. Bod S nazývame *stred rovnobežnostena.*[1]

Z doterajších úvah vyplýva veta:

Veta 1

Stredné priečky štvorstena sa pretínajú v strede opísaného rovnobežnostena.

V ďalšom zavedieme pojem *ťažiska* štvorstena a ukážeme, že sa nachádza v strede S opísaného rovnobežnostena.

Ťažiskom úsečky sa rozumie jej stred. Ťažisko trojuholníka sa definuje ako priesečník jeho ťažníc, t.j. úsečiek, ktoré majú jeden krajný bod vo vrchole trojuholníka a druhý v ťažisku protiľahlej strany. Analogicky definujeme *ťažnicu štvorstena* ako úsečku, ktorej jeden krajný bod je vrchol štvorstena a druhý je ťažiskom protiľahlej steny.

Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme o tažnici A_1T_1, kde T_1 je tažisko steny $A_2A_3A_4$ a platí

$$T_1 = \frac{A_2 + A_3 + A_4}{3}.$$

Ukážeme, že vektory $\overrightarrow{A_1T_1}, \overrightarrow{A_1S}$ sú kolineárne. Počítajme:

$$\overrightarrow{A_1T_1} = T_1 - A_1 = \frac{-3A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{3},$$
$$\overrightarrow{A_1S} = S - A_1 = \frac{-3A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}.$$

[1] Všimnime si analógie medzi rovnobežnostenom a rovnobežníkom – oba útvary sú súmerné podľa priesečníka uhlopriečok.

Z uvedených rovností odvodíme

$$\overrightarrow{A_1T_1} = \frac{4}{3}\overrightarrow{A_1S}, \tag{2}$$

čo znamená, že dané vektory sú kolineárne.

Z toho vyplýva aj fakt, že ťažnice štvorstena ležia na telesových uhlopriečkach opísaného rovnobežnostena a teda sa pretínajú v jednom bode – v strede S. Spoločný priesečník ťažníc štvorstena sa nazýva *ťažisko* a zvyčajne sa označuje ako T. Je dané vzťahom

$$T = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4} = S.$$

Vidíme, že súradnice ťažiska T štvorstena $A_1A_2A_3A_4$ vypočítame ako aritmetický priemer súradníc jeho vrcholov. Ide o analógiu rovinného prípadu pre trojuholník, avšak zo vzťahu (2) vyplýva, že ťažisko štvorstena rozdeľuje jeho ťažnice v pomere 3 : 1. Predchádzajúce úvahy teda môžeme zhrnúť do nasledujúcej vety.

Veta 2

Každá ťažnica štvorstena leží na telesovej uhlopriečke jemu opísaného rovnobežnostena, v strede ktorého sa všetky tažnice pretínajú. Tento bod sa nazýva ťažiskom štvorstena a je taktiež spoločným stredom stredných priečok štvorstena. Každá ťažnica A_iT_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ štvorstena je jeho ťažiskom T rozdelená v pomere

$$|A_iT| : |TT_i| = 3 : 1.$$

Ortocentrický štvorsten

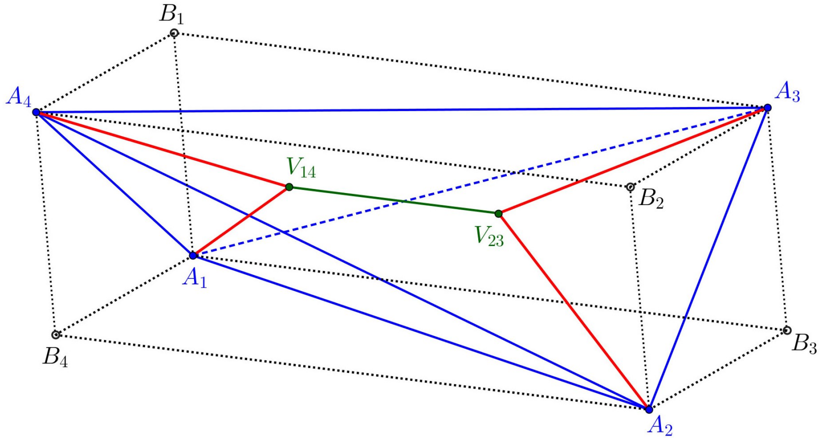
V predchádzajúcej časti sme zdôvodnili existenciu spoločného priesečníka ťažníc a stredných priečok ľubovoľného štvorstena. Teraz preskúmame existenciu spoločného priesečníka výšok štvorstena. Ukáže sa, že analógia s rovinným prípadom trojuholníka nie je oprávnená.

Výškou štvorstena rozumieme jeho telesovú výšku. Analogicky s trojuholníkom má tento termín tri rôzne významy:

1. Výška ako *vzdialenosť* vrchola štvrorstena od roviny tomuto vrcholu protiľahlej steny,
2. výška ako *priamka* – kolmica z vrchola na rovinu protiľahlej steny,

3. výška ako *úsečka* s jedným krajným bodom vo vrchole štvorstena a druhým v päte kolmice z tohto vrchola na rovinu protiľahlej steny.

Každý štvorsten má štyri výšky, ktoré sa (na rozdiel od výšok trojuholníka) ako priamky nemusia pretínať. Analyzujme najprv prípad, kedy sa pretnú dve z nich.



Obr 5 Ak $A_1A_4 \perp A_2A_3$, potom $V_{14} = q_1 \cap q_4$ a $V_{23} = q_2 \cap q_3$

Budeme používať označenie z obr. 5 a označíme q_1 kolmicu z vrchola A_1 na rovinu $A_2A_3A_4$ a zase q_4 kolmicu z vrchola A_4 na rovinu $A_1A_2A_3$. Vyjadríme si priamky parametricky:

$$q_1 \colon X = A_1 + r\overrightarrow{u_1}, \quad q_4 \colon X = A_4 + s\overrightarrow{u_4}, \quad r, s \in \mathbb{R},$$

a budeme hľadať ich priesečník. Vzhľadom k podmienkam kolmosti zvolíme za smerové vektory priamok vektorové súčiny nezávislých vektorov určujúcich príslušné roviny, t.j.

$$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3}, \quad \overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}.$$

Priamky q_1, q_4 sa pretínajú práve vtedy, keď platí $A_1 + r\overrightarrow{u_1} = A_4 + s\overrightarrow{u_4}$. Tento vzťah je ekvivalentný s podmienkou

$$\overrightarrow{A_1A_4} = r\left(\overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3}\right) - s\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right).$$

Skalárnym vynásobením oboch strán rovnice nenulovým vektorom $\overrightarrow{A_2A_3}$ dostávame

$$\overrightarrow{A_1A_4}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=r\left(\overrightarrow{A_4A_2}\times\overrightarrow{A_4A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_2A_3}-s\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=0,$$

pretože zmiešané súčiny, ktoré tu vystupujú, sa rovnajú nule. (Všetky tri vektory každého z týchto súčinov majú začiatočné a koncové body v jednej rovine.)

Výsledok $\overrightarrow{A_1A_4}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=0$ hovorí o tom, že $\overrightarrow{A_1A_4}\perp\overrightarrow{A_2A_3}$.

Uvažujme ešte nepriamo. Nech $\overrightarrow{A_1A_4}\perp\overrightarrow{A_2A_3}$ a výšky q_1, q_4 sú mimobežné. Potom podľa predpokladu neležia vektory $\overrightarrow{A_4A_2}\times\overrightarrow{A_4A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_2}\times\times\overrightarrow{A_1A_3}$ a $\overrightarrow{A_1A_4}$ v jednej rovine. Pre zmiešaný súčin teda platí

$$\left(\left(\overrightarrow{A_4A_2}\times\overrightarrow{A_4A_3}\right)\times\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\neq 0. \tag{3}$$

Vektor $\overrightarrow{A_2A_3}$ je súčasne kolmý k vektorom $\overrightarrow{A_4A_2}\times\overrightarrow{A_4A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}$, preto platí

$$\left(\overrightarrow{A_4A_2}\times\overrightarrow{A_4A_3}\right)\times\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)=k\,\overrightarrow{A_2A_3},\quad k\in\mathbb{R}-\{0\}\,.$$

Dosadíme do vzťahu (3) a dostaneme

$$k\,\overrightarrow{A_2A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\neq 0,$$

čo je spor s predpokladom o kolmosti vektorov $\overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_2A_3}$.

Zhrnieme vyššie uvedené poznatky do vety.

Veta 3

Výšky štvorstena $A_1A_2A_3A_4$ zostrojené z vrcholov A_1, A_4 sa pretínajú vtedy a len vtedy, keď $A_1A_4 \perp A_2A_3$. Ak sa tieto výšky pretínajú, potom sú steny $A_1B_1A_4B_4$, $B_3A_3B_2A_2$ zhodné kosoštvorce alebo štvorce a obrátene.

Kým prvá časť vety vyplýva z predchádzajúcich úvah, druhá je dôsledkom kolmosti $A_1A_4 \perp A_2A_3$ a poznatku, že zo všetkých rovnobežníkov majú navzájom kolmé uhlopriečky len kosoštvorce a štvorce.

Veta 3 uvádza nutnú a postačujúcu podmienku existencie priesečníka dvoch výšok štvorstena. Pozrime sa na túto vetu detailnejšie.

Ak $A_1A_4 \perp A_2A_3$, potom sa výšky z vrcholov A_1, A_4 pretínajú v bode, ktorý označíme V_{14}. Kolmosť je symetrická relácia, preto sa aj výšky z vrcholov A_2,A_3 pretínajú v bode V_{23}. Body V_{14}, V_{23} však nemusia byť totožné.

Veta 4

Ak vo štvorstene $A_1A_2A_3A_4$ je $A_1A_4 \perp A_2A_3$ a $V_{14} \neq V_{23}$, potom platí $\overrightarrow{V_{14}V_{23}} \perp \overrightarrow{A_1A_4}$ a $\overrightarrow{V_{14}V_{23}} \perp \overrightarrow{A_2A_3}$.

Dôkaz. Ukážeme, že skalárny súčin vektorov $\overrightarrow{V_{14}V_{23}}, \overrightarrow{A_1A_4}$ je nulový. Podľa obr. 5 platí

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{14}V_{23}} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} &= \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3V_{23}}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \\ &= \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_3V_{23}} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{V_{14}A_1} \cdot \left(\overrightarrow{A_2A_4} - \overrightarrow{A_2A_1}\right).\end{aligned}$$

Z podmienok kolmosti vektora $\overrightarrow{A_3V_{23}}$ na rovinu $A_1A_2A_4$ a kolmosti vektora $\overrightarrow{V_{14}A_1}$ na rovinu $A_2A_3A_4$ vyplýva

$$\overrightarrow{A_3V_{23}} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{V_{14}A_1} \cdot \overrightarrow{A_2A_4} = 0.$$

Analogicky platí $\overrightarrow{A_4V_{14}} \cdot \overrightarrow{A_2A_1} = 0$, a tak po roznásobení poslednej zátvorky postupne dostávame

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{14}V_{23}} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} &= \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} - \overrightarrow{V_{14}A_1} \cdot \overrightarrow{A_2A_1} = \\ &= \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} - \left(\overrightarrow{A_4A_1} - \overrightarrow{A_4V_{14}}\right) \cdot \overrightarrow{A_2A_1} = \\ &= \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} - \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \\ &= \left(\overrightarrow{A_1A_3} - \overrightarrow{A_1A_2}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \\ &= \overrightarrow{A_2A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = 0.\end{aligned}$$

Platí teda $\overrightarrow{V_{14}V_{23}} \perp \overrightarrow{A_1A_4}$. Analogicky odvodíme, že $\overrightarrow{V_{14}V_{23}} \perp \overrightarrow{A_2A_3}$. □

Veta 5

Vo štvorstene $A_1A_2A_3A_4$, kde $A_1A_4 \perp A_2A_3$, je veľkosť vektora $\overrightarrow{V_{14}V_{23}}$ daná vzťahom

$$\left|\overrightarrow{V_{14}V_{23}}\right|^2 = \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_4A_3} + \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right) \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{23}A_3}\right). \quad (4)$$

Dôkaz. Ponecháme označenie z vety 4. S využitím priestorových štvoruholníkov $V_{14}A_1A_2V_{23}$ a $V_{14}A_4A_3V_{23}$ vyplýva

$$\overrightarrow{V_{14}V_{23}} = \overrightarrow{V_{14}A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{V_{23}A_2}, \quad \overrightarrow{V_{14}V_{23}} = \overrightarrow{V_{14}A_4} + \overrightarrow{A_4A_3} - \overrightarrow{V_{23}A_3}. \quad (5)$$

Platí teda

$$\left|\overrightarrow{V_{14}V_{23}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right) \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} + \overrightarrow{A_4A_3} - \overrightarrow{V_{23}A_3}\right),$$

z čoho vyplýva

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{V_{14}V_{23}}\right|^2 = {} & \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_4A_3} + \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right) \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{23}A_3}\right) + \\ & + \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{23}A_3}\right) + \overrightarrow{A_4A_3} \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right).\end{aligned}$$

Pravá strana posledného vzťahu je súčtom štyroch výrazov. Posledné dva z nich sa rovnajú nule, pretože vektor $\overrightarrow{V_{14}A_1}$ je kolmý na rovinu $A_2A_3A_4$ a vektor $\overrightarrow{V_{23}A_2}$ je kolmý na rovinu $A_1A_3A_4$. Teda vektor $\left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right)$ je kolmý na vektor $\overrightarrow{A_4A_3}$. Z toho vyplýva, že $\left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right) \cdot \overrightarrow{A_4A_3} = 0$.

Analogicky platí $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{23}A_3}\right) = 0$. □

Hovoríme, že štvorsten je *ortocentrický*, ak sa jeho výšky pretínajú v jednom bode. Spoločný priesečník výšok sa nazýva *ortocentrum* a analogicky s rovinným prípadom trojuholníka sa označuje ako V.

Ak vo vete 5 plati $V_{23} = V_{14}$, zjednoduší sa vzťah (4), na tvar

$$0 = \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_4A_3} + \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{14}A_2}\right) \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{14}A_3}\right) = 2\,\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_4A_3}.$$

Tým sme zistili, že pre ortocentrický štvorsten $A_1A_2A_3A_4$ platí

$$A_1A_4 \perp A_2A_3 \quad \text{a} \quad A_1A_2 \perp A_4A_3.$$

Uvažujme ešte obrátene. Nech pre štvorsten $A_1A_2A_3A_4$ platí

$$A_1A_4 \perp A_2A_3 \quad \text{a súčasne} \quad A_1A_2 \perp A_4A_3.$$

Z podmienky $A_1A_4 \perp A_2A_3$ podľa vety 3 vyplýva existencia priesečníkov V_{14} a V_{23}.

Keďže $A_1A_2 \perp A_4A_3$, tak $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_4A_3} = 0$ a podľa vety 5 platí

$$\left|\overrightarrow{V_{14}V_{23}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right) \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{23}A_3}\right).$$

Po substitúciách

$$\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2} = \overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{V_{14}V_{23}} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{23}A_3} = \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{V_{14}V_{23}},$$

ktoré vyplývajú z rovností (5), vzťah upravíme

$$\left|\overrightarrow{V_{14}V_{23}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_3A_4}\right) \cdot \overrightarrow{V_{14}V_{23}} + \left|\overrightarrow{V_{14}V_{23}}\right|^2.$$

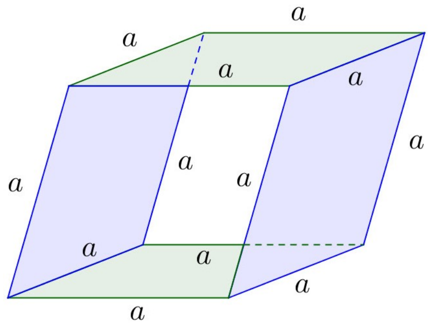
V analógii so vzťahom (1) platí $\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_3A_4} = 2\overrightarrow{B_3A_1}$, a tak nakoniec dostaneme $\overrightarrow{B_3A_1} \cdot \overrightarrow{V_{14}V_{23}} = 0$. Odtiaľ vyplýva, že $V_{14} = V_{23}$. Keby tomu tak nebolo, bol by nenulový vektor $\overrightarrow{V_{14}V_{23}}$ kolmý k trom lineárne nezávislým vektorom $\overrightarrow{B_3A_1}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ a $\overrightarrow{A_2A_3}$ a to nie je možné.

Predchádzajúce úvahy opäť zhrnieme do vety.

Veta 6

Štvorsten je ortocentrický vtedy a len vtedy, keď má dve dvojice kolmých protiľahlých hrán.

Z rovnobežníkov má kolmé uhlopriečky len kosoštvorec alebo štvorec. Pomocou obr. 6, na ktorom sú zvýraznené (koso)štvorcové steny, ľahko overíme, že rovnobežnosten s dvomi dvojicami protiľahlých stien tvaru kosoštvorca alebo štvorca má všetky hrany rovnakej dĺžky. Naviac sú zvyšné steny zhodné kosoštvorce alebo štvorce a tie ich uhlopriečky, ktoré sú protiľahlýmu hranami vpísaného štvorstena, sú navzájom kolmé. Útvar má tvar romboédra alebo kocky.



Obr. 6 Časť hranice rovnobežnostena opísaného ortocentrickému štvorstenu

Platí teda:

Veta 7

Štvorsten je ortocentrický vtedy a len vtedy, keď jemu opísaný rovnobežnosten má navzájom zhodné hrany.

Veta 8

Ak pre štvorsten $A_1A_2A_3A_4$ platí $A_1A_4 \perp A_2A_3$ a $A_1A_2 \perp A_3A_4$, potom tiež $A_1A_3 \perp A_2A_4$.

Na základe vety 7 vidíme, že existencia spoločného priesečníka výšok štvorstena určuje zaujímavý druh opísaného rovnobežnostena. Skúsme ešte určiť dĺžku jeho hrán.

Označme postupne d, e, f dĺžku hrany a dĺžky uhlopriečok ľubovoľnej steny rovnobežnostenu opísaného ortocentrickéhu štvorstenu. Podľa vety o dĺžkach strán a uhlopriečok rovnobežníka platí[2]

$$4d^2 = e^2 + f^2. \tag{6}$$

Pre každú stenu uvažovaného rovnobežnostena má ľavá strana vzťahu (6) rovnakú hodnotu, kdežto

$$\{e, f\} \in \big\{\{|A_1A_2|, |A_3A_4|\}, \{|A_1A_3|, |A_2A_4|\}, \{|A_1A_4|, |A_2A_3|\}\big\}.$$

Dosadením dĺžok hrán štvorstena do (6) za hodnoty e, f a porovnaním pravých strán získaných rovností zistíme, že ortocentrický štvorsten spĺňa vzťah

$$|A_1A_2|^2 + |A_3A_4|^2 = |A_1A_4|^2 + |A_2A_3|^2 = |A_1A_3|^2 + |A_2A_4|^2 .$$

Opäť je na mieste otázka, či tento vzťah pre dĺžky hrán opísaného rovnobežnostena podmieňuje aj existenciu ortocentra štvorstena. Počítajme nasledovne:

$$|A_1A_2|^2 + |A_3A_4|^2 = |A_1A_4|^2 + |A_2A_3|^2 ,$$
$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_1A_4} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{A_2A_3} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} - \overrightarrow{A_3A_4} \cdot \overrightarrow{A_3A_4},$$
$$\left(\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_1A_4}\right) \cdot \left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \left(\overrightarrow{A_2A_3} - \overrightarrow{A_3A_4}\right) \cdot \left(\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}\right),$$
$$-\overrightarrow{A_2A_4} \cdot \left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \left(\overrightarrow{A_2A_3} - \overrightarrow{A_3A_4}\right) \cdot \overrightarrow{A_2A_4},$$

[2] Ak čitateľ vetu nepozná, isto dokáže vzťah 6 odvodiť s využitím Pytagorovej vety a vlastností uhlopriečok kosoštvorca alebo štvorca.

$$0 = \overrightarrow{A_2A_4} \cdot \left(\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} \right) + \left(\overrightarrow{A_4A_3} - \overrightarrow{A_4A_1} \right) \right),$$
$$0 = 2\, \overrightarrow{A_2A_4} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}.$$

Z poslednej rovnosti vyplýva, že nenulové vektory $\overrightarrow{A_2A_4}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ sú na seba kolmé.

Analogicky by sme dokázali aj kolmosť ďalšej dvojice protiľahlých hrán. To znamená, že pre ortocentrický štvorsten máme ďalšiu nutnú a postačujúcu podmienku. Uvedieme ju ako vetu.

Veta 9

Štvorsten $A_1A_2A_3A_4$ je ortocentrický vtedy a len vtedy, keď platí

$$|A_1A_2|^2 + |A_3A_4|^2 = |A_1A_4|^2 + |A_2A_3|^2 = |A_1A_3|^2 + |A_2A_4|^2 .$$

Záver

Výučbe geometrie, a najmä stereometrie, nie je na školách venovaná taká pozornosť ako v minulosti. Termín štvorsten sa z učebníc pomaly vytráca a je nahrádzaný pojmom trojboký ihlan. Hoci ide o to isté teleso, z didaktického hľadiska je medzi nimi podstatný rozdiel. Pri budovaní predstavy trojbokého ihlana vychádzame zo štandardného umiestnenia telesa a rozlišujeme trojuholníkovú podstavu (základňu) od bočných stien. Vrchol ihlana má v porovnaní s vrcholmi podstavy výnimočnejšie miesto. Keď model nepravidelného trojbokého ihlana položíme na bočnú stenu, zmení sa jeho podstava a vrchol. Tento prístup obmedzuje rozvoj priestorových predstáv. Stretávame sa aj s učiteľmi matematiky, ktorí si nedokážu predstaviť pravidelný štvorsten vpísaný do kocky.

Náš príspevok si kládol za cieľ zoznámiť, najmä mladších čitateľov, s niektorými základnými vlastnosťami štvorstenov metódou práce s vektormi ako s orientovanými úsečkami. Táto métoda sa v školách veľmi nepoužíva, hoci ide o vhodný prostriedok k rozvoju geometrického myslenia. Prispieva k spojeniu analytickej a syntetickej geometrie do jedného celku a naviac, má široké uplatnenie vo fyzike a v praxi.

Dúfame, že článok aspoň trochu obohatil čitateľa, a že bude pre učiteľov inšpiráciou pre prácu s talentovanými žiakmi v nepovinnej matematike.

Poďakovanie. Autorovi je milou povinnosťou poďakovat RNDr. Pavlovi Leischnerovi, PhD. z PF JU v Českých Budějoviciach za mnohé cenné rady a pripomienky, ktoré podstatným spôsobom pomohli vylepšiť pôvodné znenie rukopisu.

Literatúra

[1] *Bartsch, H.-J.*: Matematické vzorce. SNTL, Praha, 1963.

[2] *Leischner, P.*: Geometrická zobrazení. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2010.

[3] *Pavlovičová, G. – Vidermanová, K.*: Niektoré riešenia úlohy o ťažisku štvorstena. Acta mathematica **8**, FPV UKF, Nitra, (2005).

[4] *Šrubař, J.*: Vlastnosti trojuhelníka a jejich analogie pro štyřstěn. In: Sborník příspěvků z 25. Konference o geometrii a počítačové grafice, JSMF, Praha, 2005.

[5] *Vaguten, V. N.*: Srednie linii. Kvant **6** (1989).

[6] *Šrubař, J.*: Prostorová zobecnění vlastností trojúhelníka. In: Sborník příspěvků 24. konference o geometrii a počítačové grafice, VŠB-TU, Ostrava, 2004.

[7] *Pavlovičová, G.*: Niektoré úlohy na štvorsten riešené na strednej škole. Acta mathematica **5**, UKF, Nitra, (2002).

[8] *Pavlovičová, G. – Rumanová, L.*: Štvorsten a jeho vlastnosti, aplikácie. Acta mathematica **12**, UKF, Nitra, (2009).

[9] *Vallo, D.*: Klasifikácia štvorstenov podľa im opísaných rovnobežnostenov. In: Nové trendy výučby stereometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky, UKF, Nitra, 2012.

Cestou necestou ke kombinatorice

PAVEL ŠALOM – MICHAL ROLÍNEK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Cesty ke kombinatorice jsou určitě rozmanité a nevyzpytatelné, místy krásné, místy pochmurné a slepé. Jednu z takových cest výstižně popsal student učitelství, jehož slova jsme si vypůjčili z publikace [1]. „Kombinatorika je ako športka. Nikdy neviem či vziať vzorec na kombinácie, variácie alebo permutácie. Zvyčajně netrafím. Nemám tu pevnú pôdu pod nohami, preto kombinatoriku nemám rád.“ Domníváme se, že příčinou jeho nechuti