Literatúra

[1] *Bartsch, H.-J.*: Matematické vzorce. SNTL, Praha, 1963.

[2] *Leischner, P.*: Geometrická zobrazení. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2010.

[3] *Pavlovičová, G. – Vidermanová, K.*: Niektoré riešenia úlohy o ťažisku štvorstena. Acta mathematica **8**, FPV UKF, Nitra, (2005).

[4] *Šrubař, J.*: Vlastnosti trojuhelníka a jejich analogie pro štyřstěn. In: Sborník příspěvků z 25. Konference o geometrii a počítačové grafice, JSMF, Praha, 2005.

[5] *Vaguten, V. N.*: Srednie linii. Kvant **6** (1989).

[6] *Šrubař, J.*: Prostorová zobecnění vlastností trojúhelníka. In: Sborník příspěvků 24. konference o geometrii a počítačové grafice, VŠB-TU, Ostrava, 2004.

[7] *Pavlovičová, G.*: Niektoré úlohy na štvorsten riešené na strednej škole. Acta mathematica **5**, UKF, Nitra, (2002).

[8] *Pavlovičová, G. – Rumanová, L.*: Štvorsten a jeho vlastnosti, aplikácie. Acta mathematica **12**, UKF, Nitra, (2009).

[9] *Vallo, D.*: Klasifikácia štvorstenov podľa im opísaných rovnobežnostenov. In: Nové trendy výučby stereometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky, UKF, Nitra, 2012.

Cestou necestou ke kombinatorice

PAVEL ŠALOM – MICHAL ROLÍNEK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Cesty ke kombinatorice jsou určitě rozmanité a nevyzpytatelné, místy krásné, místy pochmurné a slepé. Jednu z takových cest výstižně popsal student učitelství, jehož slova jsme si vypůjčili z publikace [1]. „Kombinatorika je ako športka. Nikdy neviem či vziať vzorec na kombinácie, variácie alebo permutácie. Zvyčajně netrafím. Nemám tu pevnú pôdu pod nohami, preto kombinatoriku nemám rád.“ Domníváme se, že příčinou jeho nechuti ke kombinatorice je formální poznání. Čtveřici vzorců

$$P(n) = n!,$$
$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!},$$
$$V'_k(n) = n^k,$$
$$C_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

vnímáme jako pochmurnější, možná až slepou, cestu ke kombinatorice.

V chystaném výukovém materiálu o kombinatorice proto chceme nabídnout jinou cestu. Chceme podněcovat objevování, různé řešitelské strategie a předkládat zajímavé výzvy. V první řadě nám jde o aktivní zapojení studentů do procesu, při kterém se „dělá matematika". Například to znamená, že preferujeme prvně práci s určitým jevem a až poté jeho pojmenování nebo případně shrnutí pomocí vzorce. Naším přáním je nedávat návody, ale podněcovat k tvořivému a logickému myšlení.

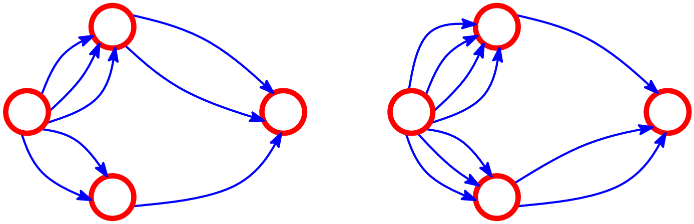
Rozhodli jsme se, že kombinatorické úlohy budeme předkládat ve čtyřech skupinách. Jednou z těchto skupin jsou úlohy, které se točí kolem počítání cest mezi městy a právě tuto skupinu představíme. Města symbolicky kreslíme pomocí koleček a linky pomocí šipek. Z pohledu matematiky jde vlastně o objekty z teorie grafů. Podívejme se již na samotné úlohy.

Úloha 1

a) V obou plánech určete počet různých cest z města nejzápadnějšího do nejvýchodnějšího.

b) Kterou linku je třeba v pravém plánu zrušit, aby počty cest z nejzápadnějšího města do nejvýchodnějšího byly v obou plánech stejné?

c) Přidejte do levého plánu jednu linku tak, aby počty cest z nejzápadnějšího města do nejvýchodnějšího byly v obou plánech stejné. Nalezněte dva různé způsoby.

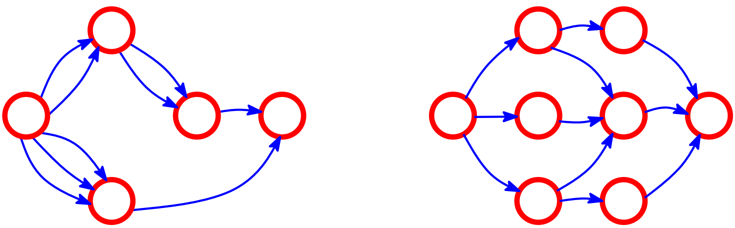


Komentář. Vzhledem k tomu, že cest je málo, první a zcela přirozenou strategií řešení části a) je cesty jednoduše začít počítat. Často přitom dojde k rozdělení na „horní“ a „dolní“ cesty. Tím se přirozeně objeví kombinatorické pravidlo součtu.

Části b) a c) lze řešit metodou pokus – omyl. Počítání cest v několika podobných situacích dává žákům zkušenosti a zároveň vytváří potřebu rychleji počet cest spočítat. To vede k sofistikovanější strategii, která začne používat i kombinatorické pravidlo součinu. Pak je počet cest v levém plánu $3 \cdot 2 + 2$. Pro řešení části c) potom zjišťujeme, které z čísel $4 \cdot 2 + 2$, $3 \cdot 3 + 2$, $3 \cdot 2 + 3$, $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2$ je 10. To nám dá dvě řešení části c).

Úloha 2

U každého z měst určete, kolik do něj vede různých cest z města nejzápadnějšího. Výsledky vepisujte do kroužků.



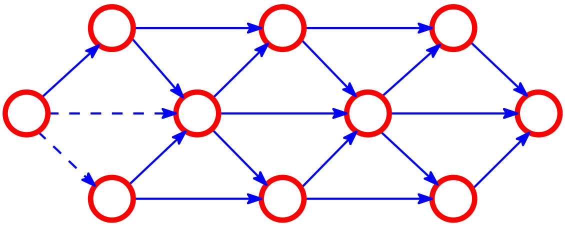
Komentář. Úloha nabízí další možnou strategii pro počítání cest. Tentokráte jde o jakýsi „tok čísel“. Chceme-li zjistit číslo ve vybraném kroužku, potřebujeme znát čísla ve všech kroužcích, ze kterých směřuje šipka do kroužku vybraného. Tento proces usnadňuje porozumění například kombinatorickému pravidlu součinu, které začne být náročnější, násobí-li se více než dvě čísla.

Úloha 3

a) Rozhodněte, kterou z linek vyznačených přerušovanou šipkou máme zrušit, aby se počet cest z nejzápadnějšího města do nejvýchodnějšího snížil méně.

b) Pro každé z měst určete, kolik do něj vede různých cest z města nejzápadnějšího (bez rušení jediné linky).

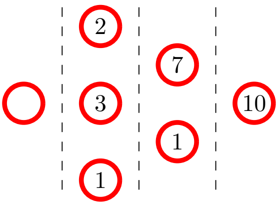
c) Pokud jste počítali správně, vyšla vám v části b) v prostředním řádku tři prvočísla. Rozhodněte, zda by vycházela prvočísla i dále, pokud bychom soustavu linek prodloužili ve stejném duchu.

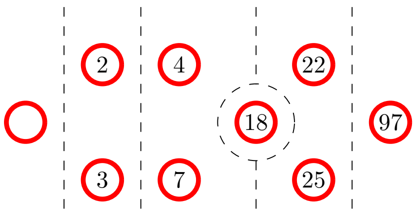


Komentář. V části c) máme rozhodnout tvrzení, pro jehož platnost není žádný „pádný důvod“. Po prodloužení linek se ukáže, že hned další číslo v prostředním řádku není prvočíslo. Je zajímavé, že při testování úloh mnoho žáků tvrdilo, že prvočísla budou vycházet pořád.

Úloha 4

Čísla v kroužcích značí, kolika různými způsoby se do daného města lze dostat z toho nejzápadnějšího. Doplňte linky tak, že každá z nich směřuje ze západu na východ a protíná přesně jednu přerušovanou čáru.





Komentář. Jde o úlohu inverzní k předchozím úlohám. Podobné úlohy považujeme za výzvu, protože je nelze řešit zcela mechanicky. Přitom jsou dostatečně jednoduché na to, aby i slabší žáci zažili při řešení úspěch a lze je zkomplikovat tak, aby byly výzvou i pro dobré žáky.

Při této řešení úlohy vlastně řešíme dílčí úlohy následujícího typu: Najděte všechna přirozená čísla x, y, pro něž platí

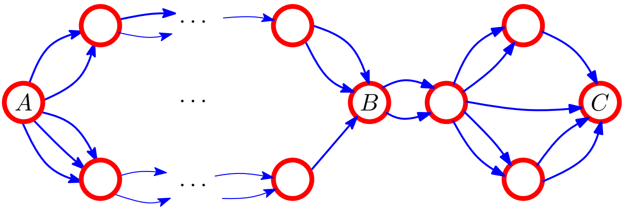
$$22x + 25y = 97.$$

Čísly x a y jsme si označili počty cest vedoucí do nejvýchodnějšího města na obrázku vpravo. Řešíme tedy vlastně lineární diofantovské rovnice. Strategie pro řešení této podúlohy může být například taková, že od čísla 97 odčítáme číslo 25 tak dlouho, dokud nedostaneme číslo dělitelné 22.

Během testování úloh jsme zprvu nepoužili přerušované čáry, což vedlo k obrovskému množství různých řešení. Toho se dá využít k podpoře tvořivého myšlení. Pravděpodobně se pak objeví i „degenerovaná“ řešení, v nichž všechny cesty vedou z města západního (například do nejvýchodnějšího města tak vede všech 97 cest z města západního).

Úloha 5

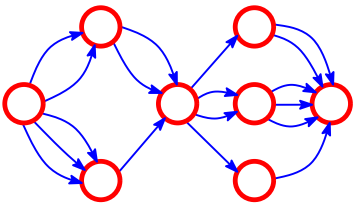
Kolikrát více způsoby se lze dostat z města A do města C než z města A do B?



Komentář. Tato úloha připravuje náročnou myšlenku – pracovat s neznámým počtem. Označíme-li počet způsobů, kterými se lze dostat z A do B, jako x, pak z A do C se lze dostat $x\cdot(2\cdot(2\cdot1+1+2\cdot2)) = 14x$ způsoby. Jde vlastně o podobnou myšlenku, jako když počítáme počet neuspořádaných trojic. Ten nepočítáme přímo, ale řekneme, že neuspořádanou trojici lze uspořádat $3\cdot2\cdot1$ způsoby. Potom vypočítáme počet uspořádaných trojic. Tato obecná myšlenka bývá pro žáky dosti náročná, proto se snažíme dopřát jim s touto myšlenkou zkušenosti.

Úloha 6

Která linka je pro následující leteckou síť *nejdůležitější* (tj. její zrušení způsobí největší úbytek cest z nejzápadnějšího města do nejvýchodnějšího)?



Komentář. Zde je zajímavá volba strategie. Pracnější strategií je projít všechny možnosti. Po odebrání vybrané linky umíme spočítat počet cest.

Vybereme-li postupně každou linku, najdeme řešení. Pomoci může i určitá intuice, která nám prozradí, že odebrání některých linek způsobí jen malý úbytek.

Sofistikovanější strategií je spočítat počet cest jako

$$(2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1).$$

Odebrat jednu linku znamená vybrat si v tomto výrazu jedno číslo, které snížíme o 1. Jsou-li v součinu dvě různá čísla, je výhodnější snížit to menší (např. součin $2 \cdot 3$ se vyplatí snížit na $1 \cdot 3$). Chceme si v každé závorce vybrat takový součin, který obsahuje největší číslo. V levé závorce je to součin $3 \cdot 1$, v pravé závorce součin $2 \cdot 3$. V obou případech se hodnota součinu zmenší o 3. Celkový počet cest se tak změní buď o trojnásobek hodnoty výrazu v pravé závorce, nebo o trojnásobek hodnoty výrazu v levé závorce.

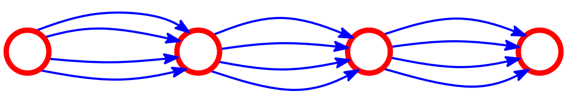
Z těchto úvah vyplývá, že největší úbytek cest způsobí snížení na $(2 \cdot 2 + 3 \cdot 0) \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1)$.

Úloha 7

Petr a Dan hrají hru. Hráči v následujícím plánu střídavě ruší jednu z linek. Petr hraje první. Vítězí ten, po jehož tahu již není východní město ze západního dostupné.

a) Kdo z hráčů si může zajistit výhru bez ohledu na to, jaké tahy volí druhý hráč?

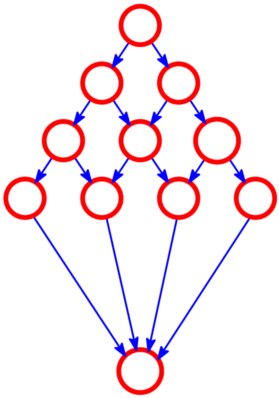
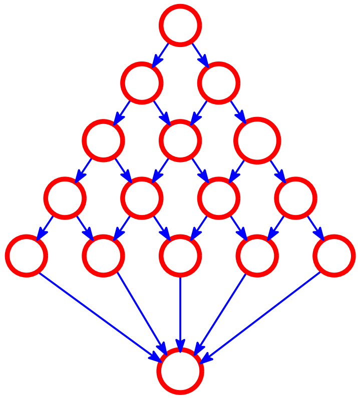
b) Pokud budou oba hráči hrát bez chyb (tj. tak, aby co nejrychleji vyhráli či alespoň co nejvíce oddálili prohru), kolik nejvíce tahů může hra mít?



Komentář. Linky lze využít i pro kombinatorické hry. V této hře prohraje ten hráč, který bude na tahu v situaci, kdy jsou každá dvě sousední města spojena už jen dvěma linkami. Takovou situaci může vynutit Dan například tak, že kdykoliv Petr zruší linku mezi nějakými dvěma městy, Dan odpoví zrušením linky mezi týmiž městy.

Úloha 8

Určete, kolika způsoby se můžeme dostat do každého města z města nejseverněji položeného. Nalezené hodnoty vpisujte do kroužků.

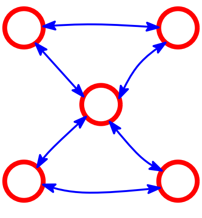
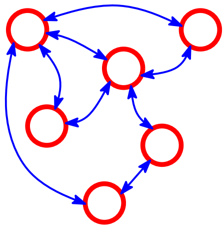
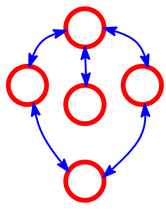
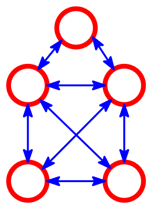
Komentář. Síť měst má stejnou strukturu jako Pascalův trojúhelník. Pomocí podobných úloh si mohou žáci rovněž uvědomit vztah

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

K důkladnému porozumění je samozřejmě potřeba mít předem rozmyšleno, že počet způsobů, jakými lze po šipkách dojít do vybraného města, odpovídá přesně příslušnému kombinačnímu číslu.

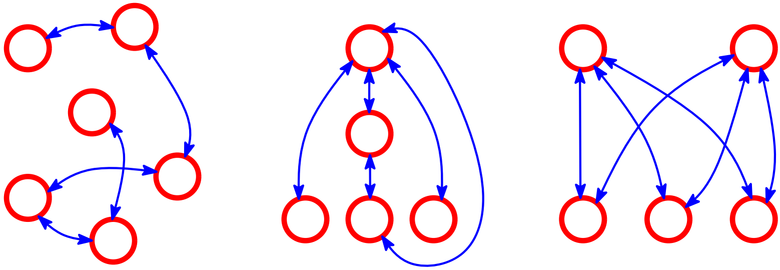
Úloha 9

Letecký inspektor se chystá na okružní let, v němž hodlá prověřit každou leteckou linku. Rozhodněte, ve kterých leteckých sítích se mu to může podařit, aniž by nějakou linku využil vícekrát (takové linky nazveme *průchodné*).

Úloha 10

V následujících sítích přikreslete vždy jednu linku tak, aby se sítě staly průchodnými.



Komentář. Předchozí dvě úlohy zkoumají grafy, které se běžně nazývají eulerovské. Pomocí série úloh žáci objeví, že pro uskutečnění okružního letu je potřeba, aby z každého města vedl sudý počet obousměrných linek. Je totiž potřeba odletět z každého města, do kterého přiletíme (a to i opakovaně). Ve skutečnosti platí i obrácené tvrzení – pokud z každého města vede sudý počet obousměrných linek, pak je možné okružní let uskutečnit. Důkaz obráceného tvrzení je už přece jen o něco málo náročnější, i když pro středoškoláky zvládnutelný.

V tradiční výuce bohužel není na podobná témata příliš času, ale chceme ukázat, že „prostředí" cest má potenciál i tímto směrem.

Úloha 11

Navrhněte leteckou síť, v níž se lze z každého města do každého dostat pomocí jedné či více navazujících linek. Síť přitom nemá být průchodná a nemá se stát průchodnou ani po přidání a) jakékoliv linky, b) dvou jakýchkoliv linek, c) 2014 jakýchkoliv linek. Všechny linky jsou obousměrné.

Komentář. Úloha poskytuje značný prostor, protože není jasné, odkud se do ní pustit. Tím se stává i o něco náročnější než předchozí úlohy. Nicméně v momentě, kdy už víme, že pro uskutečnění okružního letu je potřeba, aby z každého města vedl sudý počet linek, je řešení nasnadě. Pro řešení části a) stačí nakreslit libovolnou síť, v níž alespoň ze čtyř měst povede lichý počet linek. Pro řešení části b) potřebujeme takových měst alespoň šest a pro řešení části c) dokonce 4 030. Příkladem vhodné letecké sítě může být „hvězdice", v níž je jedno město centrální a každé jiné město je spojeno jen a pouze s centrálním městem.

Poděkování. Tento článek vznikl v rámci projektu SVV 2014-260105. Výzkum byl podpořen Grantovou agenturou Univerzity Karlovy v Praze (projekt č. 1250213).

Literatura

[1] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky 2, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1990.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 12. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz.* Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 207

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$(a+9)\left(a^2+\frac{1}{a}+\frac{b^2}{8}\right)\geq(a+b+1)^2.$$

Kdy nastane rovnost?

Robert Geretschläger (Graz)

Úloha 208

Dokažte, že ze sedmi libovolně zvolených přirozených čísel lze vybrat čtyři tak, že jejich součet je dělitelný číslem 4.

Józef Kalinowski (Kalety)

Dále uvádíme řešení úloh 201 až 204, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním a druhém čísle letošního (23.) ročníku našeho časopisu.