Poděkování. Tento článek vznikl v rámci projektu SVV 2014-260105. Výzkum byl podpořen Grantovou agenturou Univerzity Karlovy v Praze (projekt č. 1250213).

Literatura

[1] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky 2, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1990.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 12. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 207

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$(a+9)\left(a^2+\frac{1}{a}+\frac{b^2}{8}\right) \geq (a+b+1)^2.$$

Kdy nastane rovnost?

Robert Geretschläger (Graz)

Úloha 208

Dokažte, že ze sedmi libovolně zvolených přirozených čísel lze vybrat čtyři tak, že jejich součet je dělitelný číslem 4.

Józef Kalinowski (Kalety)

Dále uvádíme řešení úloh 201 až 204, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním a druhém čísle letošního (23.) ročníku našeho časopisu.

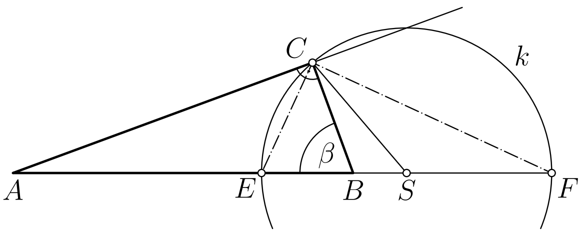
Úloha 201

V nerovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku ABC protne osa vnitřního úhlu a osa vnějšího úhlu při vrcholu C přeponu po řadě v bodech E a F. Dokažte, že platí

$$|AE| \cdot |AF| + |BE| \cdot |BF| > |AB|^2.$$

Jaroslav Zhouf

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|AC| > |BC|$, tj. pro velikost vnitřního úhlu při vrcholu B trojúhelníku ABC platí $\beta > 45°$. Bod F je potom bodem polopřímky opačné k polopřímce BA. Osy vnitřního a vnějšího úhlu jsou kolmé, trojúhelník EFC je tedy pravoúhlý a střed S přepony EF je středem kružnice k jemu opsané. Velikost úhlu CEB je $135° - \beta$, trojúhelník ESC je rovnoramenný, proto velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu C je také $135° - \beta > 45° = |\sphericalangle ECB|$ a bod S je tedy opět bodem polopřímky opačné k polopřímce BA.



Užitím věty o mocnosti bodu vzhledem ke kružnici k pro body A a B dostaneme

$$\begin{aligned} |AE| \cdot |AF| &= |AS|^2 - |ES|^2, \\ |BE| \cdot |BF| &= |ES|^2 - |BS|^2. \end{aligned}$$

Sečtením těchto vztahů konečně získáme

$$\begin{aligned} &|AE| \cdot |AF| + |BE| \cdot |BF| = |AS|^2 - |BS|^2 = \\ &= (|AS| - |BS|)(|AS| + |BS|) = |AB|(|AB| + 2|BS|) > |AB|^2, \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně a *Jozef Mészáros* z Jelky.

Úloha 202

V aritmetické posloupnosti platí pro jistá přirozená čísla k a l

$$a_k = 2l + k \qquad \text{a} \qquad a_l = 2k + l.$$

Najděte všechny takové posloupnosti.

Stanislav Trávníček

Řešení. Pro členy aritmetické posloupnosti s diferencí d a počátečním členem a_1 platí

$$a_k = a_1 + d(k-1) \qquad \text{a} \qquad a_l = a_1 + d(l-1).$$

Proto

$$a_k - a_l = d(k-l).$$

Podle zadání ovšem platí

$$a_k - a_l = (2l + k) - (2k + l) = l - k.$$

Odtud vidíme, že buď $d = -1$ nebo $k = l$.

V případě $d = -1$ pro člen a_k platí

$$a_1 - (k-1) = a_k = 2l + k,$$

tedy $a_1 = 2(k+l) - 1$ a pro libovolný n-tý člen a_n této posloupnosti platí

$$a_n = 2(k+l) - 1 - (n-1) = 2(k+l) - n.$$

V případě $k = l$ je řešením libovolná aritmetická posloupnost, ve které pro její k-tý člen platí $a_k = 3k$.

V případě $k \neq l$ vyhovuje zadání jediná posloupnost

$$\big(2(k+l) - n\big)_{n=1}^{\infty},$$

v případě $k = l$ je řešením libovolná aritmetická posloupnost, ve které pro její k-tý člen platí $a_k = 3k$.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Anton Hnáth* z Moravan.

Neúplné řešení zaslal: *František Jáchim* z Volyně.

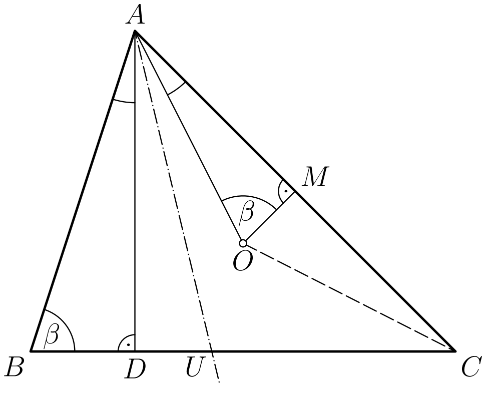
Úloha 203

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a D pata jeho výšky z vrcholu A na stranu BC. Dokažte, že osa úhlu CAB je rovněž osou úhlu DAO.

Erich Windischbacher (Graz)

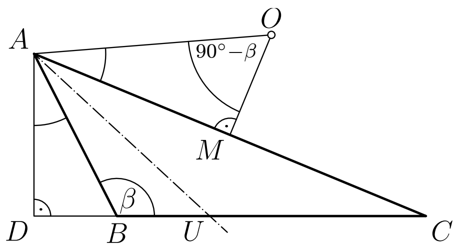
Řešení. Označme M střed strany AC. Uvažujme tři případy pro velikost vnitřního úhlu β při vrcholu B.

Nechť $\beta < 90°$. V tomto případě je bod D bodem polopřímky BC a bod O bodem poloroviny ACB. Velikost středového úhlu AOC příslušného obvodovému úhlu ABC na kružnici trojúhelníku ABC opsané je 2β. Ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků AOM a COM je pak velikost úhlu AOM rovna β (viz obr. 1). Podle věty (uu) jsou pravoúhlé trojúhelníky ABD a AOM podobné, tedy jejich vnitřní úhly BAD a OAM jsou shodné. Odtud již plyne dokazované tvrzení, že osa úhlu CAB je rovněž osou úhlu DAO.



Obr. 1

V případě $\beta > 90°$ se obdobným způsobem dokáže podobnost trojúhelníků ABD a AOM (viz obr. 2).



Obr. 2

Bod D je přitom bodem polopřímky opačné k polopřímce BC a bod O je bodem poloroviny opačné k polorovině ACB. Odkud již opět plyne dokazované tvrzení.

V případě $\beta = 90°$ splyne bod D s bodem B a bod O s bodem M a tvrzení zřejmě platí.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Úloha 204

Nechť pro reálná čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2014}$ současně platí

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{2014} \geq 0 \qquad \text{a} \qquad a_{54}^2 + a_{55}^2 + \ldots + a_{2014}^2 \geq \frac{19}{2}.$$

Dokažte, že platí nerovnost

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2014} \geq \sqrt{2014}.$$

Může v této nerovnosti nastat rovnost?

Jozef Mészáros

Řešení. Pokud by $a_{53} = 0$, platilo by vzhledem k uspořádání

$$a_{54} = a_{55} = \ldots = a_{2014} = 0,$$

což je ve sporu s nerovností pro tyto členy. Proto $a_{53} > 0$. Označme dále

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014}.$$

Z nerovnosti $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{53}$ plyne

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{53} \geq 53\, a_{53}. \tag{1}$$

Pro libovolné přirozené číslo m ($54 \leq m \leq 2014$) plyne z nerovnosti $a_{53} \geq a_m \geq 0$ také nerovnost $a_m^2 \leq a_{53}a_m$, přičemž rovnost nastává v případě $a_m = a_{53}$ nebo $a_m = 0$. Podle zadání užitím těchto nerovností platí

$$\frac{19}{2} \leq a_{54}^2 + a_{55}^2 + \ldots + a_{2014}^2 \leq a_{53}\,(a_{54} + a_{55} + \ldots + a_{2014}). \tag{2}$$

Z nerovností (1) a (2) plyne

$$s = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{53}) + (a_{54} + a_{55} + \ldots + a_{2014}) \geq 53\, a_{53} + \frac{19}{2\, a_{53}}.$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dále platí

$$s \geq 53\,a_{53} + \frac{19}{2\,a_{53}} \geq 2\sqrt{53\,a_{53} \cdot \frac{19}{2\,a_{53}}} = \sqrt{2014},$$

což jsme měli dokázat.

Rovnost zde nastane, právě když nastane rovnost ve všech užitých nerovnostech. V užité nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem tedy platí

$$53\,a_{53} = \frac{19}{2\,a_{53}}.$$

Odtud

$$a_{53} = \sqrt{\frac{19}{106}}.$$

V nerovnosti (1) nastane rovnost, právě když

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{53},$$

a v nerovnosti (2) nastane rovnost, právě když existuje přirozené číslo m ($54 \leq m \leq 2014$) takové, že současně platí

$$a_{54} = a_{55} = \ldots = a_m = a_{53},$$

$$a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_{2014} = 0,$$

$$\frac{19}{2} = a_{54}^2 + a_{55}^2 + \ldots + a_m^2 = (m-53)\,a_{53}^2 = (m-53)\,\frac{19}{106}.$$

Odtud již snadno vidíme $m = 106$. Proto nastane v dokazované nerovnosti rovnost, právě když

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{106} = \sqrt{\frac{19}{106}} \qquad \text{a} \qquad a_{107} = a_{108} = \ldots = a_{2014} = 0.$$

Správná řešení zaslal: *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Pavel Calábek