

Poděkování. Článek vznikl za podpory projektu *The relationships between skills, schooling and labor market outcomes: A longitudinal study* (No. P402/12/G130), financovaného Grantovou agenturou České republiky.

Literatura

- [1] *Kraus, I.*: Fyzika v kulturních dějinách Evropy – od Leonarda ke Goethovi. Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha, 2007.
- [2] *Doležalová, J.*: Produkty a efekty edukace. In: Průcha, J. (Ed.): Pedagogická encyklopedie. Portál, Praha, 2009, s. 223–229.
- [3] *Hejný, M., Jirotková, D. a kol.*: Úlohy pro rozvoj matematické gramotnosti – utváření kompetencí žáků na základě zjištění šetření PISA 2009, ČŠI, Praha, 2012.
- [4] <http://www.niqes.cz/Co-je-NIQES>.
- [5] *Žák, V.*: Důvody, proč se čeští žáci učí fyziku. Pedagogika, roč. 59, č. 3, (2009), s. 269–282.
- [6] *Dvořák, L. a kol.*: Lze učit fyziku zajímavěji a lépe? Matfyzpress, Praha, 2008.
- [7] *Anděl, J.*: Statistické metody. Matfyzpress, Praha, 2003.
- [8] *Svoboda, E., Kolářová, R.*: Didaktika fyziky základní a střední školy – vybrané kapitoly. Karolinum, Praha, 2006.
- [9] *Kalhous, Z., Obst, O.*: Školní didaktika. Portál, Praha, 2002.

Astrofyzikální termodynamika ve výuce fyziky na středních školách

VLADIMÍR ŠTEFL

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Termodynamika je fyzikální disciplína zabývající se obecnými vlastnostmi a zákonitostmi makroskopických soustav, zejména procesy spojenými s tepelnou výměnou a transformacemi různých forem energie. Historicky vznikla z praktických potřeb lidstva spojených se zvýšením účinnosti

parních strojů v první průmyslové revoluci. Postupně se ukázalo, že má uplatnění mnohem širší. V článku uvedeme využití termodynamiky při studiu hvězd, kosmických těles tvořených souborem částic držených pohromadě gravitační silou. Proto se v tomto případě používá termín tzv. gravitační termodynamika. Závěry z ní vyplývající jsou často velmi paradoxní, podstatně rozšiřují klasické pozemské představy.

Přestože nelze přímo studovat plazma v nitru hvězd, můžeme spolehlivě zkoumat jejich obecné termodynamické vlastnosti a odpovídat na otázky:

- Jak hvězdy pracují a jaká je jejich termodynamika?
- Lze ochlazovat hvězdy hlavní posloupnosti?
- Proč termojaderné hoření v nitru hvězd nepřechází do explozivního?
- Jak rozumět tvrzení o záporné měrné tepelné kapacitě hvězd?
- Platí toto vyjádření pro všechny etapy vývoje hvězd?
- Mohou hvězdy při svém vývoji měnit zápornou měrnou tepelnou kapacitu na kladnou a naopak?
- Je teorie vývoje hvězd v souladu s termodynamikou?

Uvedené otázky vyložíme v souvislosti s interpretací základních vývojových etap hvězd – jejich vzniku, pobytu na hlavní posloupnosti a závěrečných stadií. Budeme přitom vycházet z termodynamických úvah a aplikace jednoduché viriálové věty, která má zásadní význam pro pochopení vlastností hvězd v hydrostatické a tepelné rovnováze.

Vznik hvězd

Fyzikální procesy probíhající při vzniku hvězd lze zapsat prostřednictvím matematických vztahů. Je-li mračno mezihvězdné hmoty (částic prachu a plynu), z kterého hvězdy vznikají, gravitačně vázanou stabilní soustavou, je celková mechanická energie W všech částic tvořících mračno záporná. Gravitační potenciální energie W_p v absolutní hodnotě je větší než kinetická energie W_k jejich tepelného pohybu. Smršťování vede k zahřívání mračna. Jeho gravitační potenciální energie se stává ještě více zápornou, narůstající kinetická energie pohybu částic je kladná.

Zmenšování vzdáleností mezi interagujícími částicemi je doprovázeno poklesem jejich gravitační potenciální energie. V mračnu při jeho pomalém tzv. kvazistacionárním gravitačním smršťování se uvolňuje energie a dochází k zahřívání zejména centrálních částí protohvězd, které se mění na hvězdy. V této vývojové etapě jsou hvězdy typu T Tauri. V nitru protohvězd je taková centrální teplota, že vodík a helium již jsou ionizovány.

Není však dostatečná k realizaci průběhu termonukleárních reakcí. Pro změnu celkové energie $W = W_k + W_p$ platí vztah

$$\frac{dW}{dt} = L_{\text{tjad}} - L,$$

kde L je zářivý výkon obecně hvězd, v tomto případě protohvězd. U nich je zářivý výkon termojaderných reakcí nulový, $L_{\text{tjad}} = 0$. Jestliže celková energie poklesává – protohvězda vyzařuje, musí při gravitačním smršťování narůstat kinetická energie částic a tomu odpovídajícím způsobem i centrální teplota. Zmiňované úvahy lze podpořit vztahem pro centrální teplotu $T_c \sim \frac{M}{R}$, která při zmenšování poloměru a neměnné hmotnosti narůstá.

Viriálová věta

Velmi přibližně, při zanedbání excitační a ionizační energie vzhledem ke kinetické energii souboru částic, můžeme konstatovat za kvazistacionárního průběhu smršťování protohvězdy splnění podmínek pro platnost tzv. jednoduchého tvaru viriálové věty. Tu původně odvodil *Clausius* roku 1870 v [1] ve tvaru

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2 I}{dt^2} \right\rangle = 2 \langle W_k \rangle + \langle W_p \rangle.$$

Člen na levé straně rovnice vyjadřuje druhou derivaci časové změny momentu setrvačnosti I soustavy částic vzhledem ke zvolenému počátku. V případě periodického pohybu částic v omezené oblasti prostoru a naplnění výše uvedených podmínek pro vývoj soustavy, lze člen na levé straně zanedbávat, viriálová věta získá tvar

$$\langle W_k \rangle = -\frac{1}{2} \langle W_p \rangle.$$

Používáme střední hodnoty energií souboru částic za dlouhé časové intervaly.

Naznačíme závěr postupu odvození viriálové věty, vycházejícího z úvah statistické termodynamiky, podrobně je rozveden například v [2]. Vyjdeme ze vztahu pro viriálovou větu ve tvaru

$$3(\gamma - 1) \langle W_k \rangle + \langle W_p \rangle = 0,$$

předpokládáme statický stav, bez tlaku na povrch soustavy a její rotace. Vlastnosti hvězdné látky – plazmatu, téměř úplně ionizovaného, popisujeme jednoatomovým ideálním plynem, pro který $\gamma = \frac{5}{3}$. Za předpokladu gravitační interakce mezi částicemi a dosazením uvedené hodnoty γ obdržíme pro viriálovou větu již dříve uvedený tvar

$$\langle W_k \rangle = -\frac{1}{2}\langle W_p \rangle, \quad \text{resp.} \quad 2\langle W_k \rangle + \langle W_p \rangle = 0.$$

Dosazením do vztahu pro celkovou energii obdržíme

$$\langle W \rangle = \langle W_k \rangle + \langle W_p \rangle = \frac{1}{2}\langle W_p \rangle = -\langle W_k \rangle.$$

Slovně vyjádřeno střední hodnota celkové energie gravitačně vázaných soustav – hvězd, je rovna polovině střední hodnoty gravitační potenciální energie respektive záporně vzaté střední hodnotě kinetické energie všech částic tvořících hvězdy, jak je rozebíráno u nás v [3].

V dosavadním výkladu smršťujícího se mračna jsme nebrali v úvahu rotaci respektive turbulentní pohyby plynu nebo přítomnost magnetických polí. Uvedené jevy zahrnujeme do zobecněného znění viriálové věty, které formulovali *Chandrasekhar* a *Fermi* v [4].

Hvězdy hlavní posloupnosti

Gravitační smršťování při vzniku hvězd je později zastaveno narůstajícími silami tlaku plynu, protohvězdy se mění na hvězdy. Jakmile centrální teplota dosáhne řádově $5 \cdot 10^6$ K, dojde v jejich nitru k zapálení prvních termonukleárních reakcí, hvězdy přicházejí na hlavní posloupnost. Ustanoví se v nich rovnovážný stav, charakterizovaný platností rovnice hydrostatické a tepelné rovnováhy. Střední hodnoty kinetické energie neuspořádaného tepelného pohybu částic a potenciální energie jejich vzájemné gravitační přitažlivosti získávají ustálené hodnoty. Jsou tak splňovány beze zbytku podmínky pro platnost viriálové věty.

Největší počet hvězd ve vesmíru se vyznačuje hmotností menší než $2M_\odot$. Nacházejí se na dolní polovině hlavní posloupnosti, příkladem je naše Slunce \odot . Jaká je stavební struktura takových hvězd? Termojaderné reakce probíhají pouze v centrální části – v jádře, kde je teplota dostatečná k jejich uskutečnění. Jádro je energeticky aktivní, je obklopeno slupkou – vrstvou plnicí úlohu tepelného izolátoru. Přenos tepla řízený teplotním

gradientem zde probíhá zářením. Jádro i obal jsou důležité pro tepelnou stabilitu a termodynamické vlastnosti hvězd.

Zamysleme se proto nad problematikou hvězd z termodynamického pohledu. Hlavním zdrojem energie hvězd hlavní posloupnosti jsou termonukleární reakce přeměny vodíku na helium. Uvolňuje se v nich mimo jiných teplo, jehož část může být využita na práci (zvětšení objemu) a dále na nárůst kinetické energie tepelného pohybu částic hvězd. Zvětšuje se celková energie hvězd.

Připomínáme, že hvězdy reprezentují termodynamické soustavy, které vedle teploty mají ještě další stupeň volnosti – objem. Při dodání tepla objem narůstá, získaná energie uskutečnila práci proti gravitačním silám, transformovala se do energie gravitačního pole. Velikost takto uložené energie je podle viriálové věty dvojnásobkem původně dodané ve formě tepla. Proto kinetická energie tepelného pohybu částic neroste, nýbrž klesá, střední teplota se zmenšuje, hvězda se ochlazuje.

Hvězdy hlavní posloupnosti jsou ve stavu tepelné rovnováhy, jejich zářivý výkon zůstává konstantní. Energie produkovaná v jádrech hvězd je rovna vyzařované z povrchu, platí $L_{\text{tjad}} = L$.

Projeví se u hvězd porušení tepelné rovnováhy? Provedeme myšlenkové úvahy, k analýze využijeme vztah pro změnu celkové energie

$$\frac{dW}{dt} = L_{\text{tjad}} - L.$$

Jestliže se ve hvězdách zvýší produkce energie termonukleárními reakcemi, zářivý výkon $L_{\text{tjad}} > L$, tj. $\frac{dW}{dt} > 0$, hvězdy začnou zvětšovat svůj objem, kinetická energie částic plazmatu se bude snižovat, jakož i teplota v nitru. Následně poklesne tempo termonukleárních reakcí, neboť je velmi silně závislé na teplotě. Hvězdy se vrátí do rovnovážného stavu.

Naopak, pokud se ve hvězdách sníží produkce energie $L_{\text{tjad}} < L$, tj. $\frac{dW}{dt} < 0$, kinetická energie plazmatu bude narůstat, objem hvězd se zmenší a budou se smršťovat. Teplota nitra se zvýší, tudíž i tempo termojaderných reakcí.

V souvislosti s provedenými úvahami si položíme hypotetickou otázku, zda lze hvězdy hlavní posloupnosti ochlazovat odebráním energie. Podle viriálové věty by to vedlo k jejich smršťování a uvolňování gravitační potenciální energie tempem, které by nejenom doplňovalo ztrátu energie vyzařované z povrchu, ale ještě i zahřívalo nitro hvězd. Celková energie hvězd by při tomto procesu poklesávala.

Jak se chová termodynamická veličina entropie při změnách objemu? Smršťování hvězd vede k poklesu entropie. Nejde o porušení II. věty termodynamické, podle které entropie uzavřených soustav musí být vždy stejná při vratných procesech nebo narůstající při nevratných. Hvězdy jsou otevřenými termodynamickými soustavami, entropie je z nich vynášena fotony a neutryny – klesá, zatímco v okolním vesmíru narůstá.

Důsledkem platnosti viriálové věty je záporná měrná tepelná kapacita hvězd jako celku. Nezávisí na chemickém složení hvězd a nedovoluje, jak jsme vyložili, rozvoj termojaderné exploze v jejich nitru. Zdůrazňujeme, že nejde o zápornou měrnou tepelnou kapacitu vlastního ionizovaného plazmatu hvězd.

Analyzujeme okolnosti porušení hydrostatické rovnováhy, kterou zapisujeme ve tvaru

$$\frac{dP}{dr} = -G\varrho\frac{M_r}{r^2}.$$

Vyjadřuje skutečnost, že výslednice gravitačních a ostatních sil působících na objemový element uvnitř hvězd je nulová. Smršťováním uvolňovaná gravitační potenciální energie je transformována nejen na zvětšení kinetické energie tepelného pohybu částic, ale rovněž na energii vyzařování $\langle W_z \rangle$ podle zákona zachování energie

$$\langle W_k \rangle + \langle W_p \rangle + \langle W_z \rangle = 0,$$

po úpravě $-\langle W_p \rangle = \langle W_k \rangle + \langle W_z \rangle$. Dosazením vztahu z viriálové věty obdržíme

$$-\frac{1}{2}\langle W_p \rangle = \langle W_z \rangle, \quad \text{resp.} \quad \langle W_k \rangle = -\frac{1}{2}\langle W_p \rangle + \langle W_z \rangle.$$

Tedy polovina gravitační potenciální energie uvolňované při smršťování jde na vyzařování hvězd, druhá polovina na zvýšení kinetické energie tepelného pohybu částic hvězd, viz například text v [5]. Obecně důsledkem gravitačního smršťování v některých etapách vývoje hvězd může být případně i změna jejich stavební struktury v čase.

Shrnuto: hvězdy hlavní posloupnosti ve stavu tepelné a hydrostatické rovnováhy představují přírodní termostat. Záporná měrná tepelná kapacita hvězd udržuje jejich stabilitu vůči tepelným poruchám. Důsledkem je stálost termonukleárních reakcí, hoření tak nemůže vést k explozivnímu průběhu. Hvězdy udržují přibližně konstantní zářivý výkon.

Červení obři

Z obecnějšího pohledu, bez větších podrobností, popíšeme přechod hvězd z hlavní posloupnosti do stádia červených obrů. Proces přeměny začíná zvýšeným uvolňováním energie v jádrech hvězd. Vnější vrstvy expandujících hvězd v důsledku nárůstu opacit, existence tzv. opacitní zdi, zadržují zářivou energii. Gravitační potenciální energie vnějších vrstev se zvyšuje při jejich postupném vzdalování od středu hvězd. Při expanzi se mírně na povrchu ochlazují, vznikají červení obři s poloměry řádově desítek případně až stovek poloměrů Slunce. Fyzikálně zjednodušeně lze vyloužit expanzi vnějších vrstev hvězd jako důsledek závislosti gravitačního potenciálu

$$\varphi \sim -\frac{1}{r}.$$

Plazma se chová jako pružina, jejíž konstanta tuhosti se stává slabší při rostoucím poloměru hvězd, usnadňujícím expanzi, podrobněji viz [6].

Naopak smršťování jádra v závěru pobytu hvězd na hlavní posloupnosti je doprovázeno poklesem jeho gravitačního potenciální energie. Na konci hoření vodíku se smršťuje v čase kratším, než činí pomalá fáze kontrakce tzv. Kelvinova–Helmholtzova časová škála

$$t_{\text{KH}} \approx 2 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \frac{R_{\odot}}{R}$$

v rocích. Při splnění této podmínky platí u hvězd viriálová věta, použijeme ji společně se zákonem zachování energie. V rovnicích vyjádřeno platí

$$2\langle W_k \rangle + \langle W_p \rangle = \text{konst.}_1 \quad \text{a} \quad \langle W_k \rangle + \langle W_p \rangle = \text{konst.}_2.$$

Musí tak zůstat konstantní obě energie individuálně, jak kinetická, tak i gravitační potenciální energie. Právě neměnnost velikosti posledně jmenované vede ke smršťování jader a expanzi obálek hvězd, tedy ke změně jejich stavební struktury.

Didaktické aspekty astrofyzikálního výkladu funkce termodynamického termostatu, hvězd hlavní posloupnosti, jakož i přechodu hvězd z hlavní posloupnosti do stádia červených obrů jsou diskutovány v článcích [6], [7].

U hvězd s hmotností menší než $2M_{\odot}$ se na konci pobytu na hlavní posloupnosti při hoření v jádrech spotřeboval téměř veškerý vodík, vyhasl zdroj energie. Jádra složená z helia se smršťují a vzniká degenerovaný elektronový plyn, jehož vlastnosti nezávisí na teplotě. Nemá již zápornou

měrnou tepelnou kapacitu. Proto termonukleární reakce, například zapálení helia v degenerovaném jádru, se vyznačují explozivním charakterem, reakce 3α v červených obrech probíhá vysokým tempem. Jde o nárůst zářivého výkonu heliového jádra až na $10^{10}L_{\odot}$ během několika minut. Na povrchu hvězd se však heliový záblesk neprojeví. Exploze zvýší teplotu jádra, zejména však zvětší jeho objem, neboť poloměr naroste přibližně třikrát. Následný řádový pokles hustoty odstraní degeneraci, hvězdná látka v jádře hvězd se přemění na plazma, popsatelné jako ideální plyn. Heliový záblesk sníží stupeň degenerace jádra. Tudíž v něm znovu započne spalování helia na uhlík a kyslík. Hvězdy jako celek se opět začnou vyznačovat zápornou měrnou tepelnou kapacitou. Později se uprostřed hvězd při nárůstu hustoty opět vytvoří elektronově degenerované jádro, nyní již z uhlíku, dusíku, kyslíku případně neonu. Měrná tepelná kapacita hvězd se tak stane kladnou, což umožňuje v závěrečných fázích vývoje například bílých trpaslíků jejich chladnutí.

Po vyčerpání termonukleárních zdrojů energie se hvězdy začnou pozvolna smršťovat, bude se zmenšovat jejich celkové energie W současně s gravitační potenciální energií W_p , naopak se bude zvětšovat kinetická energie W_k . Jak jsme již rozebírali, polovina z uvolněné energie při smršťování bude hvězdami vyzařena, druhá polovina půjde na nárůst W_k . Při smršťování se hvězdy zahřívají a vyzařují energii. Paradoxní závěr vyplývá ze vztahu

$$L = -\frac{dW}{dt} = -\frac{dW_p}{dt} = \frac{dW_k}{dt}.$$

Záporná měrná tepelná kapacita v pozemských laboratořích

I v pozemských laboratořích lze připravit látky se zápornou měrnou tepelnou kapacitou. Krystaly atomových klusterů, například 147 atomů sodíku, se za určitých podmínek vyznačují touto vlastností. Konkrétně při přechodu uvedené soustavy fázovou přeměnou – při zkapalnění látky. Roztavení krystalů probíhá po dosažení kritické hodnoty, atomová vazba již neudrží atomy v pevné struktuře, vazby se narušují. Přitom teplo, získávané klustery, nejde pouze na úkor kinetické pohybové energie atomů (charakterizujících teplotu), nýbrž na destrukci vazeb, tedy na zvětšení potenciální části energie. Popsané experimenty v [8] prováděné s klustery atomů sodíku prokázaly, že při dodání energie 1 eV se jejich teplota zmenšila přibližně o 10 K. Shrnuto při dodání tepla teplota popsané látky klesá, tudíž se vyznačuje zápornou měrnou tepelnou kapacitou.

Závěr

V článku jsme ukázali možnosti uplatnění poznatků z astrofyzikální gravitační termodynamiky do obsahu výuky fyziky na středních školách. Prostřednictvím myšlenkových úvah spojených s aplikací viriálové věty jsme vyložili termodynamické vlastnosti hvězd hlavní posloupnosti s hmotností menší než $2M_{\odot}$. Při objasňování důsledků tepelné rovnováhy hvězd má zásadní roli záporná měrná tepelná kapacita.

Viriálová věta v jednoduchém tvaru použitým v článku umožňuje na středoškolské úrovni kvalitativně předvídat fyzikální chování hvězd a usnadnit tak žákům porozumění této problematice. V astrofyzikálních interpretacích již byla viriálová věta zařazována do středoškolské fyzikální výuky, u nás v učebnici [9], v Polsku byly možnosti diskutovány v článku [10], v Rusku [11]. Termodynamika hvězd je vyložena ve vysokoškolských učebnicích u nás v [12], v zahraničí [13], [14], komplexně hlouběji v [2].

Literatura

- [1] *Clausius, R.*: Ueber einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. *Annalen der Physik* **217**, č. 9, (1870), s. 124–130.
- [2] *Collins, G. W.*: The Virial Theorem in Stellar Astrophysics. <http://ads.harvard.edu/books/1978vtsa.book>
- [3] *Štefl, V.*: Viriálová věta v astrofyzice. *PMFA* **25** (1980), s. 348–352.
- [4] *Chandrasekhar, S., Fermi, E.*: Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field. *ApJ* **118** (1953), s. 116–141.
- [5] *Prialnik, D.*: An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [6] *Hauptmann, H., Hermann, F., Schmidt, K.*: The transformation of a main sequence star into a red-giants star in the core and shell model. *Am. J. Phys.* **68** (2000), s. 421–423.
- [7] *Hermann, F., Hauptmann, H.*: Understanding the stability of stars by means of thought experiments with a model star. *Am. J. Phys.* **65** (1997), s. 292–295.
- [8] *Schmidt, M., a.j.*: Negative Heat Capacity for a Cluster of 147 Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001), s. 1191–1194.
- [9] *Šolc, M., Švestka, J., Vanýsek, V.*: Fyzika hvězd a vesmíru. SPN, Praha, 1983.
- [10] *Domański, J.*: Twierdzenie o wiriale w nauczaniu astronomii. *Fizyka w Sokole* **24** č. 3, (1978), s. 127–131.
- [11] *Ivanov, A. I., Kazanceva, L. P.*: Teorema viriala v prepodavanii fiziki i astronomii. http://vestnik.yspu.org/releases/uchenuye_praktikum/12_2/.
- [12] *Kvasnica, J.*: Termodynamika. SNTL, Praha, 1965.
- [13] *Chandrasekhar, S.*: Stellar Structure. University of Chicago Press, Chicago, 1938.
- [14] *Schwarzschild, M.*: Structure and evolution of the stars. Princeton University Press, Princeton, 1958.