INFORMATIKA

Bobřík učí informatiku

3. díl – Algoritmické úlohy

DANIEL LESSNER – JIŘÍ VANÍČEK

Matematicko-fyzikální fakulta, UK Praha

Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Algoritmus je základní informatický pojem. Algoritmy v nějaké formě se zabývá téměř každá oblast informatiky. Kdybychom se na informatiku podívali jako na vědu, zkoumající efektivní zpracování informací, nejefektivněji dnes informace zpracovávají stroje a algoritmy jsou právě návody pro tyto stroje.

Abychom nějaký postup prohlásili za algoritmus, musí splňovat několik základních kritérií. Postup musí být formulován pomocí jasně definovaných jednotlivých kroků, musí být jednoznačný (nepřipouští svévolné rozhodování), musí někdy skončit a musí vydat nějaký výsledek. Tyto vlastnosti zajišťují, že provádění postupu můžeme bez obav svěřit stroji. Pro praktické použití algoritmu je dále žádoucí, aby byl obecný (tedy aby řešil celou skupinu obdobných problémů), aby byl správný (pro všechna možná zadání) a aby byl efektivní, tedy úsporný ve využití zdrojů (zpravidla především aby byl rychlý).

Je na místě si uvědomit, že se s takovými rutinními postupy nesetkáváme zdaleka jen ve světě počítačů. Čekáme-li, že někdo splní zadanou práci podle našich představ, musí to zadání naše představy vystihovat. Patrně nikomu neprospěje, když zadaný postup nebude srozumitelný, když umožní několik různých výkladů, když nebude jasné, co je výsledkem práce, natož když půjde o mechanicky převzatý postup ke splnění jiného úkolu. Naopak dobře algoritmicky napsaný postup umožní autorovi ponechat provádění postupu na ostatních.

Informatici vymýšlejí a následně programují algoritmy pro řešení široké škály problémů. Algoritmy porovnávají a rozhodují, ve kterých podmínkách je který algoritmus nejvhodnější. Zkoumají, jak jsou algoritmy efektivní, hledají obecné postupy pro nacházení efektivních algoritmů pro různé druhy problémů. V té souvislosti je také zajímá, které problémy vůbec nelze efektivně řešit a jak si s tím poradit.

Z uvedeného je mimo jiné zřejmé, že zařazení provádění algoritmů do výuky v jiných předmětech nepokrývá potřeby výuky algoritmizace v pravém slova smyslu. Např. v matematice se žáci naučí a provádějí řadu algoritmů (od písemného násobení přes řešení rovnic po sestrojování řezů krychle či vyšetřování průběhu funkce) a popisují je (zápis geometrické konstrukce). Je samozřejmé používat v té souvislosti pojem algoritmus. Když ale nejsou nuceni algoritmus např. nejdřív vytvořit, pracovat s jeho explicitním popisem (tedy nikoliv předvedením a nápodobou), hodnotit jeho správnost nebo srovnávat efektivitu několika variant, rozvíjejí jen ty zcela nejzákladnější algoritmické dovednosti.

Bobříkovy algoritmické úlohy směřují i k využití pokročilejších algoritmických kompetencí. V první řadě jsou to úlohy, které vyžadují provedení zadaného postupu, který je např. netradičně popsán (alespoň z pohledu soutěžícího). Zajímavější jsou úlohy, kde je třeba zkoumat vztah vstupu a výstupu algoritmu, tedy např. jak bude vypadat výsledek po provedení daného algoritmu nebo zda vytvořený algoritmus vede k požadovanému cíli.

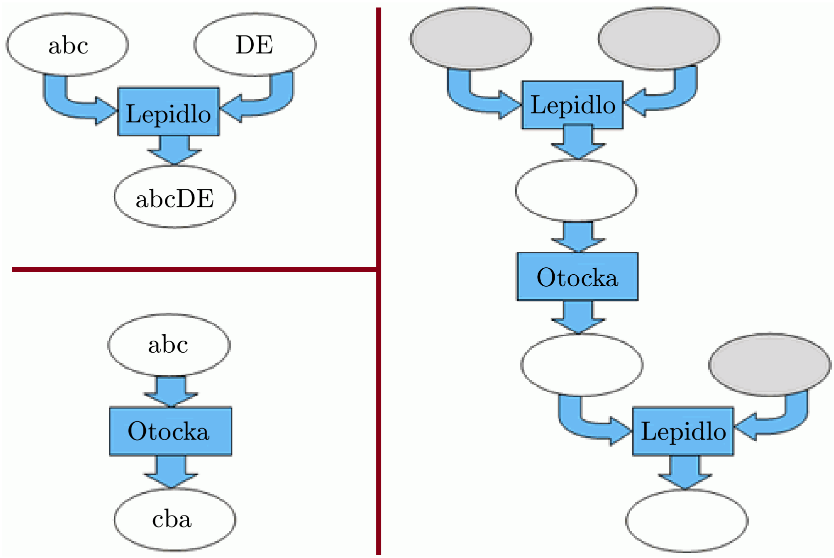
Další algoritmické úlohy směřují k nalezení nejrychlejších postupů, popř. k vyloučení jejich existence. Tento typ algoritmických úloh představuje např. toto zadání: Máme rozbitou kalkulačku, která umí pouze násobit dvěma a dělit třemi. Na začátku je na displeji zobrazeno číslo 1. Lze docílit toho, aby se na displeji objevilo číslo 15?

Míchačka textu

Kategorie Junior, Senior, autorka Andrea Hrušecká.

Zadání

Máme dva druhy strojů, Lepidlo a Otočku. Lepicí stroj slepuje dvě slova do jednoho (obr. 1 vlevo nahoře). Otočka napíše zadané slovo pozpátku (obr. 1 vlevo dole).



Obr. 1

Kombinaci obou strojů ukazuje obr. 1 vpravo. Do tří šedých polí jsou vkládána slova, v bílých se objeví výsledek. Která slova musíme vložit do šedých polí stroje, abychom v nejspodnějším bílém poli získali slovo PROSINEC?

A) N ISORP EC B) ORP IS CEN C) PR OSI NEC D) RP ISON EC

Co má tato úloha společného s informatikou

Tato úloha souvisí s oblastí formálních jazyků a automatů, jedné z hlavních částí informatiky. Počítač zpracovává čísla a texty a pomocí takovýchto grafů, jako byl použit v úloze, si lépe dokážeme představovat a navrhovat, co se s těmito daty v počítači děje.

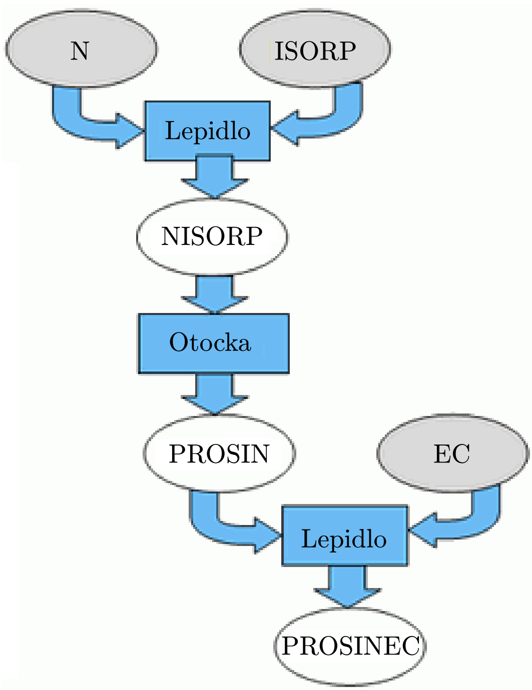
Úloha předkládá stroj a popis chování jeho částí, nikoliv ovšem popis chování stroje jako celku. Úkolem je najít vstupní podmínky, vedoucí k danému výstupu. Je tedy třeba porozumět danému popisu postupu, identifikovat řetězce příčin a následků, z nich plynoucí vztahy mezi vstupy a výstupy a porozumět tak celému postupu. To je informatikův denní chléb.

Schéma je přehledné pro člověka, pro stroj bychom stejný stroj popsali prostřednictví funkcí, např. takto: `slep(otoč(slep((L1, L2)), L3)`. Volání funkce je považováno za počátek nějaké aktivity. Funkce dostávají vstupní parametry (v našem případě dvě slova), zpracují je a vrací výstupní hodnoty (zde jedno výsledné slovo). Výstup funkce lze ihned použít jako vstup další funkce, jak naznačuje i uvedený zápis a jak to známe z matematiky (ve středoškolské matematice se ovšem soustředíme na funkce reálných čísel, např. logaritmus).

Jeden z významných výsledků teoretické informatiky (zjednodušeně) říká, že vše, co jde spočítat na počítači, jde spočítat i pomocí několika málo základních funkcí (např. „zvětši vstupní hodnotu o 1") a operátorů (např. opakované provádění nějaké funkce). To je skvělé, protože pro zkoumání hranic vypočitatelného nemusíme zkoumat všechny programy, stačí se zabývat kombinacemi základních funkcí.

Zdůvodnění správné odpovědi

Správná odpověď je A) N ISORP EC. Na obr. 2 je znázorněno, jak bude slovo PROSINEC při správném řešení vznikat.



Obr. 2

Odpověď B) ORP IS CEN nemůže být správně, protože poslední část CEN se přilepí na konec slova, slovo tedy skončí na CEN. U odpovědi C) PR OSI NEC po spojení prvních dvou částí a otočení vznikne buď ISORP, nebo RPISO podle toho, do které šedého pole vložíme jednotlivé části textu. Odpověď D) RP ISON EC obsahuje část slova, které je pozpátku NOSI a není součástí slova PROSINEC. U žádné z nesprávných odpovědí nelze vytvořit slovo PROSINEC, ani když by se vstupní texty vložily do vstupních polí zpřeházeně.

Jak najít správné řešení? Máme přinejmenším dvě možnosti hledání správné odpovědi. První je zkoušení možností. Do stroje postupně dosazujeme nabízené vstupy a díváme se, jak to dopadne. Dříve či později trefíme tu správnou, protože je 24 možností, jak texty do šedých polí vložit.

Druhý způsob řešení spočívá v prozkoumání struktury stroje jako takového a odvození vlastností, které musí správná vstupní slova mít. Vidíme například, že s koncem slova PROSINEC se nic neděje, jen se přilepí. To vylučuje možnost ORP IS CEN, která má vstupní slovo CEN obrácené.

Naopak začátek slova prosinec bude slepen ze dvou kusů a otočen. Hledáme tedy dva navazující otočené kousky. Možnosti PR OSI NEC chybí otočení. Možnost RP ISON EC zase obsahuje ISON, což ani jedním směrem není část slova prosinec. Zbývá možnost N ISORP EC.

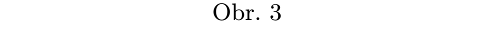
Rozmyslete si, který postup řešení (přímé dosazování nebo odvozování nutných vlastností vstupu) je výhodnější a proč. Současné počítače první způsob řešení (projít „hrubou silou“ všechny možnosti) velice dobře umí. Potíž nastane, když možností není 24, ale třeba přes bilión, což odpovídá např. hledání trasy, na které procházíme pouhých 40 rozcestí. Druhý způsob (odvozování) vyžaduje vyšší inteligenci strojů. Konstrukce a programování takových strojů je jeden z fascinujících úkolů, který současná informatika řeší.

Posouvání proužku papíru

Kategorie Senior, autor Mathias Hiron.

Zadání

Na stole leží proužek papíru o rozměrech 16 cm × 1 cm. Je rozdělený na 16 čtverců o straně 1 cm.

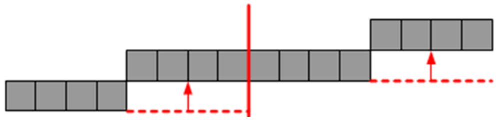


Obr. 3

Proužek přestřihneme v polovině. Pravý díl posuneme o 1 cm nahoru.

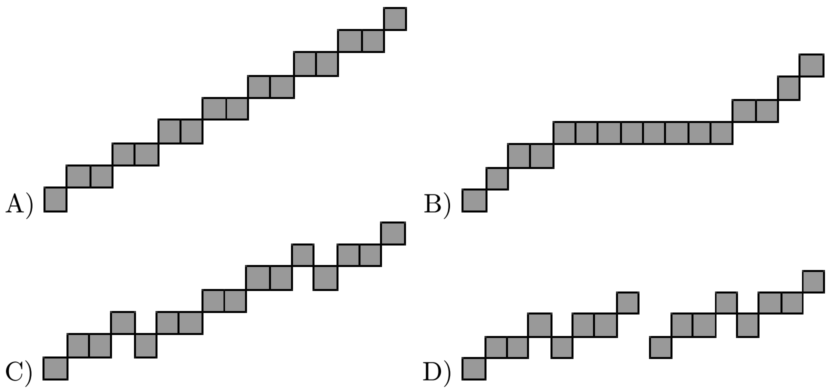
Obr. 4

Na dvou vzniklých proužcích zopakujeme celý postup znovu: přepůlíme je a pravou polovinu vždy posuneme o 1 cm nahoru.



Obr. 5

Postup zopakujeme, dokud nejsou nastříhané proužky dlouhé 1 cm. Jak vypadá výsledný obrazec z proužků (viz obr. 6)?



Obr. 6

Co má tato úloha společného s informatikou

Tato úloha popisuje často používaný algoritmus „rozděl a panuj". Zároveň názorně ukazuje velmi oblíbený a častý jev v informatice: jednoduchá pravidla mohou vést k překvapivě složitému chování, nebo naopak, složité chování lze (někdy) zapsat pomocí jednoduchých pravidel. Jen si představte, jak byste popisovali výsledný obrazec po jednotlivých dílcích, kdybyste nevěděli, jak jednoduše vznikl.

Oblíbeným příkladem jednoduchého popisu složitého chování je *Hra života*, kterou si můžete zkusit na http://www.bitstorm.org/gameoflife/ nebo http://www.kongregate.com/games/locos/the-game-of-life (vysvětlivky ke hře najdete na http://cs.wikipedia.org/wiki/Hra_života).

Charakteristickým prvkem uvedených pravidel je rekurze, tedy volání nebo odkaz na sebe sama. V naší úloze například proužek rozpůlíme, nějak upravíme poloviny, a potom tutéž úpravu provedeme s jednotlivými půlkami. Tento přístup v programování nazýváme „rozděl a panuj". Velmi se hodí u problémů, které lze rozdělit na menší, které jsou vlastně stejnými podproblémy.

Například hledání prvku v seřazeném seznamu realizujeme následujícím způsobem: http://www.algoritmy.net/article/21/Binarni-vyhledavani

Nejprve se podíváme doprostřed prohledávaného seznamu. Pokud jsme našli hledané, jsme hotovi. Pokud ne, je jasné, ve které polovině seznamu se hledaný prvek musí nacházet. Nyní tedy potřebujeme najít prvek v kratším seznamu. To už ale přece víme jak: stačí začít číst tento odstavec zase od začátku. Tím je řečeno vše potřebné k nalezení hledaného prvku. Nebo není?

Rekurze je schovaná i v samotných základech informatiky, navíc je základním kamenem počítání vůbec. V matematice se využívá k definici tak základních struktur, jako jsou přirozená čísla: přirozené číslo je buď 1, nebo následovník jiného přirozeného čísla (a tím je buď 1, nebo opět následovník atd.). Vizuálně si s rekurzí můžete pohrát na http://recursivedrawing.com/.

Zdůvodnění správné odpovědi

Nabízejí se dvě cesty k řešení. První spočívá v krokování neboli v postupné simulaci popsaného postupu. Na konci stačí porovnat vlastní výsledek s nabízenými možnostmi.

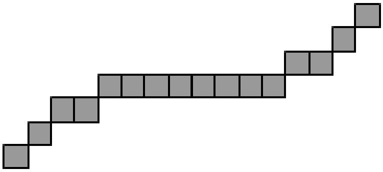
Druhá cesta spočívá v pozorování toho, co se při stříhání a posouvání děje. Přitom hledáme zobecnění, vlastnosti, které musí řešení splňovat (a které zároveň některé z nabízených odpovědí nesplňují).

Uvedeme dvě pravidla pro výsledný obrázek, která lze odvodit ze zadání úlohy:

1. Jestliže jsme na začátku proužek rozstřihli a pak s oběma polovinami zacházeli stejně, musí mít obě poloviny proužku stejný tvar.

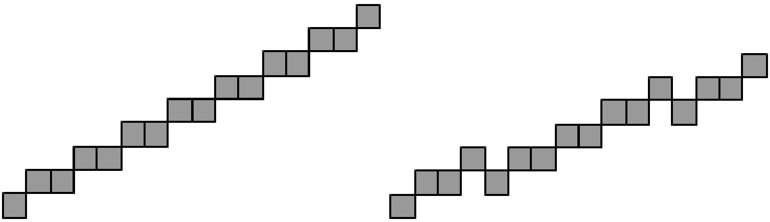
2. Jestliže jsme při prvním stříhání posunuli pravý proužek o 1 cm výše a pak s oběma polovinami zacházeli stejně, musí být pravá polovina posunuta o 1 cm výše než levá.

Na obr. 7 nejsou levá a pravá polovina stejné, poloviny jsou otočené o 180°. Obr. 7 nesplňuje pravidlo 1.



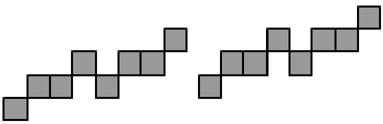
Obr. 7

Na obr. 8 jsou sice obě poloviny stejné, ale pravá je posunuta o více než jeden čtvereček nahoru než levá. Oba obrázky odporují pravidlu 2.



Obr. 8

Správná odpověď je D) (obr. 9), všechny ostatní možnosti jsou špatné.



Obr. 9

Mimochodem, všimněte si, že tento obrázek má obě poloviny stejné a pravá část jako celek je posunuta pouze o jeden čtvereček oproti levé, splňuje tedy obě pravidla. Stejně tak splňují obě pravidla i menší části, vzniklé při dalším střihání (např. první a druhá čtvrtina obrázku jsou stejné, jsou navzájem posunuté o jeden čtvereček).

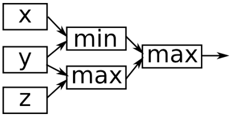
Všimněte si také, že ve správném řešení vznikly dva zcela oddělené obrazce. To je překvapivé, protože celou dobu posouváme proužek jen o jeden centimetr nahoru, takže rohy původního a posunutého proužku se stále dotýkají a nikdy neoddělí. Jak tedy k oddělení došlo?

Jak vybrat medián

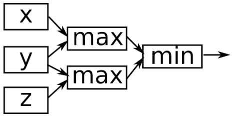
Kategorie Senior, autor Ilja Posov.

Zadání

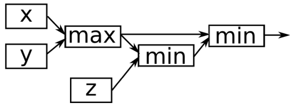
Mějme dána tři různá čísla x, y a z. Nejvyšší z nich je maximum, nejnižší minimum a zbývající číslo budeme nazývat medián. Na kterém schématu je zobrazen správný postup určení mediánu čísel x, y, z?



Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12

A) Obr. 10 B) Obr. 11 C) Obr. 12 D) Žádné z uvedených schémat.

Co má tato úloha společného s informatikou

Třídicí schémata jsou jedním z přístupů ke klasickému informatickému problému – řazení. Stavební prvky těchto schémat více či méně odpovídají stavebním prvkům skutečných obvodů. Představme si na vstupu logické hodnoty zadané pomocí jedniček a nul. Jakým logickým operátorům pak odpovídají prvky max a min?

Kontrola správnosti pracovního postupu je důležitá dovednost pro každého. Informatik musí umět správnost algoritmu (zapsaného např. právě pomocí schématu, jako v této úloze) dokonce dokázat. Algoritmus má být mimo jiné obecný, to znamená, že funguje správně pro všechny povolené vstupní údaje (zde tři různá čísla) – i tohle musí informatik ověřit.

Pokud jde o opačný případ a chceme ukázat, že nějaký postup *nefunguje*, vyplatí se najít vhodný *protipříklad* – tedy vstup, na kterém postup selže. Konkrétní vstupy vedoucí k selhání jsou užitečné i při hledání místa a důvodu selhávání algoritmu či programu.

Zdůvodnění správné odpovědi

Schéma A) nefunguje pro čísla $x = 1$, $y = 2$ a $z = 3$ (jako medián vyjde z, ale to je maximum).

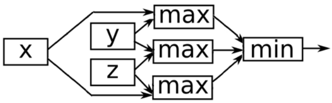
Schéma B) nefunguje pro $x = 2$, $y = 3$ a $z = 1$ (jako medián vyjde y, ale to je maximum).

Schéma C) nefunguje pro čísla $x = 3$, $y = 2$ a $z = 1$ (jako medián vyjde z, ale to je minimum).

Ani jedno z právě uvedených schémat není správné. *Správně je* D).

Ve zdůvodnění této úlohy jsme použili protipříklad. Jak nacházet protipříklady? Přinejhorším budeme muset procházet všechny možnosti. Zde to naštěstí neznamená projít všechna čísla nějakého oboru. Protože důležitá je jedině jejich vzájemná velikost, pro každou síť tedy potřebujeme vyzkoušet nanejvýš $3! = 6$ různých možností vstupních hodnot. Postupně získávaná zkušenost nám pak napoví, které možnosti mají vyšší pravděpodobnost selhání. Například pokud má některá hodnota možnost projít do cíle čistě přes operátory stejného druhu, je něco v nepořádku – doporučujeme vyzkoušet si průchod schématy A) a C) pro číslo z. Podobně nezdravé je, pokud nějaká hodnota, aniž by byla mediánem, vytlačí z výpočtu všechny ostatní (příklad čísla y u schématu B).

Možným správným řešením je např. ze všech dvojic xy, xz, yz vybrat maxima (tím se zbavíme nejmenšího čísla) a potom z těchto maxim najít minimum. Protože nejmenšího čísla (celkového minima) jsme se při prvním kroku zbavili, hledané minimum v druhém kroku je medián. Příklad takového schématu je na obrázku. Najdete jiné funkční schéma?



Obr. 13

Polička s knihami

Kategorie Senior, autor Ahto Truu.

Zadání

Knihovník rovná zpřeházené svazky encyklopedie v několika krocích. Jeden krok rovnání vypadá tak, že vezme jeden svazek z police, posune některé ze zbývajících svazků doleva nebo doprava a pak vloží vyjmutý svazek na prázdné místo (obr. 14). Na obr. 14 knihovník srovnal svazky na jeden krok.

Obr. 14

Kolik nejméně kroků (tedy „vyjmutí svazku“ – „posunutí některých zbývajících“ – „vložení svazku“) je potřeba k uspořádání všech svazků na obr. 15?

Obr. 15

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6

Co má tato úloha společného s informatikou

Tato úloha se týká řazení, jednoho z nejčastěji řešených problémů v informatice. Řazení dat umožňuje rychlejší vyhledávání. Představte si, že byste např. v obchodě s obuví požádali o svou velikost, a personál by začal prohledávat postupně všechny krabice! Bez řazení výsledků podle relevance je dnes nemyslitelná také např. práce s internetovým vyhledávačem.

Na stránce http://www.sorting-algorithms.com se můžete přesvědčit, jak důležité je zabývat se efektivitou algoritmů – lze tak ušetřit obrovské množství času (a tím i peněz).

U řazení je důležité poznat, které části jsou již vlastně seřazené a co bude třeba ještě seřadit. Postup potřebný k vyřešení této úlohy, tedy nalezení nejdelší rostoucí podposloupnosti, je další typickou informatickou úlohou. Efektivní řešení využívá dynamické programování, které se objevilo i u úlohy na vzdálenost řetězců DNA v prvním dílu tohoto seriálu. Počet kroků nutných k seřazení svazků lze využít jako míru pro posouzení „zamíchanosti“ posloupnosti. Tedy čím víc výměn, tím zpřeházenější je pořadí svazků.

Řazení je klasickou partií informatiky, jak ukazuje i toto dnes již historické video, plné zajímavých informací:

http://www.youtube.com/watch?v=SJwEwA5gOkM

Zdůvodnění správné odpovědi

Svazky, které nevyjmeme z poličky, zůstanou vůči sobě v původním pořadí. Svazky, které ve vzájemně správném pořadí už jsou, vyjímat z poličky nebudeme – nic bychom tím nezískali. Naopak všechny ostatní vyjmout v průběhu řazení musíme – jinak by se do správného pořadí nedostaly. Nejdelší taková vzestupná posloupnost obsahuje pět svazků (1, 6, 7, 8, 9), zbývající čtyři svazky (4, 5, 3, 2) musí být vyjmuty a přesunuty.

Správná odpověď je B: *potřebujeme čtyři kroky.* Lépe to nejde, protože to by muselo být na začátku ve správném pořadí alespoň 6 svazků.

Jiné řady svazků s vzestupným pořadím, které lze v obrázku najít, jsou (1, 4, 5, 9) nebo (1, 4, 8, 9), ty jsou ale kratší (a další řady jsou ještě kratší), takže by muselo být vyjmuto a správně zařazeno více svazků.

Poznámka. Pořadí, ve kterém budou svazky vyjmuty a vloženy na správná místa, sice ovlivňuje počet svazků, které při jednotlivých krocích musí být posunuty, ovšem neovlivňuje počet svazků, které musí být z poličky vyjmuty.

K této úloze se nabízejí další otázky. Kolik kroků by bylo potřeba, abychom svazky seřadili sestupně? Jak by vypadala posloupnost zpřeházených svazků, která by vyžadovala největší možný počet vyjmutí? Kolik takových posloupností najdete?

Elektronické hlasovací zařízení

FRANTIŠEK LÁTAL – MAŁGORZATA MICHEJDOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Na základních i středních školách žáci často nechtějí odpovídat na otázky kladené učitelem. Žáci, kteří si nejsou jisti správnou odpovědí, raději neodpoví vůbec. Učitel získá odpověď od jednoho nebo dvou žáků, a když je tato odpověď správná, nemá již možnost posoudit, zda ostatní ve třídě pochopili probírané učivo. Hlasovací zařízení umožňuje anonymně testovat znalosti všech žáků ve třídě. Učitel získá okamžitou informaci o znalostech žáků a může s žáky diskutovat o výsledcích hlasování, dříve než sdělí správnou odpověď.

Používáním hlasovacího zařízení ve výuce využijeme přirozených vlastností žáka, jako je jeho soutěživost a hravost. Zároveň pomocí hlasovátek procvičíme učivo se všemi žáky najednou a omezíme tak, aby se někdo ze třídy při zkoušení nudil [1].