MATEMATIKA

Reforma naší školy a problémy matematického vzdělávání

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Tento článek navazuje na můj příspěvek *Naše pedagogická realita* [10] a jeho cílem je seznámit naše učitele matematiky a fyziky s diskusí o kurikulární reformě, která probíhá v časopise *Matematická orientace*. Do této diskuse jsem přispěl článkem Kompetence a školská praxe, který se s tímto mým příspěvkem zčásti překrývá.

V roce 2003 jsem napsal: „Za 60 let svých kontaktů se školou jsem zažil řadu reforem. Snad pro všechny bylo charakteristické, že začaly cosi nově organizovat, aniž by se poučily v dobrém či špatném z výchozího stavu.“ Je tomu patrně stejně i u současného reformního snažení, které je založeno na dokumentech *Bílá kniha* [16] a *Rámcové vzdělávací programy* [18]. Cíle předpokládané reformy jsou pozoruhodné: „Dosáhnout vyšší kvality a funkčnosti vzdělávání tvorbou nových vzdělávacích a studijních programů, které budou odpovídat požadavkům informační a znalostní společnosti, udržitelného rozvoje, zaměstnanosti a potřebám aktivní účasti na životě demokratické společnosti v integrované Evropě a které budou zároveň respektovat individuální odlišnosti a životní podmínky účastníků vzdělávání“ ([16], s. 18, [11], s. 322). V roce 2009 jsem připomněl, že „naše pedagogická věda dosud působení Bílé knihy nezhodnotila“ ([9], s. 299). Sám jsem již v roce 2003 napsal: „Přesun tvorby osnov na jednotlivé školy znamená neobyčejně silné zatížení učitelů a v důsledku toho nebezpečí formální realizace základních cílů reformy. Obávám se, že v praxi může reforma znamenat i snížení úrovně naší vzdělávací soustavy“ ([11], s. 323). V roce 2013 jsme se hodnocení reformy dočkali. V úvodu stati

[21] Štech konstatuje, že školská praxe a většina učitelů reformu, která způsobila na mnohých školách roztrpčení a zmatek, nepřijala. Se znalostí světové literatury formuluje dále v českém prostředí nové kritické pohledy na kompetence, transfer a pedagogický výzkum. Dále uvádím kritické názory *Tomáše Janíka*, ale i názory *Jany Strakové*, která považuje za správné v reformě pokračovat ([20], s. 740). Ovlivněn i Janíkovým článkem [6] se budu zabývat i otázkami, které jsou podle mého názoru aktuální pro matematické vzdělávání v naší současné škole.

Mým záměrem není citované články [21], [6] a [20] nahradit, chci pouze upozornit na jejich závažnost a doporučit je ke studiu.

Kompetence, řešení úloh a transfer

Česká kurikulární reforma byla v podstatě bezprostřední (copy-paste) aplikací doporučení, která přicházela od Světové, banky, OECD, Evropské komise a dalších institucí ([21], s. 617). Je výrazem rezignace na tradiční cíle všeobecného vzdělání a jejich nahrazení schopnostmi a kompetencemi: „Za orientací vzdělávání na kompetence se skrývají hlavně ekonomické cíle – posloužit trhu práce. I přes chlácholivé řeči zastánců tohoto přístupu vede k zanedbání práce s učivem, nevede k aktivizaci žáků v učení a místo stimulace pedagogické inovativnosti zavádí učitelskou praxi do byrokratické rutiny“ ([21], s. 622). Pojem *kompetence* chápe Štech jako „schopnost jednat, jejímiž stavebními kameny jsou vědomosti a dovednosti, avšak tato schopnost se na ně nedá redukovat“ ([21], s. 623). Ačkoliv nebylo jasné ani jak tento přesun cílů vzdělávání realizovat, ani co to bude z dlouhodobé perspektivy znamenat, byla reforma spuštěna. Přitom podle Štecha „konceptoři kurikulární reformy ignorovali i výsledky pedagogicko-psychologického výzkumu učení“ ([21], s. 625). Štech dále připomíná známou Brunerovu tezi, že „myšlení jako takové neexistuje, myšlení je vždycky myšlením o něčem“ ([21], s. 629). Na adresu příznivců kurikula kompetencí uvádí následující analogii francouzského autora *N. Baillargeona*: „Hledají, jak rozvinout kreativitu jako takovou nebo obecnou schopnost řešit problémy a podobně. Je to tak trochu, jako bychom po škole žádali, aby naučila žáky hrát – bez ohledu na to, zda půjde o hokej, karty nebo šachy“ ([21], s. 630). Kompetenci nelze nikdy oddělit od jejího konkrétního oborového obsahu: „Umět vyřešit kvadratickou rovnici, to je kompetence. Umět řešit problémy – to není žádná kompetence, to je prázdná floskule… nanejvýš může jít o spekulaci psychologů. Avšak současný stav empirických výzkumů nedovoluje takovou spekulativní konstrukci jakkoli potvrdit“ ([21], s. 629). Tím se dostáváme k pedagogicky závažným otázkám, které spolu souvisejí: k otázce *řešení úloh* a otázce *transferu*. Se Štechovými názory na kompetence rád a vřele souhlasím. K tématice úloh a transferu se nyní vyjádřím podrobněji.

Souhlasím s tím, že pojem transferu „jako *schopnosti* přenášet známé poznatky a dovednosti *do zcela nové situace*“ ([21], s. 630) není opodstatněný. Tuto tézi vyslovil kdysi i můj univerzitní učitel *Bohumil Bydžovský* (1880–1969) a mohu ji doložit i dvěma anekdoticky vyznívajícími příklady. V románu amerického spisovatele *Henryho Millera* (1891–1980) se přiznává jistý právník: „Ve všem kromě právních záležitostí jsem totální pitomec“ ([15], s. 27). Před několika lety se mi stala tato příhoda: Večer zvoní u nás doma telefon. Podle svého zvyku se představím: „Tady Kuřina.“ Z druhého konce drátu se ozve: „Si to ty?“ Matematik, který mi volal, zcela vypnul své obvyklé uvažování i selský rozum, neboť na svoji otázku mohl dostat jedinou odpověď: „Ano“, ať by byl u telefonu kdokoli.

Ovšem transfer může být chápán i „volněji“: jako „snaha reagovat *podobně* v *podobné* životní situaci“ ([3], s. 578). *Jiří Mareš* to vykládá konkrétněji: „Dítě, dospívající i dospělý přecházejí z jedné školní a životní situace do druhé. Do každé nové situace si s sebou přenášejí zkušenosti z oněch předchozích... Přenášejí si (transferují) propracované znalosti, emocionální prožitky i sociální zkušenosti získané při dolaďování se k požadavkům všech předchozích situací“ ([1], s. 402). V tomto smyslu je transfer účinným pomocníkem ve vzdělávání. Je to v souladu nejen s myšlenkami *Hanse Selyho*, že „Myšlenkové celky obsahují minulé zkušenosti, nedovedeme uvažovat o věcech, které mají vlastnosti, s nimiž jsme se nikdy nesetkali.“ ([19], s. 348), ale i s názory *Komenského*: „Učiti se znamená kráčeti k znalosti věci neznámé přes nějakou známou. Celé vyučování i učení sestává z příkladů, pouček a napodobení.“ ([8], s. 23 a 33) Takže podle mého názoru je přece jen transfer „kámen mudrců“ školní pedagogiky ([21], s. 630).

Využití transferu ve vyučování můžeme doložit příklady z matematiky. Odkazuji zde na Hejného sérii úloh o plotu ([4], s. 36), na vytváření představ o přirozených číslech na začátku školní docházky, na propedeutiku algebraických zákonitostí zákonitostmi aritmetických apod. Na transferu je založena idea názornosti (vytváření modelů, kreslení obrázků, ...) Matematickou analogií transferu jsou morfismy (viz např. ([4], s. 212).

Nevím, kdo zdůvodnil řešení problémů jako nejefektivnější podoby vyučování ([21], s. 626). Já s tím nesouhlasím. Např. v knize [12] píši: Problémové vyučování nelze pokládat za jedinou formu vzdělávání. Již proto ne, že předpokladem úspěchu při něm je dostatek času a dobrá úroveň učitele. Výsledky problémového vyučování nelze dost spolehlivě ani předvídat, ani časově plánovat. Zastávám však stanovisko, že úlohy jsou nezastupitelnou složkou školní matematiky a souhlasím se Štechovým názorem, že při řešení úloh je nevyhnutelná dobrá znalost „matematického řemesla“, kterou bohužel naše škola nerozvíjí vždy dostatečně.

Co s reformou?

Podnícen názory Tomáše Janíka, že „současná kurikulární reforma stěží pozvedne kvalitu výuky, neboť její implementace vyústila v nezvladatelný formalismus, a že na řadě škol je tvorba školních vzdělávacích programů vnímána jako něco, co odvádí učitele od samotné výuky, tedy od toho, co je hlavním posláním a co zakládá důvod existence školy“ ([6], s. 636 a 654), jsem přesvědčen, že tato reforma nemá perspektivu. Podle Stanislava Štecha „interpretace, která říká, že jádro reformy je zdravé, logika reformy je správná, jen je špatně implementována, neobstojí“ ([21], s. 618). A to navzdory názorům Jany Strakové, která „považuje za zásadní reformu nezpochybňovat a naopak zdůrazňovat její bezesporné aspekty, tedy potřebu přizpůsobit vzdělávací cíle a obsah vzdělávání změnám ve společnosti a zaměřit se přitom na klíčové kompetence specifikované v rámcových vzdělávacích programech“ ([20], s. 740). Straková považuje „zpochybňování reformy za nebezpečné, neboť sděluje učitelům, že práce, kterou v minulých letech investovali do realizací reformy, byla zcela zbytečná“ ([20], s. 740). Obávám se, že tuto skutečnost není třeba učitelům sdělovat, oni to dobře vědí.

Připomeňme v této souvislosti názory několika učitelů z praxe.

- Kurikulární reformou se snižuje míra vzdělanosti.
- Z žáků se vychovávají primitivové bez konkrétních znalostí, ale s hypertrofovanou komunikační kompetencí.
- Dobrý učitel reformu nepotřebuje. Všechno je v osobním přístupu a nasazení, vztahu k žákům a v odpovědnosti k budoucnosti. (Citováno podle publikace ([7], s. 122 a 41).

Zpochybňování reformy podle Strakové „podrývá již tak malou důvěru pedagogů v moudrost tvůrců vzdělávacích politik a posiluje jejich demotivovanost“ ([20], s. 740). To je patrně pravda, ale na základě čeho mají učitelé věřit v onu deklarovanou moudrost?

Podle Jany Strakové „největší nedostatek implementace reformy spočívá v přecenění profesní vyspělosti všech zapojených aktérů“. „Nedostatečná“ vyspělost tvůrců dokumentu se projevila v tom, že v dokumentech poskytli učitelům málo vodítek, která by jim umožňovala nové vzdělávací cíle uchopit, prioritizovat a smysluplně zakomponovat do běžné výuky. Pravděpodobně proto, že i oni měli nejasnou představu o tom, jak by se měla reforma v běžných školách a třídách realizovat a jak by měly vypadat její výsledky, a tak trochu doufali, že odpověď získají od samotných učitelů. „Nedostatečná“ vyspělost učitelů se pak projevila v tom, že „většinou nepochopili reformu jako příležitost zvýšit užitečnost a smysluplnost své práce a modifikovat je tak, aby z ní získali maximální pracovní uspokojení“ ([20], s. 739). Přitom, jak je vysvětleno v poznámce, adjektivem „nedostatečný“ není míněno pejorativně, ale věcně. Vyjadřuje názor, že aktéři nebyli připraveni na takto ambiciózní reformu.

Představuji si, jak tvůrci kurikulárních dokumentů vedou na vodítkách učitele, ač sami nemají představu, jak reformu realizovat. Vedou je tedy aspoň k implementaci reformy, kterou mají tito – podle Strakové nedostatečně vyspělí dělníci pedagogiky – realizovat, prioritizovat a dokomponovat…

Ladislav Kvasz poukazuje v monografii [13], že charakter matematiky se projevuje v charakteru jejího jazyka. Není dikce některých našich pedagogů obrazem úrovně části naší pedagogiky? Proč neříci jazykem srozumitelným každému učiteli, oč by nám mělo v současné škole jít. Pokusím se o to v následující části.

Jak řešit problémy matematického vzdělávání v naší škole

Tomáš Janík vidí východisko ze současné situace v našich školách v dlouhodobém programu *produktivní kultury vyučování a učení.* K tomu považuje za nutné koncipovat státní kurikulum tak, aby představovalo rámec vymezující prostor pro realizaci produktivní kultury učení opřené o *didaktický konstruktivismus* ([6], s. 659 a 654). Otázce konstruktivizmu je věnována i naše publikace [4]. Připomenu z ní několik myšlenek. „Vzdělávací proces v matematice je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek. První je porozumění matematice, druhé je zvládnutí matematického řemesla, třetí jsou aplikace matematiky“ ([4], s. 195). „Pro konstruktivně pojaté vyučování matematice je charakteristické aktivní vytváření části matematiky v duševním světě dítěte. Podle povahy žáka může být podkladem pro takovou konstrukci otázka či problém ze světa přírody, techniky, společnosti či matematiky samé. Při řešení tohoto problému můžeme přirozeně sdělovat žáku všechny potřebné informace, vysvětlovat pojmy, odkazovat na informace v encyklopediích a příručkách, avšak vše ve službě rodící se matematiky v duševním světě žáka. Konstruktivistické vyučování tedy může obsahovat transmisi celých partií, může obsahovat i instrukce k řešení typických úloh. Matematické vzdělávání by mělo mít smysl a mělo by být užitečné. Mělo by žákům přinášet uspokojení a radost“ ([4], s. 196).

K takovému přístupu k vyučování nelze dát obecný návod. Může je uskutečňovat jen „dobrý učitel“. Přitom si musíme uvědomit, že na žáky působí mnohdy negativně společnost, v níž o úspěchu člověka nerozhodují vždy jeho kvality. Univerzity mohou přispět k zlepšení práce školy především tím, že budou vychovávat dobře odborně připravené učitele, budou pomáhat v dalším vzdělávání učitelů a produkovat kvalitní literaturu. Připomínám, že např. Jednota českých matematiků a fyziků přispívá k zlepšení práce školy vypracováním standardů a sbírek úloh (např. [2]). „V konstruktivistickém pojímání matematiky jde o to, že učivo není chápáno jako hotový celek, ale jako něco, co se utváří“ ([6], s. 656). Škola by měla věnovat mimořádnou péči tomu, co by měli zvládnout všichni žáci bez výjimky, tedy to, co se někdy nazývá gramotností. Přitom termín gramotnost chápu v souladu s publikací [5] takto: „Matematickou gramotností na úrovni n-té třídy k-tého stupně rozumíme

- schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému),
- schopnost vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie,
- dovednost řešit úlohy, jak z matematiky, tak i z jejích aplikací, které jsou (obvykle bezprostředním) užitím probraného učiva.

K řešení úloh problémového charakteru je třeba určitá míra tvořivosti, která představuje vyšší úroveň matematické kultury. Základní matematickou gramotnost by ovšem měl dosáhnout každý absolvent příslušného typu školy. Pěstování matematické gramotnosti je nejdůležitější úkol každého stupně školy“ ([5], s. 26).

Matematickou gramotnost dobře může posoudit zodpovědný učitel, jen zčásti ji lze hodnotit na základě jednorázového testování. O těchto otázkách jsem psal v článku [10].

Souhlasím s Janou Strakovou, že „učitelé, ve snaze zlepšit výsledky svých žáků v testech, věnují zvýšenou pozornost vědomostem a dovednostem, které jsou hodnoceny. Mnohdy tak činí na úkor jiných vědomostí a dovedností, které hodnoceny nejsou“ ([20], s. 741). Uznávám, že je třeba srovnávat úroveň vzdělání, nemyslím však, že „je účelné, co nejvíce rozšířit rozsah vědomostí a dovedností ověřovaných v plošných testech“. Vraťme důvěru v hodnocení učitelů. Vzdělanost nelze měřit žebříčky. Bezpečný znak kvality vědce se získá podle současných kritérií počtem bodů získaných v impaktovaných časopisech, bezpečný znak kvality žáka v pořadí v jakýchsi testech. Obojí dává podle mého názoru falešný obraz.

Řadu podnětů k zlepšení práce naší školy uvádí Tomáš Janík v citovaném článku [6].

Závěr

Považuji za nutné formulovat jasné a závažné vzdělávací cíle pro jednotlivé stupně našich škol a věnovat náležitou péči každodenní práci učitelů, včetně pomoci všude, kde se ukáže potřeba. Překotné reformy výsledky práce školy, živého organismu žáků a učitelů, mohou jen zhoršovat. To moudří lidé v minulosti dobře věděli. Připomenu při této příležitosti slova *Bohumila Bydžovského*, matematika, který se zabýval školskou problematikou ve třicátých letech minulého století: „Pro všechny školy a v širším pojetí pro všechny instituce v demokracii platí, aby budoucně reforma školy byla, jak bych řekl spojitá, aby se nedála za prudkých otřesů, nýbrž nenáhle a organicky. K tomu je nezbytně třeba, aby se reformního úsilí účastnili co nejvíce učitelé sami, aby konali hojně pedagogických pokusů a tak připravovali drobné kroky, jimiž by škola vytrvale kráčela ke svému zdokonalení.“

Literatura

[1] *Cáp, J. – Mareš, J.*: Psychologie pro učitele. Portál, Praha, 2001.

[2] *Fuchs a kol.*: Standardy a testové úlohy z matematiky. Prometheus, Praha, 2000.

[3] *Good, C. V.*: Dictionary of Education. McGraw-Hill. New York, 1959.

[4] *Hejný, M. – Kuřina, F.*: Dítě, škola a matematika. Portál, Praha, 2009.

[5] *Hošpesová, A. a kol.*: Matematická gramotnost a vyučování matematice. Jihočeská univerzita, České Budějovice 2011.

[6] *Janík, J.*: Od reformy kurikula k produktivní kultuře vyučování a učení. Pedagogická orientace, č. 5 (2013), s. 634–663.

[7] *Janík, T. a kol.*: Kurikulární reforma na gymnáziích. VÚP, Praha, 2010.

[8] *Komenský, J. A.*: Didaktika analytická. Samcovo knihkupectví, Praha, 1946.

[9] *Kuřina, F.*: Didaktická transformace obsahu a školská praxe. Pedagogika, č. 3 (2009), s. 298–308.

[10] *Kuřina, F.*: Naše pedagogická realita. Matematika, fyzika, informatika, roč. 23, č. 1 (2014), s. 1–8.

[11] *Kuřina, F.*: Oborové didaktiky a školská praxe. Pedagogika, č. 3 (2003), s. 321–324.

[12] *Kuřina, F.*: Problémové vyučování v geometrii. SPN, Praha, 1976.

[13] *Kvasz, L.*: Pattern of Changes. Birkhäuser, Basel, 2008.

[14] *Mareš, J.*: Pedagogická psychologie. Portál, Praha, 2013.

[15] *Miller, H.*: Nexus. Votobia, Olomouc, 1995.

[16] Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha. Výzkumný ústav pedagogiky, Praha, 2001.

[17] *Průcha, J.*: Moderní pedagogika. Portál, Praha, 2005.

[18] Rámcové vzdělávací programy. Výzkumný ústav pedagogický, Praha, 2002.

[19] *Selye, H.*: K záhadám vědy. Orbis, Praha, 1975.

[20] *Straková, J.*: Jak dál s kurikulární reformou. Pedagogická orientace, roč. 23, č. 5 (2013), s. 734–743.

[21] *Štech, S.*: Když je kurikulární reforma evidence-less. Pedagogická orientace, roč. 23, č. 5. (2013), s. 615–63

O niektorých vlastnostiach štvorstena vektorovo

DUŠAN VALLO

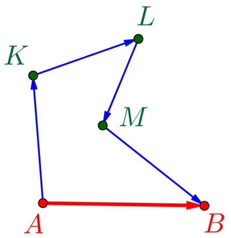
Fakulta prírodných vied UKF, Nitra

Vo výučbe vektorového počtu na strednej škole sa niekedy príliš skoro prechádza od názorných pojmov k analytickému vyjadreniu pomocou súradníc. Vedomosti sú potom často formálne, žiaci si nevytvoria správne predstavy o objektoch, s ktorými pracujú. Naučia sa len algoritmické postupy riešenia úloh. Takto nadobudnuté poznatky nie sú schopní aplikovať.

Na príklade problematiky štvorstena ukážeme, aká užitočná môže byť práca s vektormi bez použitia sústavy súradníc. Budeme vychádzať z názorných predstáv, a ako je na školách zvykom, umiestnenia vektorov znázorníme orientovanými úsečkami.

Predpokladáme znalosť základných operácií s vektormi vrátane skalárneho, vektorového a zmiešaného súčinu, ako aj ich geometrického významu.

Ďalej predpokladáme znalosť sčítania vektorov pomocou vektorového mnohouholníka. Napr. pri označení na obr. 1 pre vektor $\overrightarrow{AB}$ platí



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MB}.$$

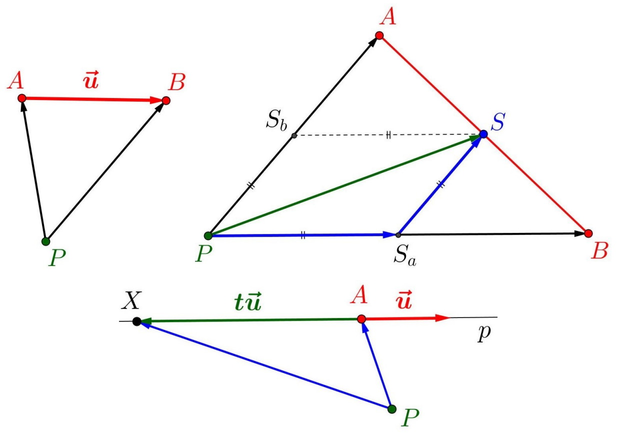
Obr. 1 Grafické sčítanie vektorov pomocou vektorového mnohouholníka

Symbolické vzťahy (zápis vektora, vzťah pre stred S úsečky AB a parametrické vyjadrenie priamky p určenej bodom a smerovým vektorom $\overrightarrow{u}$)

$$\overrightarrow{u} = B - A, \qquad S = \frac{A+B}{2}, \qquad p\colon X = A + t\overrightarrow{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

chápeme ako zjednodušené zápisy faktov, že pre ľubovoľne zvolený bod P platia vektorové rovnice

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}, \quad \overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}, \quad p\colon \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PA} + t\overrightarrow{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

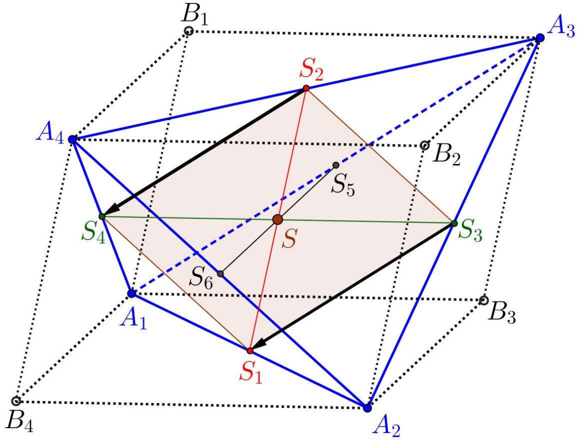


Obr. 2 Geometrické znázornenie vektorových vzťahov pre ľubovoľný bod P

Odpovedajúce si vzťahy možno podľa potreby zamieňať.

V článku pracujeme so štvorstenom $A_1A_2A_3A_4$. Podstatné úvahy sú založené na vzájomnej súvislosti medzi štvorstenom a rovnobežnostenom.

Každý štvorsten vieme umiestniť do rovnobežnostena tak, aby protiľahlé hrany štvorstena boli incidentné so stenovými uhlopriečkami navzájom rovnobežných stien rovnobežnostena. Konštrukcia je založená na posunutí (obr. 3).



Obr. 3 Rovnobežnosten $A_1B_4A_2B_3B_1A_4B_2A_3$ opísaný štvorstenu $A_1A_2A_3A_4$

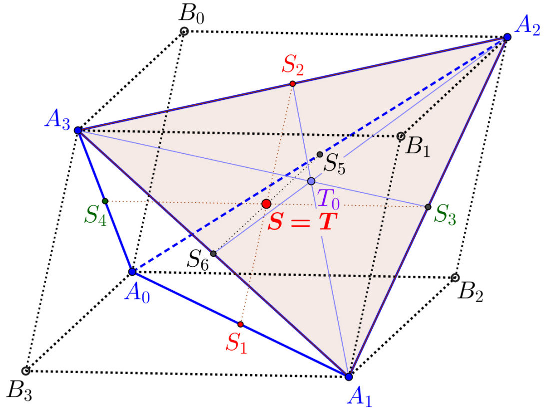
Ak S_1, S_2 sú postupne stredy protiľahlých hrán A_1A_2, A_3A_4, potom v posunutí s vektorom $\overrightarrow{S_1S_2}$ sa hrana A_1A_2 zobrazí do úsečky B_1B_2. Štvoruholník $B_1A_4B_2A_3$ je rovnobežníkom, pretože jeho uhlopriečky B_1B_2, A_3A_4 sa bodom S_2 rozpoľujú. V posunutí s vektorom $-\overrightarrow{S_1S_2}$ sa zase hrana A_3A_4 zobrazí do úsečky B_3B_4, pričom rovnobežník $A_1B_4A_2B_3$ je zhodný s rovnobežníkom $B_1A_4B_2A_3$. Oba štvoruholníky sú podstavami hľadaného rovnobežnostena. Hovoríme, že štvorsten $A_1A_2A_3A_4$ je *vpísaný* do rovnobežnostena $A_1B_4A_2B_3B_1A_4B_2A_3$, prípadne, rovnobežnosten $A_1B_4A_2B_3B_1A_4B_2A_3$ je štvorstenu $A_1A_2A_3A_4$ *opísaný*.

Vlastnosti opísaného rovnobežnostena využijeme v ďalších úvahách.

Ťažisko štvorstena

V zhode s obr. 4 označme postupne S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 a S_6 stredy hrán A_1A_2, A_3A_4, A_2A_3, A_1A_4, A_1A_3, A_2A_4 štvorstena $A_1A_2A_3A_4$ a skúmajme, čo môže znamenať výraz

$$S = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}.$$



Obr. 4 Ťažisko T štvorstena $A_1A_2A_3A_4$ je stredom opísaného rovnobežnostena

Z úpravy

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1 + A_2}{2} + \frac{A_3 + A_4}{2}\right)$$

vyplýva, že bod S je stredom úsečky S_1S_2, ktorú budeme nazývať *stredná priečka štvorstena*. Necháme na čitateľa, aby si analogicky overil, že bod S je taktiež stredom úsečiek S_3S_4 a S_5S_6. Vzhľadom k tomu, že štvoruholník stredovo súmerný podľa priesečníka uhlopriečok je rovnobežník, sú útvary $S_1S_3S_2S_4$, $S_1S_5S_2S_6$ a $S_3S_5S_4S_6$ rovnobežníky so spoločným stredom S.

Z priestorových štvoruholníkov $A_1A_2A_3B_1$ a $A_1A_4B_2B_1$ ďalej vyplývajú vzťahy

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3B_1}, \qquad \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_4B_2} + \overrightarrow{B_2B_1}.$$

Ak tieto vzťahy sčítame, potom vzhľadom k faktom

$$\overrightarrow{A_1A_2} = -\overrightarrow{B_2B_1}, \qquad \overrightarrow{A_3B_1} = -\overrightarrow{A_4B_2}$$

zistíme, že

$$2\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_4}. \tag{1}$$

Po prepise na symbolický tvar a úprave dostaneme vzťah

$$B_1 = \frac{A_1 - A_2 + A_3 + A_4}{2},$$

pomocou ktorého dokážeme, že bod S je stredom telesovej uhlopriečky A_2B_1 opísaného rovnobežnostena:

$$\frac{B_1 + A_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1 - A_2 + A_3 + A_4}{2} + A_2\right) = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4} = S.$$

Analogicky možno ukázať, že aj ostatné telesové uhlopriečky rovnobežnostena $A_1B_4A_2B_3B_1A_4B_2A_3$ majú stred v bode S. Bod S nazývame *stred rovnobežnostena.*[1]

Z doterajších úvah vyplýva veta:

Veta 1

Stredné priečky štvorstena sa pretínajú v strede opísaného rovnobežnostena.

V ďalšom zavedieme pojem *ťažiska* štvorstena a ukážeme, že sa nachádza v strede S opísaného rovnobežnostena.

Ťažiskom úsečky sa rozumie jej stred. Ťažisko trojuholníka sa definuje ako priesečník jeho ťažníc, t.j. úsečiek, ktoré majú jeden krajný bod vo vrchole trojuholníka a druhý v ťažisku protiľahlej strany. Analogicky definujeme *ťažnicu štvorstena* ako úsečku, ktorej jeden krajný bod je vrchol štvorstena a druhý je ťažiskom protiľahlej steny.

Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme o tažnici A_1T_1, kde T_1 je tažisko steny $A_2A_3A_4$ a platí

$$T_1 = \frac{A_2 + A_3 + A_4}{3}.$$

Ukážeme, že vektory $\overrightarrow{A_1T_1}, \overrightarrow{A_1S}$ sú kolineárne. Počítajme:

$$\overrightarrow{A_1T_1} = T_1 - A_1 = \frac{-3A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{3},$$
$$\overrightarrow{A_1S} = S - A_1 = \frac{-3A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}.$$

[1] Všimnime si analógie medzi rovnobežnostenom a rovnobežníkom – oba útvary sú súmerné podľa priesečníka uhlopriečok.

Z uvedených rovností odvodíme

$$\overrightarrow{A_1T_1} = \frac{4}{3}\overrightarrow{A_1S}, \tag{2}$$

čo znamená, že dané vektory sú kolineárne.

Z toho vyplýva aj fakt, že ťažnice štvorstena ležia na telesových uhlopriečkach opísaného rovnobežnostena a teda sa pretínajú v jednom bode – v strede S. Spoločný priesečník ťažníc štvorstena sa nazýva *ťažisko* a zvyčajne sa označuje ako T. Je dané vzťahom

$$T = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4} = S.$$

Vidíme, že súradnice ťažiska T štvorstena $A_1A_2A_3A_4$ vypočítame ako aritmetický priemer súradníc jeho vrcholov. Ide o analógiu rovinného prípadu pre trojuholník, avšak zo vzťahu (2) vyplýva, že ťažisko štvorstena rozdeľuje jeho ťažnice v pomere 3 : 1. Predchádzajúce úvahy teda môžeme zhrnúť do nasledujúcej vety.

Veta 2

Každá ťažnica štvorstena leží na telesovej uhlopriečke jemu opísaného rovnobežnostena, v strede ktorého sa všetky tažnice pretínajú. Tento bod sa nazýva ťažiskom štvorstena a je taktiež spoločným stredom stredných priečok štvorstena. Každá ťažnica A_iT_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ štvorstena je jeho ťažiskom T rozdelená v pomere

$$|A_iT| : |TT_i| = 3 : 1.$$

Ortocentrický štvorsten

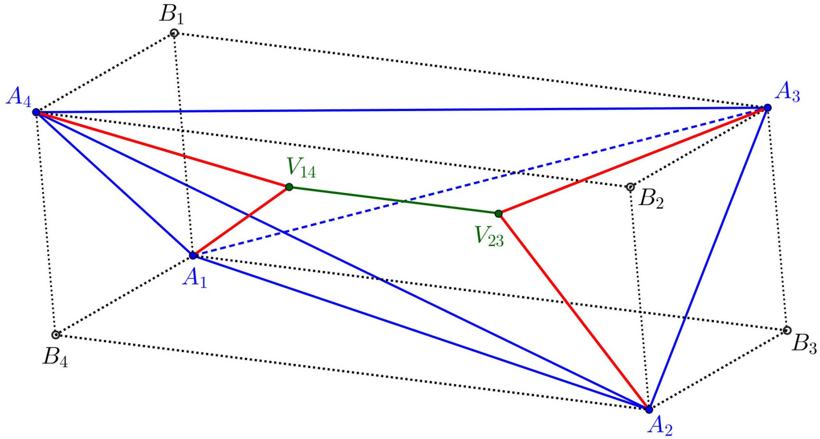
V predchádzajúcej časti sme zdôvodnili existenciu spoločného priesečníka ťažníc a stredných priečok ľubovoľného štvorstena. Teraz preskúmame existenciu spoločného priesečníka výšok štvorstena. Ukáže sa, že analógia s rovinným prípadom trojuholníka nie je oprávnená.

Výškou štvorstena rozumieme jeho telesovú výšku. Analogicky s trojuholníkom má tento termín tri rôzne významy:

1. Výška ako *vzdialenosť* vrchola štvrorstena od roviny tomuto vrcholu protiľahlej steny,
2. výška ako *priamka* – kolmica z vrchola na rovinu protiľahlej steny,

3. výška ako *úsečka* s jedným krajným bodom vo vrchole štvorstena a druhým v päte kolmice z tohto vrchola na rovinu protiľahlej steny.

Každý štvorsten má štyri výšky, ktoré sa (na rozdiel od výšok trojuholníka) ako priamky nemusia pretínať. Analyzujme najprv prípad, kedy sa pretnú dve z nich.



Obr 5 Ak $A_1A_4 \perp A_2A_3$, potom $V_{14} = q_1 \cap q_4$ a $V_{23} = q_2 \cap q_3$

Budeme používať označenie z obr. 5 a označíme q_1 kolmicu z vrchola A_1 na rovinu $A_2A_3A_4$ a zase q_4 kolmicu z vrchola A_4 na rovinu $A_1A_2A_3$. Vyjadríme si priamky parametricky:

$$q_1\colon X = A_1 + r\overrightarrow{u_1}, \quad q_4\colon X = A_4 + s\overrightarrow{u_4}, \quad r, s \in \mathbb{R},$$

a budeme hľadať ich priesečník. Vzhľadom k podmienkam kolmosti zvolíme za smerové vektory priamok vektorové súčiny nezávislých vektorov určujúcich príslušné roviny, t.j.

$$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3}, \quad \overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}.$$

Priamky q_1, q_4 sa pretínajú práve vtedy, keď platí $A_1 + r\overrightarrow{u_1} = A_4 + s\overrightarrow{u_4}$. Tento vzťah je ekvivalentný s podmienkou

$$\overrightarrow{A_1A_4} = r\left(\overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3}\right) - s\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right).$$

Skalárnym vynásobením oboch strán rovnice nenulovým vektorom $\overrightarrow{A_2A_3}$ dostávame

$$\overrightarrow{A_1A_4} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} = r\left(\overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_2A_3} - s\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_2A_3} = 0,$$

pretože zmiešané súčiny, ktoré tu vystupujú, sa rovnajú nule. (Všetky tri vektory každého z týchto súčinov majú začiatočné a koncové body v jednej rovine.)

Výsledok $\overrightarrow{A_1A_4} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} = 0$ hovorí o tom, že $\overrightarrow{A_1A_4} \perp \overrightarrow{A_2A_3}$.

Uvažujme ešte nepriamo. Nech $\overrightarrow{A_1A_4} \perp \overrightarrow{A_2A_3}$ a výšky q_1, q_4 sú mimobežné. Potom podľa predpokladu neležia vektory $\overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_2} \times \times \overrightarrow{A_1A_3}$ a $\overrightarrow{A_1A_4}$ v jednej rovine. Pre zmiešaný súčin teda platí

$$\left(\left(\overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3}\right) \times \left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right)\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4} \neq 0. \tag{3}$$

Vektor $\overrightarrow{A_2A_3}$ je súčasne kolmý k vektorom $\overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$, preto platí

$$\left(\overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3}\right) \times \left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) = k\,\overrightarrow{A_2A_3}, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}\,.$$

Dosadíme do vzťahu (3) a dostaneme

$$k\,\overrightarrow{A_2A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} \neq 0,$$

čo je spor s predpokladom o kolmosti vektorov $\overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_2A_3}$.

Zhrnieme vyššie uvedené poznatky do vety.

Veta 3

Výšky štvorstena $A_1A_2A_3A_4$ zostrojené z vrcholov A_1, A_4 sa pretínajú vtedy a len vtedy, keď $A_1A_4 \perp A_2A_3$. Ak sa tieto výšky pretínajú, potom sú steny $A_1B_1A_4B_4$, $B_3A_3B_2A_2$ zhodné kosoštvorce alebo štvorce a obrátene.

Kým prvá časť vety vyplýva z predchádzajúcich úvah, druhá je dôsledkom kolmosti $A_1A_4 \perp A_2A_3$ a poznatku, že zo všetkých rovnobežníkov majú navzájom kolmé uhlopriečky len kosoštvorce a štvorce.

Veta 3 uvádza nutnú a postačujúcu podmienku existencie priesečníka dvoch výšok štvorstena. Pozrime sa na túto vetu detailnejšie.

Ak $A_1A_4 \perp A_2A_3$, potom sa výšky z vrcholov A_1, A_4 pretínajú v bode, ktorý označíme V_{14}. Kolmosť je symetrická relácia, preto sa aj výšky z vrcholov A_2,A_3 pretínajú v bode V_{23}. Body V_{14}, V_{23} však nemusia byť totožné.

Veta 4

Ak vo štvorstene $A_1A_2A_3A_4$ je $A_1A_4 \perp A_2A_3$ a $V_{14} \neq V_{23}$, potom platí $\overrightarrow{V_{14}V_{23}} \perp \overrightarrow{A_1A_4}$ a $\overrightarrow{V_{14}V_{23}} \perp \overrightarrow{A_2A_3}$.

Dôkaz. Ukážeme, že skalárny súčin vektorov $\overrightarrow{V_{14}V_{23}}, \overrightarrow{A_1A_4}$ je nulový. Podľa obr. 5 platí

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{14}V_{23}} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} &= \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3V_{23}}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \\ &= \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_3V_{23}} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{V_{14}A_1} \cdot \left(\overrightarrow{A_2A_4} - \overrightarrow{A_2A_1}\right).\end{aligned}$$

Z podmienok kolmosti vektora $\overrightarrow{A_3V_{23}}$ na rovinu $A_1A_2A_4$ a kolmosti vektora $\overrightarrow{V_{14}A_1}$ na rovinu $A_2A_3A_4$ vyplýva

$$\overrightarrow{A_3V_{23}} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{V_{14}A_1} \cdot \overrightarrow{A_2A_4} = 0.$$

Analogicky platí $\overrightarrow{A_4V_{14}} \cdot \overrightarrow{A_2A_1} = 0$, a tak po roznásobení poslednej zátvorky postupne dostávame

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{14}V_{23}} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} &= \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} - \overrightarrow{V_{14}A_1} \cdot \overrightarrow{A_2A_1} = \\ &= \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} - \left(\overrightarrow{A_4A_1} - \overrightarrow{A_4V_{14}}\right) \cdot \overrightarrow{A_2A_1} = \\ &= \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} - \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \\ &= \left(\overrightarrow{A_1A_3} - \overrightarrow{A_1A_2}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \\ &= \overrightarrow{A_2A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = 0.\end{aligned}$$

Platí teda $\overrightarrow{V_{14}V_{23}} \perp \overrightarrow{A_1A_4}$. Analogicky odvodíme, že $\overrightarrow{V_{14}V_{23}} \perp \overrightarrow{A_2A_3}$. □

Veta 5

Vo štvorstene $A_1A_2A_3A_4$, kde $A_1A_4 \perp A_2A_3$, je veľkosť vektora $\overrightarrow{V_{14}V_{23}}$ daná vzťahom

$$\left|\overrightarrow{V_{14}V_{23}}\right|^2 = \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_4A_3} + \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right) \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{23}A_3}\right). \quad (4)$$

Dôkaz. Ponecháme označenie z vety 4. S využitím priestorových štvoruholníkov $V_{14}A_1A_2V_{23}$ a $V_{14}A_4A_3V_{23}$ vyplýva

$$\overrightarrow{V_{14}V_{23}} = \overrightarrow{V_{14}A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{V_{23}A_2}, \quad \overrightarrow{V_{14}V_{23}} = \overrightarrow{V_{14}A_4} + \overrightarrow{A_4A_3} - \overrightarrow{V_{23}A_3}. \quad (5)$$

Platí teda

$$\left|\overrightarrow{V_{14}V_{23}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right) \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} + \overrightarrow{A_4A_3} - \overrightarrow{V_{23}A_3}\right),$$

z čoho vyplýva

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{V_{14}V_{23}}\right|^2 &= \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_4A_3} + \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right) \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{23}A_3}\right) + \\ &\quad + \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{23}A_3}\right) + \overrightarrow{A_4A_3} \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right).\end{aligned}$$

Pravá strana posledného vzťahu je súčtom štyroch výrazov. Posledné dva z nich sa rovnajú nule, pretože vektor $\overrightarrow{V_{14}A_1}$ je kolmý na rovinu $A_2A_3A_4$ a vektor $\overrightarrow{V_{23}A_2}$ je kolmý na rovinu $A_1A_3A_4$. Teda vektor $\left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right)$ je kolmý na vektor $\overrightarrow{A_4A_3}$. Z toho vyplýva, že $\left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right) \cdot \overrightarrow{A_4A_3} = 0$.

Analogicky platí $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{23}A_3}\right) = 0$. □

Hovoríme, že štvorsten je *ortocentrický*, ak sa jeho výšky pretínajú v jednom bode. Spoločný priesečník výšok sa nazýva *ortocentrum* a analogicky s rovinným prípadom trojuholníka sa označuje ako V.

Ak vo vete 5 platí $V_{23} = V_{14}$, zjednoduší sa vzťah (4), na tvar

$$0 = \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_4A_3} + \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{14}A_2}\right) \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{14}A_3}\right) = 2\,\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_4A_3}.$$

Tým sme zistili, že pre ortocentrický štvorsten $A_1A_2A_3A_4$ platí

$$A_1A_4 \perp A_2A_3 \quad \text{a} \quad A_1A_2 \perp A_4A_3.$$

Uvažujme ešte obrátene. Nech pre štvorsten $A_1A_2A_3A_4$ platí

$$A_1A_4 \perp A_2A_3 \quad \text{a súčasne} \quad A_1A_2 \perp A_4A_3.$$

Z podmienky $A_1A_4 \perp A_2A_3$ podľa vety 3 vyplýva existencia priesečníkov V_{14} a V_{23}.

Keďže $A_1A_2 \perp A_4A_3$, tak $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_4A_3} = 0$ a podľa vety 5 platí

$$\left|\overrightarrow{V_{14}V_{23}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2}\right) \cdot \left(\overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{23}A_3}\right).$$

Po substitúciách

$$\overrightarrow{V_{14}A_1} - \overrightarrow{V_{23}A_2} = \overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{V_{14}V_{23}} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{V_{14}A_4} - \overrightarrow{V_{23}A_3} = \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{V_{14}V_{23}},$$

ktoré vyplývajú z rovností (5), vzťah upravíme

$$\left|\overrightarrow{V_{14}V_{23}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_3A_4}\right) \cdot \overrightarrow{V_{14}V_{23}} + \left|\overrightarrow{V_{14}V_{23}}\right|^2.$$

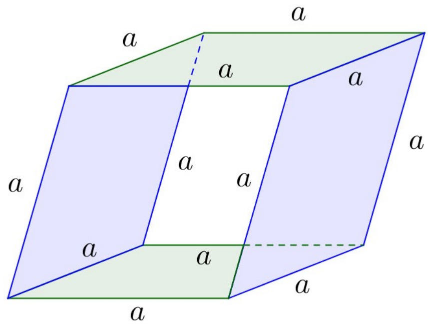
V analógii so vzťahom (1) platí $\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_3A_4} = 2\overrightarrow{B_3A_1}$, a tak nakoniec dostaneme $\overrightarrow{B_3A_1} \cdot \overrightarrow{V_{14}V_{23}} = 0$. Odtiaľ vyplýva, že $V_{14} = V_{23}$. Keby tomu tak nebolo, bol by nenulový vektor $\overrightarrow{V_{14}V_{23}}$ kolmý k trom lineárne nezávislým vektorom $\overrightarrow{B_3A_1}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ a $\overrightarrow{A_2A_3}$ a to nie je možné.

Predchádzajúce úvahy opäť zhrnieme do vety.

Veta 6

Štvorsten je ortocentrický vtedy a len vtedy, keď má dve dvojice kolmých protiľahlých hrán.

Z rovnobežníkov má kolmé uhlopriečky len kosoštvorec alebo štvorec. Pomocou obr. 6, na ktorom sú zvýraznené (koso)štvorcové steny, ľahko overíme, že rovnobežnosten s dvomi dvojicami protiľahlých stien tvaru kosoštvorca alebo štvorca má všetky hrany rovnakej dĺžky. Naviac sú zvyšné steny zhodné kosoštvorce alebo štvorce a tie ich uhlopriečky, ktoré sú protiľahlýmu hranami vpísaného štvorstena, sú navzájom kolmé. Útvar má tvar romboédra alebo kocky.



Obr. 6 Časť hranice rovnobežnostena opísaného ortocentrickému štvorstenu

Platí teda:

Veta 7

Štvorsten je ortocentrický vtedy a len vtedy, keď jemu opísaný rovnobežnosten má navzájom zhodné hrany.

Veta 8

Ak pre štvorsten $A_1A_2A_3A_4$ platí $A_1A_4 \perp A_2A_3$ a $A_1A_2 \perp A_3A_4$, potom tiež $A_1A_3 \perp A_2A_4$.

Na základe vety 7 vidíme, že existencia spoločného priesečníka výšok štvorstena určuje zaujímavý druh opísaného rovnobežnostena. Skúsme ešte určiť dĺžku jeho hrán.

Označme postupne d, e, f dĺžku hrany a dĺžky uhlopriečok ľubovoľnej steny rovnobežnostenu opísaného ortocentrického štvorstenu. Podľa vety o dĺžkach strán a uhlopriečok rovnobežníka platí[2]

$$4d^2 = e^2 + f^2. \tag{6}$$

Pre každú stenu uvažovaného rovnobežnostena má ľavá strana vzťahu (6) rovnakú hodnotu, kdežto

$$\{e, f\} \in \big\{\{|A_1A_2|, |A_3A_4|\}, \{|A_1A_3|, |A_2A_4|\}, \{|A_1A_4|, |A_2A_3|\}\big\}.$$

Dosadením dĺžok hrán štvorstena do (6) za hodnoty e, f a porovnaním pravých strán získaných rovností zistíme, že ortocentrický štvorsten spĺňa vzťah

$$|A_1A_2|^2 + |A_3A_4|^2 = |A_1A_4|^2 + |A_2A_3|^2 = |A_1A_3|^2 + |A_2A_4|^2 .$$

Opäť je na mieste otázka, či tento vzťah pre dĺžky hrán opísaného rovnobežnostena podmieňuje aj existenciu ortocentra štvorstena. Počítajme nasledovne:

$$|A_1A_2|^2 + |A_3A_4|^2 = |A_1A_4|^2 + |A_2A_3|^2 ,$$
$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_1A_4} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{A_2A_3} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} - \overrightarrow{A_3A_4} \cdot \overrightarrow{A_3A_4},$$
$$\left(\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_1A_4}\right) \cdot \left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \left(\overrightarrow{A_2A_3} - \overrightarrow{A_3A_4}\right) \cdot \left(\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}\right),$$
$$-\overrightarrow{A_2A_4} \cdot \left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \left(\overrightarrow{A_2A_3} - \overrightarrow{A_3A_4}\right) \cdot \overrightarrow{A_2A_4},$$

[2] Ak čitateľ vetu nepozná, isto dokáže vzťah 6 odvodiť s využitím Pytagorovej vety a vlastností uhlopriečok kosoštvorca alebo štvorca.

$$0 = \overrightarrow{A_2A_4} \cdot \left(\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} \right) + \left(\overrightarrow{A_4A_3} - \overrightarrow{A_4A_1} \right) \right),$$
$$0 = 2\,\overrightarrow{A_2A_4} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}.$$

Z poslednej rovnosti vyplýva, že nenulové vektory $\overrightarrow{A_2A_4}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ sú na seba kolmé.

Analogicky by sme dokázali aj kolmosť ďalšej dvojice protiľahlých hrán. To znamená, že pre ortocentrický štvorsten máme ďalšiu nutnú a postačujúcu podmienku. Uvedieme ju ako vetu.

Veta 9

Štvorsten $A_1A_2A_3A_4$ je ortocentrický vtedy a len vtedy, keď platí

$$|A_1A_2|^2 + |A_3A_4|^2 = |A_1A_4|^2 + |A_2A_3|^2 = |A_1A_3|^2 + |A_2A_4|^2.$$

Záver

Výučbe geometrie, a najmä stereometrie, nie je na školách venovaná taká pozornosť ako v minulosti. Termín štvorsten sa z učebníc pomaly vytráca a je nahrádzaný pojmom trojboký ihlan. Hoci ide o to isté teleso, z didaktického hľadiska je medzi nimi podstatný rozdiel. Pri budovaní predstavy trojbokého ihlana vychádzame zo štandardného umiestnenia telesa a rozlišujeme trojuholníkovú podstavu (základňu) od bočných stien. Vrchol ihlana má v porovnaní s vrcholmi podstavy výnimočnejšie miesto. Keď model nepravidelného trojbokého ihlana položíme na bočnú stenu, zmení sa jeho podstava a vrchol. Tento prístup obmedzuje rozvoj priestorových predstáv. Stretávame sa aj s učiteľmi matematiky, ktorí si nedokážu predstaviť pravidelný štvorsten vpísaný do kocky.

Náš príspevok si kládol za cieľ zoznámiť, najmä mladších čitateľov, s niektorými základnými vlastnosťami štvorstenov metódou práce s vektormi ako s orientovanými úsečkami. Táto metóda sa v školách veľmi nepoužíva, hoci ide o vhodný prostriedok k rozvoju geometrického myslenia. Prispieva k spojeniu analytickej a syntetickej geometrie do jedného celku a naviac, má široké uplatnenie vo fyzike a v praxi.

Dúfame, že článok aspoň trochu obohatil čitateľa, a že bude pre učiteľov inšpiráciou pre prácu s talentovanými žiakmi v nepovinnej matematike.

Poďakovanie. Autorovi je milou povinnosťou poďakovat RNDr. Pavlovi Leischnerovi, PhD. z PF JU v Českých Budějoviciach za mnohé cenné rady a pripomienky, ktoré podstatným spôsobom pomohli vylepšiť pôvodné znenie rukopisu.

Literatúra

[1] *Bartsch, H.-J.*: Matematické vzorce. SNTL, Praha, 1963.

[2] *Leischner, P.*: Geometrická zobrazení. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2010.

[3] *Pavlovičová, G. – Vidermanová, K.*: Niektoré riešenia úlohy o ťažisku štvorstena. Acta mathematica **8**, FPV UKF, Nitra, (2005).

[4] *Šrubař, J.*: Vlastnosti trojuhelníka a jejich analogie pro štyřstěn. In: Sborník příspěvků z 25. Konference o geometrii a počítačové grafice, JSMF, Praha, 2005.

[5] *Vaguten, V. N.*: Srednie linii. Kvant **6** (1989).

[6] *Šrubař, J.*: Prostorová zobecnění vlastností trojúhelníka. In: Sborník příspěvků 24. konference o geometrii a počítačové grafice, VŠB-TU, Ostrava, 2004.

[7] *Pavlovičová, G.*: Niektoré úlohy na štvorsten riešené na strednej škole. Acta mathematica **5**, UKF, Nitra, (2002).

[8] *Pavlovičová, G. – Rumanová, L.*: Štvorsten a jeho vlastnosti, aplikácie. Acta mathematica **12**, UKF, Nitra, (2009).

[9] *Vallo, D.*: Klasifikácia štvorstenov podľa im opísaných rovnobežnostenov. In: Nové trendy výučby stereometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky, UKF, Nitra, 2012.

Cestou necestou ke kombinatorice

PAVEL ŠALOM – MICHAL ROLÍNEK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Cesty ke kombinatorice jsou určitě rozmanité a nevyzpytatelné, místy krásné, místy pochmurné a slepé. Jednu z takových cest výstižně popsal student učitelství, jehož slova jsme si vypůjčili z publikace [1]. „Kombinatorika je ako športka. Nikdy neviem či vziať vzorec na kombinácie, variácie alebo permutácie. Zvyčajně netrafím. Nemám tu pevnú pôdu pod nohami, preto kombinatoriku nemám rád.“ Domníváme se, že příčinou jeho nechuti ke kombinatorice je formální poznání. Čtveřici vzorců

$$\begin{aligned}
P(n) &= n!,\\
V_k(n) &= \frac{n!}{(n-k)!},\\
V'_k(n) &= n^k,\\
C_k(n) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

vnímáme jako pochmurnější, možná až slepou, cestu ke kombinatorice.

V chystaném výukovém materiálu o kombinatorice proto chceme nabídnout jinou cestu. Chceme podněcovat objevování, různé řešitelské strategie a předkládat zajímavé výzvy. V první řadě nám jde o aktivní zapojení studentů do procesu, při kterém se „dělá matematika“. Například to znamená, že preferujeme prvně práci s určitým jevem a až poté jeho pojmenování nebo případně shrnutí pomocí vzorce. Naším přáním je nedávat návody, ale podněcovat k tvořivému a logickému myšlení.

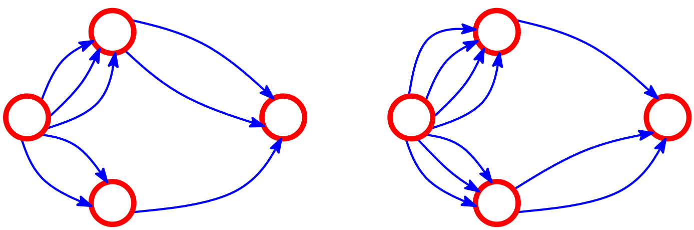
Rozhodli jsme se, že kombinatorické úlohy budeme předkládat ve čtyřech skupinách. Jednou z těchto skupin jsou úlohy, které se točí kolem počítání cest mezi městy a právě tuto skupinu představíme. Města symbolicky kreslíme pomocí koleček a linky pomocí šipek. Z pohledu matematiky jde vlastně o objekty z teorie grafů. Podívejme se již na samotné úlohy.

Úloha 1

a) V obou plánech určete počet různých cest z města nejzápadnějšího do nejvýchodnějšího.

b) Kterou linku je třeba v pravém plánu zrušit, aby počty cest z nejzápadnějšího města do nejvýchodnějšího byly v obou plánech stejné?

c) Přidejte do levého plánu jednu linku tak, aby počty cest z nejzápadnějšího města do nejvýchodnějšího byly v obou plánech stejné. Nalezněte dva různé způsoby.

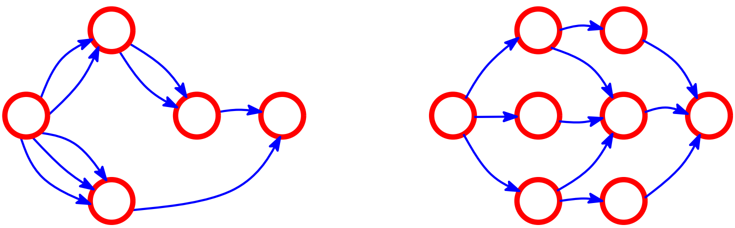


Komentář. Vzhledem k tomu, že cest je málo, první a zcela přirozenou strategií řešení části a) je cesty jednoduše začít počítat. Často přitom dojde k rozdělení na „horní“ a „dolní“ cesty. Tím se přirozeně objeví kombinatorické pravidlo součtu.

Části b) a c) lze řešit metodou pokus – omyl. Počítání cest v několika podobných situacích dává žákům zkušenosti a zároveň vytváří potřebu rychleji počet cest spočítat. To vede k sofistikovanější strategii, která začne používat i kombinatorické pravidlo součinu. Pak je počet cest v levém plánu $3 \cdot 2 + 2$. Pro řešení části c) potom zjišťujeme, které z čísel $4 \cdot 2 + 2$, $3 \cdot 3 + 2$, $3 \cdot 2 + 3$, $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2$ je 10. To nám dá dvě řešení části c).

Úloha 2

U každého z měst určete, kolik do něj vede různých cest z města nejzápadnějšího. Výsledky vepisujte do kroužků.



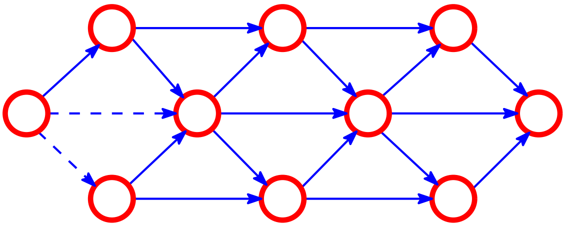
Komentář. Úloha nabízí další možnou strategii pro počítání cest. Tentokráte jde o jakýsi „tok čísel“. Chceme-li zjistit číslo ve vybraném kroužku, potřebujeme znát čísla ve všech kroužcích, ze kterých směřuje šipka do kroužku vybraného. Tento proces usnadňuje porozumění například kombinatorickému pravidlu součinu, které začne být náročnější, násobí-li se více než dvě čísla.

Úloha 3

a) Rozhodněte, kterou z linek vyznačených přerušovanou šipkou máme zrušit, aby se počet cest z nejzápadnějšího města do nejvýchodnějšího snížil méně.

b) Pro každé z měst určete, kolik do něj vede různých cest z města nejzápadnějšího (bez rušení jediné linky).

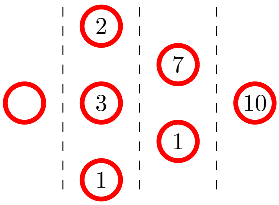
c) Pokud jste počítali správně, vyšla vám v části b) v prostředním řádku tři prvočísla. Rozhodněte, zda by vycházela prvočísla i dále, pokud bychom soustavu linek prodloužili ve stejném duchu.

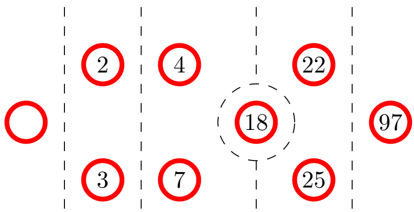


Komentář. V části c) máme rozhodnout tvrzení, pro jehož platnost není žádný „pádný důvod“. Po prodloužení linek se ukáže, že hned další číslo v prostředním řádku není prvočíslo. Je zajímavé, že při testování úloh mnoho žáků tvrdilo, že prvočísla budou vycházet pořád.

Úloha 4

Čísla v kroužcích značí, kolika různými způsoby se do daného města lze dostat z toho nejzápadnějšího. Doplňte linky tak, že každá z nich směřuje ze západu na východ a protíná přesně jednu přerušovanou čáru.





Komentář. Jde o úlohu inverzní k předchozím úlohám. Podobné úlohy považujeme za výzvu, protože je nelze řešit zcela mechanicky. Přitom jsou dostatečně jednoduché na to, aby i slabší žáci zažili při řešení úspěch a lze je zkomplikovat tak, aby byly výzvou i pro dobré žáky.

Při této řešení úlohy vlastně řešíme dílčí úlohy následujícího typu: Najděte všechna přirozená čísla x, y, pro něž platí

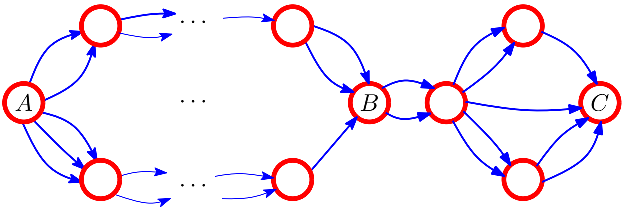
$$22x + 25y = 97.$$

Čísly x a y jsme si označili počty cest vedoucí do nejvýchodnějšího města na obrázku vpravo. Řešíme tedy vlastně lineární diofantovské rovnice. Strategie pro řešení této podúlohy může být například taková, že od čísla 97 odčítáme číslo 25 tak dlouho, dokud nedostaneme číslo dělitelné 22.

Během testování úloh jsme zprvu nepoužili přerušované čáry, což vedlo k obrovskému množství různých řešení. Toho se dá využít k podpoře tvořivého myšlení. Pravděpodobně se pak objeví i „degenerovaná“ řešení, v nichž všechny cesty vedou z města západního (například do nejvýchodnějšího města tak vede všech 97 cest z města západního).

Úloha 5

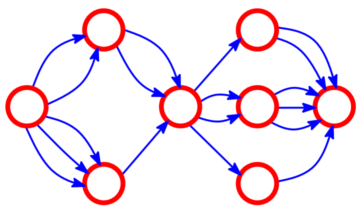
Kolikrát více způsoby se lze dostat z města A do města C než z města A do B?



Komentář. Tato úloha připravuje náročnou myšlenku – pracovat s neznámým počtem. Označíme-li počet způsobů, kterými se lze dostat z A do B, jako x, pak z A do C se lze dostat $x\cdot(2\cdot(2\cdot1+1+2\cdot2)) = 14x$ způsoby. Jde vlastně o podobnou myšlenku, jako když počítáme počet neuspořádaných trojic. Ten nepočítáme přímo, ale řekneme, že neuspořádanou trojici lze uspořádat $3\cdot2\cdot1$ způsoby. Potom vypočítáme počet uspořádaných trojic. Tato obecná myšlenka bývá pro žáky dosti náročná, proto se snažíme dopřát jim s touto myšlenkou zkušenosti.

Úloha 6

Která linka je pro následující leteckou síť *nejdůležitější* (tj. její zrušení způsobí největší úbytek cest z nejzápadnějšího města do nejvýchodnějšího)?



Komentář. Zde je zajímavá volba strategie. Pracnější strategií je projít všechny možnosti. Po odebrání vybrané linky umíme spočítat počet cest.

Vybereme-li postupně každou linku, najdeme řešení. Pomoci může i určitá intuice, která nám prozradí, že odebrání některých linek způsobí jen malý úbytek.

Sofistikovanější strategií je spočítat počet cest jako

$$(2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1).$$

Odebrat jednu linku znamená vybrat si v tomto výrazu jedno číslo, které snížíme o 1. Jsou-li v součinu dvě různá čísla, je výhodnější snížit to menší (např. součin $2 \cdot 3$ se vyplatí snížit na $1 \cdot 3$). Chceme si v každé závorce vybrat takový součin, který obsahuje největší číslo. V levé závorce je to součin $3 \cdot 1$, v pravé závorce součin $2 \cdot 3$. V obou případech se hodnota součinu zmenší o 3. Celkový počet cest se tak změní buď o trojnásobek hodnoty výrazu v pravé závorce, nebo o trojnásobek hodnoty výrazu v levé závorce.

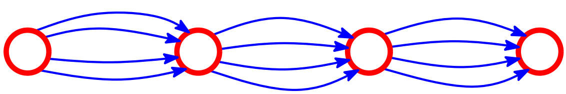
Z těchto úvah vyplývá, že největší úbytek cest způsobí snížení na $(2 \cdot 2 + 3 \cdot 0) \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1)$.

Úloha 7

Petr a Dan hrají hru. Hráči v následujícím plánu střídavě ruší jednu z linek. Petr hraje první. Vítězí ten, po jehož tahu již není východní město ze západního dostupné.

a) Kdo z hráčů si může zajistit výhru bez ohledu na to, jaké tahy volí druhý hráč?

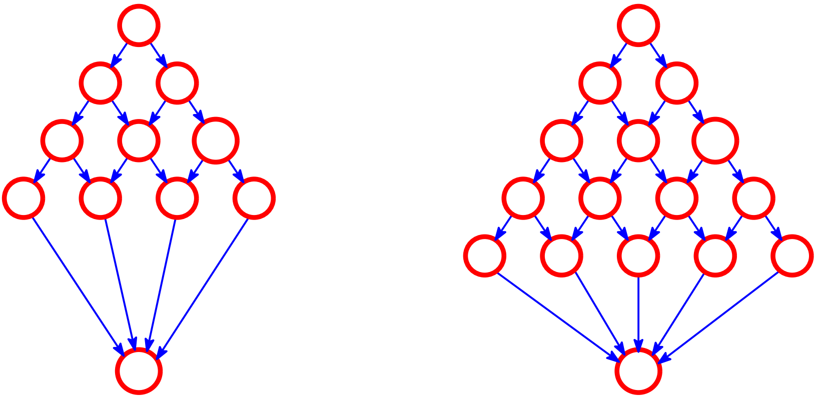
b) Pokud budou oba hráči hrát bez chyb (tj. tak, aby co nejrychleji vyhráli či alespoň co nejvíce oddálili prohru), kolik nejvíce tahů může hra mít?



Komentář. Linky lze využít i pro kombinatorické hry. V této hře prohraje ten hráč, který bude na tahu v situaci, kdy jsou každá dvě sousední města spojena už jen dvěma linkami. Takovou situaci může vynutit Dan například tak, že kdykoliv Petr zruší linku mezi nějakými dvěma městy, Dan odpoví zrušením linky mezi týmiž městy.

Úloha 8

Určete, kolika způsoby se můžeme dostat do každého města z města nejseverněji položeného. Nalezené hodnoty vpisujte do kroužků.



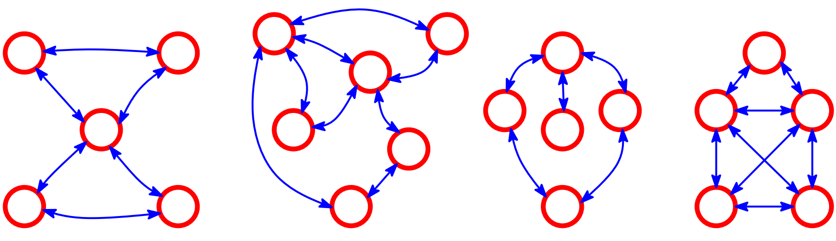
Komentář. Síť měst má stejnou strukturu jako Pascalův trojúhelník. Pomocí podobných úloh si mohou žáci rovněž uvědomit vztah

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

K důkladnému porozumění je samozřejmě potřeba mít předem rozmyšleno, že počet způsobů, jakými lze po šipkách dojít do vybraného města, odpovídá přesně příslušnému kombinačnímu číslu.

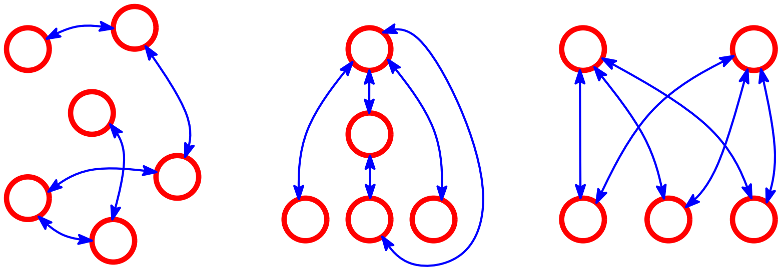
Úloha 9

Letecký inspektor se chystá na okružní let, v němž hodlá prověřit každou leteckou linku. Rozhodněte, ve kterých leteckých sítích se mu to může podařit, aniž by nějakou linku využil vícekrát (takové linky nazveme *průchodné*).



Úloha 10

V následujících sítích přikreslete vždy jednu linku tak, aby se sítě staly průchodnými.



Komentář. Předchozí dvě úlohy zkoumají grafy, které se běžně nazývají eulerovské. Pomocí série úloh žáci objeví, že pro uskutečnění okružního letu je potřeba, aby z každého města vedl sudý počet obousměrných linek. Je totiž potřeba odletět z každého města, do kterého přiletíme (a to i opakovaně). Ve skutečnosti platí i obrácené tvrzení – pokud z každého města vede sudý počet obousměrných linek, pak je možné okružní let uskutečnit. Důkaz obráceného tvrzení je už přece jen o něco málo náročnější, i když pro středoškoláky zvládnutelný.

V tradiční výuce bohužel není na podobná témata příliš času, ale chceme ukázat, že „prostředí“ cest má potenciál i tímto směrem.

Úloha 11

Navrhněte leteckou síť, v níž se lze z každého města do každého dostat pomocí jedné či více navazujících linek. Síť přitom nemá být průchodná a nemá se stát průchodnou ani po přidání a) jakékoliv linky, b) dvou jakýchkoliv linek, c) 2014 jakýchkoliv linek. Všechny linky jsou obousměrné.

Komentář. Úloha poskytuje značný prostor, protože není jasné, odkud se do ní pustit. Tím se stává i o něco náročnější než předchozí úlohy. Nicméně v momentě, kdy už víme, že pro uskutečnění okružního letu je potřeba, aby z každého města vedl sudý počet linek, je řešení nasnadě. Pro řešení části a) stačí nakreslit libovolnou síť, v níž alespoň ze čtyř měst povede lichý počet linek. Pro řešení části b) potřebujeme takových měst alespoň šest a pro řešení části c) dokonce 4 030. Příkladem vhodné letecké sítě může být „hvězdice“, v níž je jedno město centrální a každé jiné město je spojeno jen a pouze s centrálním městem.

Poděkování. Tento článek vznikl v rámci projektu SVV 2014-260105. Výzkum byl podpořen Grantovou agenturou Univerzity Karlovy v Praze (projekt č. 1250213).

L i t e r a t u r a

[1] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky 2, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1990.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 12. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz.* Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 207

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$(a+9)\left(a^2+\frac{1}{a}+\frac{b^2}{8}\right) \geq (a+b+1)^2.$$

Kdy nastane rovnost?

Robert Geretschläger (Graz)

Úloha 208

Dokažte, že ze sedmi libovolně zvolených přirozených čísel lze vybrat čtyři tak, že jejich součet je dělitelný číslem 4.

Józef Kalinowski (Kalety)

Dále uvádíme řešení úloh 201 až 204, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním a druhém čísle letošního (23.) ročníku našeho časopisu.

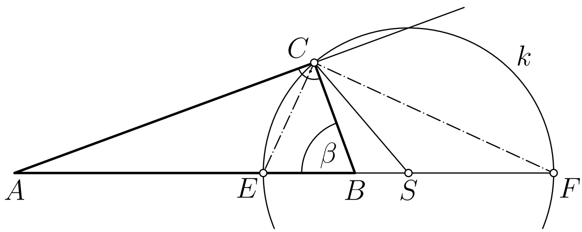
Úloha 201

V nerovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku ABC protne osa vnitřního úhlu a osa vnějšího úhlu při vrcholu C přeponu po řadě v bodech E a F. Dokažte, že platí

$$|AE| \cdot |AF| + |BE| \cdot |BF| > |AB|^2.$$

Jaroslav Zhouf

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|AC| > |BC|$, tj. pro velikost vnitřního úhlu při vrcholu B trojúhelníku ABC platí $\beta > 45°$. Bod F je potom bodem polopřímky opačné k polopřímce BA. Osy vnitřního a vnějšího úhlu jsou kolmé, trojúhelník EFC je tedy pravoúhlý a střed S přepony EF je středem kružnice k jemu opsané. Velikost úhlu CEB je $135° - \beta$, trojúhelník ESC je rovnoramenný, proto velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu C je také $135° - \beta > 45° = |\sphericalangle ECB|$ a bod S je tedy opět bodem polopřímky opačné k polopřímce BA.



Užitím věty o mocnosti bodu vzhledem ke kružnici k pro body A a B dostaneme

$$\begin{aligned} |AE| \cdot |AF| &= |AS|^2 - |ES|^2, \\ |BE| \cdot |BF| &= |ES|^2 - |BS|^2. \end{aligned}$$

Sečtením těchto vztahů konečně získáme

$$|AE| \cdot |AF| + |BE| \cdot |BF| = |AS|^2 - |BS|^2 =$$
$$= (|AS| - |BS|)(|AS| + |BS|) = |AB|(|AB| + 2|BS|) > |AB|^2,$$

což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně a *Jozef Mészáros* z Jelky.

Úloha 202

V aritmetické posloupnosti platí pro jistá přirozená čísla k a l

$$a_k = 2l + k \qquad \text{a} \qquad a_l = 2k + l.$$

Najděte všechny takové posloupnosti.

Stanislav Trávníček

Řešení. Pro členy aritmetické posloupnosti s diferencí d a počátečním členem a_1 platí

$$a_k = a_1 + d(k-1) \qquad \text{a} \qquad a_l = a_1 + d(l-1).$$

Proto

$$a_k - a_l = d(k-l).$$

Podle zadání ovšem platí

$$a_k - a_l = (2l + k) - (2k + l) = l - k.$$

Odtud vidíme, že buď $d = -1$ nebo $k = l$.

V případě $d = -1$ pro člen a_k platí

$$a_1 - (k-1) = a_k = 2l + k,$$

tedy $a_1 = 2(k+l) - 1$ a pro libovolný n-tý člen a_n této posloupnosti platí

$$a_n = 2(k+l) - 1 - (n-1) = 2(k+l) - n.$$

V případě $k = l$ je řešením libovolná aritmetická posloupnost, ve které pro její k-tý člen platí $a_k = 3k$.

V případě $k \neq l$ vyhovuje zadání jediná posloupnost

$$\bigl(2(k+l) - n\bigr)_{n=1}^{\infty},$$

v případě $k = l$ je řešením libovolná aritmetická posloupnost, ve které pro její k-tý člen platí $a_k = 3k$.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Anton Hnáth* z Moravan.

Neúplné řešení zaslal: *František Jáchim* z Volyně.

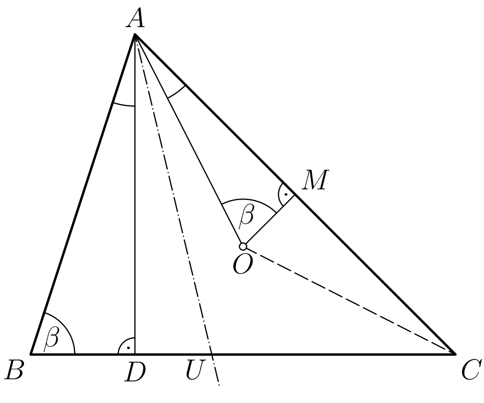
Úloha 203

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a D pata jeho výšky z vrcholu A na stranu BC. Dokažte, že osa úhlu CAB je rovněž osou úhlu DAO.

Erich Windischbacher (Graz)

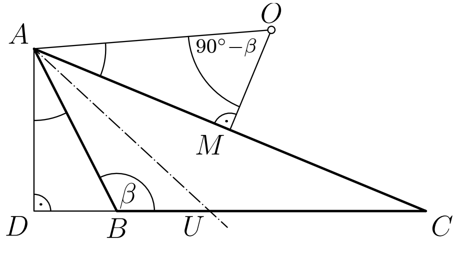
Řešení. Označme M střed strany AC. Uvažujme tři případy pro velikost vnitřního úhlu β při vrcholu B.

Nechť $\beta < 90°$. V tomto případě je bod D bodem polopřímky BC a bod O bodem poloroviny ACB. Velikost středového úhlu AOC příslušného obvodovému úhlu ABC na kružnici trojúhelníku ABC opsané je 2β. Ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků AOM a COM je pak velikost úhlu AOM rovna β (viz obr. 1). Podle věty (uu) jsou pravoúhlé trojúhelníky ABD a AOM podobné, tedy jejich vnitřní úhly BAD a OAM jsou shodné. Odtud již plyne dokazované tvrzení, že osa úhlu CAB je rovněž osou úhlu DAO.



Obr. 1

V případě $\beta > 90°$ se obdobným způsobem dokáže podobnost trojúhelníků ABD a AOM (viz obr. 2).



Obr. 2

Bod D je přitom bodem polopřímky opačné k polopřímce BC a bod O je bodem poloroviny opačné k polorovině ACB. Odkud již opět plyne dokazované tvrzení.

V případě $\beta = 90°$ splyne bod D s bodem B a bod O s bodem M a tvrzení zřejmě platí.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Úloha 204

Nechť pro reálná čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2014}$ současně platí

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{2014} \geq 0 \qquad \text{a} \qquad a_{54}^2 + a_{55}^2 + \ldots + a_{2014}^2 \geq \frac{19}{2}.$$

Dokažte, že platí nerovnost

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2014} \geq \sqrt{2014}.$$

Může v této nerovnosti nastat rovnost?

Jozef Mészáros

Řešení. Pokud by $a_{53} = 0$, platilo by vzhledem k uspořádání

$$a_{54} = a_{55} = \ldots = a_{2014} = 0,$$

což je ve sporu s nerovností pro tyto členy. Proto $a_{53} > 0$. Označme dále

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2014}.$$

Z nerovnosti $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{53}$ plyne

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{53} \geq 53\, a_{53}. \tag{1}$$

Pro libovolné přirozené číslo m ($54 \leq m \leq 2014$) plyne z nerovnosti $a_{53} \geq a_m \geq 0$ také nerovnost $a_m^2 \leq a_{53} a_m$, přičemž rovnost nastává v případě $a_m = a_{53}$ nebo $a_m = 0$. Podle zadání užitím těchto nerovností platí

$$\frac{19}{2} \leq a_{54}^2 + a_{55}^2 + \ldots + a_{2014}^2 \leq a_{53}\,(a_{54} + a_{55} + \ldots + a_{2014}). \tag{2}$$

Z nerovností (1) a (2) plyne

$$s = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{53}) + (a_{54} + a_{55} + \ldots + a_{2014}) \geq 53\, a_{53} + \frac{19}{2\, a_{53}}.$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dále platí

$$s \geq 53\,a_{53} + \frac{19}{2\,a_{53}} \geq 2\sqrt{53\,a_{53} \cdot \frac{19}{2\,a_{53}}} = \sqrt{2014},$$

což jsme měli dokázat.

Rovnost zde nastane, právě když nastane rovnost ve všech užitých nerovnostech. V užité nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem tedy platí

$$53\,a_{53} = \frac{19}{2\,a_{53}}.$$

Odtud

$$a_{53} = \sqrt{\frac{19}{106}}.$$

V nerovnosti (1) nastane rovnost, právě když

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{53},$$

a v nerovnosti (2) nastane rovnost, právě když existuje přirozené číslo m ($54 \leq m \leq 2014$) takové, že současně platí

$$a_{54} = a_{55} = \ldots = a_m = a_{53},$$

$$a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_{2014} = 0,$$

$$\frac{19}{2} = a_{54}^2 + a_{55}^2 + \ldots + a_m^2 = (m-53)\,a_{53}^2 = (m-53)\,\frac{19}{106}.$$

Odtud již snadno vidíme $m = 106$. Proto nastane v dokazované nerovnosti rovnost, právě když

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{106} = \sqrt{\frac{19}{106}} \qquad \text{a} \qquad a_{107} = a_{108} = \ldots = a_{2014} = 0.$$

Správná řešení zaslal: *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Pavel Calábek

FYZIKA

Zájem středoškoláků o matematické činnosti ve výuce fyziky

VOJTĚCH ŽÁK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Úvod a vymezení problému

Nedílnou součástí výuky fyziky na středních školách je využívání matematických prostředků. Spojení matematiky s fyzikou samozřejmě není výsadou fyziky ve škole, ale obecně dochází k vzájemnému ovlivňování se fyziky a matematiky ve fyzikální vědě. Z historie můžeme připomenout těsné sepětí vzniku a rozvoje diferenciálního a integrálního počtu spojené se jménem I. Newtona (ale nejen s ním, podrobněji např. [1, s. 199]).

Z hlediska vzdělávání můžeme fakt, že se ve výuce fyziky ve škole hojně používají matematické prostředky, chápat jako příležitost k rozvoji tzv. *matematické gramotnosti.* Ta je vymezena např. jako *způsobilost rozpoznat a pochopit matematiku, zabývat se jí a být schopen/schopna podložených soudů o úloze matematiky v soukromém životě jednotlivce, v zaměstnání, ve společnosti ([2], s. 225) nebo podobně schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana* ([3, s. 10]).

Matematická gramotnost je v posledních letech často skloňovaným fenoménem a to např. v souvislosti s mezinárodním šetřením PISA (např. [3]). Je zřejmé, že to, jak je matematika využívána fyzikou (i tou školskou) dobře odpovídá zejména slovům z druhé uvedené definice matematické gramotnosti „…poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky…“. Je nepochybné, že k rozvoji matematické gramotnosti může tedy v tomto smyslu kromě výuky matematiky (jako samostatného předmětu) přispět také fyzika (a nepochybně také další přírodovědné obory).

Téma matematické gramotnosti (a dalších gramotností) je v současné době v domácím prostředí velmi živé. Za pozornost jistě stojí strategický rozvojový projekt NIQES (Národní systém inspekčního hodnocení vzdělávací soustavy v České republice), jehož hlavním cílem je transformace a modernizace národního inspekčního systému. V rámci něj probíhá také vývoj integrovaného systému inspekčního hodnocení vzdělávací soustavy, a to mimo jiné i v oblasti matematické a přírodovědné gramotnosti (více [4]).

Na jedné straně si tedy uvědomujeme potencialitu fyziky k rozvoji matematické gramotnosti, ale na druhou stranu je obtížné nevnímat podmínky k tomuto rozvoji. Mezi tyto podmínky nepochybně patří mimo jiné zájem žáků věnovat se ve výuce fyziky matematickým činnostem. Na otázku, jaký je zájem žáků o „matematiku ve fyzice“, si může určitým dílčím způsobem odpovědět každý učitel fyziky, nicméně tato otázka byla v posledních letech v domácím prostředí částečně řešena i výzkumně a to v rámci projektu *Fyzikální vzdělávání pro všestrannou přípravu a rozvoj lidských zdrojů na úrovni základních a středních škol*, který spadal pod *Národní program výzkumu II*[3]. Na jeho řešení se podíleli odborníci z katedry didaktiky fyziky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze (dále KDF MFF UK)[4].

Respondentům, kterými byli žáci středních škol (více než 2300, podrobněji [6, s. 16]), byla položena mimo jiné otázka, které činnosti by ve škole při fyzice rádi dělali. Nabídnuto jim bylo celkem 16 činností, které vybrali a formulovali odborníci z KDF MFF UK. Jak byly jednotlivé činnosti žáky hodnoceny, ukazuje tab. 1.

Využívání matematických prostředků je explicitně obsaženo zejména v položkách: *Ve škole při fyzice bych rád/a počítal/a příklady (řešil/a početní úlohy)* a *Ve škole při fyzice bych rád/a odvozoval/a vzorečky, nejen se je učil/a nazpaměť.* Také některé další položky souvisejí s matematikou, např. využití počítačů při zpracování dat a využití počítačů k měření, ale

[3] Zadavatelem bylo MŠMT.

[4] Použitý dotazník zahrnoval větší množství položek než jen ke zkoumání výše nastíněné problematiky (podrobněji [5, s. 271–275]).

v nich se výrazně objevují i momenty mimo matematiku (např. ICT). Zaměříme-li tedy pozornost na uvedené dvě položky, ve kterých je matematika zastoupena nejvýrazněji, můžeme si všimnout, že se jedná o nejhůře hodnocené činnosti (poslední dva řádky v tab. 1). K tvrzení *Ve škole při fyzice bych rád/a odvozoval/a vzorečky, nejen se je učil/a nazpaměť* zaujímají žáci postoj neutrální až spíše nesouhlasný (hodnota 2,7 je mezi 2,5 a 3,0) a s tvrzením *Ve škole při fyzice bych rád/a počítal/a příklady (řešil/a početní úlohy)* žáci spíše nesouhlasí (hodnota 3,0).

Činnost, kterou by žáci SŠ chtěli ve fyzice dělat	*hodnocení*
dělal/a pokusy vlastníma rukama	1,7
využíval/a počítače při zpracování dat	1,8
naučil/a se třídit a systematizovat informace	1,8
sestrojoval/a jednoduchá zařízení, hračky apod.	1,9
vyhledával/a a zpracovával/a informace z internetu	1,9
využíval/a počítače k měření	2,0
získal/a lepší odhad vzdálenosti, času apod.	2,0
sledoval/a pokus, který dělá učitel/ka	2,1
chodil/a na exkurze, přednášky odborníků apod.	2,2
zabýval/a se problémy, u kterých není hned jasný způsob řešení	2,2
dělal/a laboratorní práce	2,2
sám/sama něco objevoval/a	2,2
naučil/a se měřit	2,3
naučil/a se odhadovat chyby měření	2,5
odvozoval/a vzorečky, nejen se je učil/a nazpaměť	2,7
počítal/a příklady (řešil/a početní úlohy)	3,0

Tab. 1 Preference činností ve výuce fyziky (1 – velmi souhlasím, 2 – spíše souhlasím, 3 – spíše nesouhlasím, 4 – velmi nesouhlasím s tvrzením „Ve škole při fyzice bych rád/a…“)

Zjednodušeně tedy můžeme na základě zjištěných dat soudit, že využívání matematických prostředků ve fyzice je u žáků spíše neoblíbené. V souvislosti s tím ale vyvstává otázka, zda zaujímají tento postoj různé skupiny žáků, nebo zda se v tomto hodnocení výrazněji liší. Různými skupinami žáků můžeme mínit žáky s různým prospěchem, různými budoucími studijními preferencemi, žáky z různých typů středních škol, s různým socioekonomickým zázemím atd.

V následující analýze se zaměříme na žáky s různou známkou z fyziky a na žáky, kteří chtějí v budoucnosti studovat matematiku nebo fyziku na vysoké škole. K tomuto zaměření nás vedou následující důvody: Známka z fyziky na vysvědčení je určitým indikátorem školní úspěšnosti žáka v tomto předmětu, a i když může být rozdělení žáků podle známek (prospěchu) diskutabilní, jsou touto optikou žáci učitelem (ale i navzájem) nahlíženi a známka je určitým vodítkem při jejich výuce. Skupina žáků, kteří chtějí studovat matematiku nebo fyziku na vysoké škole, je pak zajímavá z toho důvodu, že reprezentuje mladé lidí, kteří budou s velkou pravděpodobností tyto obory využívat a možná i dále rozvíjet, a je tedy velmi žádoucí dbát na přenos oborového poznání těmto lidem.

Jako první výzkumný problém byla stanovena následující otázka: *Souvisí obliba činností spojených s matematikou ve výuce fyziky s prospěchem z fyziky?*

Hypotézou v této souvislosti je následující tvrzení: *Žáci s lepší známkou z fyziky na posledním vysvědčení mají činnosti spojené s matematikou raději než žáci s horší známkou.*

Jako druhý výzkumný problém byla stanovena otázka: *Souvisí obliba činností spojených s matematikou ve výuce fyziky se záměrem žáků studovat v budoucnosti na vysoké škole matematiku nebo fyziku?*

Hypotézou v této souvislosti je tvrzení: *Žáci, kteří zamýšlí v budoucnosti studovat na vysoké škole matematiku nebo fyziku, se ve fyzice na střední škole chtějí zabývat matematickými činnostmi.*

Metodologie

Z metodologického hlediska byl k řešení výzkumných problémů použit kvantitativní přístup. Pokud jde o design, jedná se v podstatě o výzkum ex-post-facto, kde data byla sbírána metodou dotazníku.

Použitý dotazník byl vytvořen v rámci výše zmíněného projektu *Fyzikální vzdělávání pro všestrannou přípravu a rozvoj lidských zdrojů na úrovni základních a středních škol*. Dotazníkové šetření proběhlo v roce 2007 a dotazníky byly administrovány v tištěné podobě. Samotné řešení výše uvedených výzkumných problémů bylo však již součástí projektu *The relationships between skills, schooling and labor market outcomes: A longitudinal study* (No. P402/12/G130), který je financován Grantovou agenturou České republiky.

Pokud jde o výběr respondentů, záměrem bylo získat středoškolské studenty různého věku, a proto byli vybíráni jak z prvního, tak z třetího ročníku (příp. odpovídajících ročníků víceletých gymnázií). Školy byly osloveny náhodně na základě databáze Ústavu pro informace ve vzdělávání. Celkem byly získány vyplněné dotazníky od 2347 žáků (naprostá většina od 15 do 19 let), z 99 tříd, ze 47 škol – 27 gymnázií, 20 středních odborných škol, zejména průmyslových (podrobněji [5, s. 272] a [6, s. 16]).

V rámci dotazníku se respondenti vyjadřovali mimo jiné (např. jakou měli známku na posledním vysvědčení z fyziky atd.) k tvrzení *Ve škole při fyzice bych rád/a počítal/a příklady (řešil/a početní úlohy)* a *Ve škole při fyzice bych rád/a odvozoval/a vzorečky, nejen se je učil/a nazpaměť.* Tato tvrzení hodnotili pomocí čtyřstupňové Likertovy škály:

1 – velmi souhlasím,
2 – spíše souhlasím,
3 – spíše nesouhlasím,
4 – velmi nesouhlasím.

Při zpracování výsledků byl použit software Statistica. Statistická významnost rozdílů byla zkoumána pomocí dvouvýběrového Kolmogorovova–Smirnovova testu (podrobněji [7, s. 104–107]).

Výsledky

Zájem středoškoláků o počítání příkladů při fyzice

V tab. 2, 3 a 4 je uvedeno hodnocení tvrzení *Ve škole při fyzice bych rád/a počítal/a příklady (řešil/a početní úlohy)* žáků středních škol. Hodnocení žáků je zde porovnáváno podle jejich známky z fyziky na posledním vysvědčení (kterou žáci uvedli).

Středoškoláci obecně

max. neg. difference	max. pos. difference	p-level	mean group 1	mean group 2	std. dev. group 1	std. dev. group 2	valid N group 1	valid N group 2
−0,204	0,00	$p < ,001$	2,639	3,011	0,990	0,855	324	801
−0,111	0,00	$p < ,001$	3,011	3,207	0,855	0,831	801	826
−0,036	0,00	$p > ,10$	3,207	3,268	0,831	0,807	826	287

Tab. 2 Porovnání žáků všech SŠ s různými známkami z fyziky na vysvědčení (řádek 1: žáci s 1 na vysvědčení (group 1) a s 2 na vysvědčení (group 2), řádek 2: žáci s 2 (group 1) a s 3 (group 2), řádek 3: žáci s 3 (group 1) a s 4 (group 2))

Z tab. 2 vyplývá, že mezi žáky s 1 a 2 a také mezi žáky s 2 a 3 na vysvědčení jsou statisticky významné rozdíly, a to takové, že žáci s horší známkou méně souhlasí s tvrzením. Mezi trojkaři a čtyřkaři statisticky významný rozdíl již není. Zatímco jedničkáři hodnotí tvrzení v podstatě neutrálně (2,6 je blízko 2,5), žáci s horšími známkami s tvrzením spíše nesouhlasí (hodnota 3). Porovnání mezi žáky, kteří měli 4 a 5 z fyziky na posledním vysvědčení, nebylo provedeno, protože žáků s 5 bylo málo ($N = 29$).

Gymnazisté

max. neg. difference	max. pos. difference	p-level	mean group 1	mean group 2	std. dev. group 1	std. dev. group 2	valid N group 1	valid N group 2
−0,196	0,00	$p < ,001$	2,675	3,037	1,013	0,851	249	539
−0,168	0,00	$p < ,001$	3,037	3,335	0,851	0,785	539	436
−0,118	0,00	$p > ,10$	3,335	3,506	0,785	0,734	439	85

Tab. 3 Porovnání žáků gymnázií s různými známkami z fyziky na vysvědčení (stejný význam záhlaví jako v tab. 2)

Z tab. 3 plyne, že mezi žáky s 1 a 2 a také mezi žáky s 2 a 3 jsou statisticky významné rozdíly – žáci s horší známkou méně souhlasí s tvrzením. Mezi trojkaři a čtyřkaři statisticky významný rozdíl není. Zatímco jedničkáři hodnotí tvrzení v podstatě neutrálně (2,7 je blízko 2,5), žáci s horšími známkami s tvrzením spíše nesouhlasí (hodnota 3). Porovnání mezi žáky, kteří měli 4 a 5 z fyziky na posledním vysvědčení, opět nebylo provedeno, protože žáků s 5 bylo málo ($N = 5$).

Ostatní středoškoláci

max. neg. difference	max. pos. difference	p-level	mean group 1	mean group 2	std. dev. group 1	std. dev. group 2	valid N group 1	valid N group 2
−0,241	0,00	$p < ,005$	2,520	2,958	0,906	0,863	75	262
−0,060	0,00	$p > ,10$	2,958	3,062	0,863	0,859	262	387
−0,062	0,00	$p > ,10$	3,062	3,168	0,859	0,817	387	202

Tab. 4 Porovnání žáků ostatních středních škol s různými známkami z fyziky na vysvědčení (stejný význam záhlaví jako v tab. 2)

Z tab. 4 je zřejmé, že mezi žáky s 1 a 2 jsou statisticky významné rozdíly, a to takové, že žáci s dvojkou méně souhlasí s tvrzením než žáci s jedničkou. Mezi dvojkaři a trojkaři a dále trojkaři a čtyřkaři statisticky významné rozdíly již nejsou. Zatímco jedničkáři hodnotí tvrzení neutrálně (2,5), žáci s horšími známkami s tvrzením spíše nesouhlasí (hodnota 3). Porovnání mezi žáky, kteří měli 4 a 5 z fyziky na posledním vysvědčení, nebylo provedeno, protože žáků s 5 bylo málo ($N = 24$).

Zájem středoškoláků o odvozování vzorečků při fyzice

V tab. 5, 6 a 7 je uvedeno hodnocení tvrzení *Ve škole při fyzice bych rád/a odvozoval/a vzorečky, nejen se je učil/a nazpaměť* žáků středních škol. Hodnocení žáků je zde porovnáváno podle jejich známky z fyziky na posledním vysvědčení. (Jsme se vědomi toho, že místo „odvozování vzorečků“ by se mělo mluvit o „odvozování veličinových rovnic“ nebo „vztahů mezi veličinami“; slovní formulaci jsme ale v dotazníku přizpůsobili vyjadřování a chápání žáků.)

Středoškoláci obecně

max. neg. difference	max. pos. difference	p-level	mean group 1	mean group 2	std. dev. group 1	std. dev. group 2	valid N group 1	valid N group 2
−0,109	0,00	$p < ,01$	2,230	2,526	0,998	1,017	326	801
−0,171	0,00	$p < ,001$	2,526	2,867	1,017	1,001	801	827
−0,042	0,004	$p > ,10$	2,867	2,913	1,001	0,971	827	288

Tab. 5. Porovnání žáků všech SŠ s různými známkami z fyziky na vysvědčení (stejný význam záhlaví jako v tab. 2)

Z tab. 5 plyne, že mezi žáky s 1 a 2 a také mezi žáky s 2 a 3 na vysvědčení jsou statisticky významné rozdíly a to takové, že žáci s horší známkou méně souhlasí s tvrzením. Mezi trojkaři a čtyřkaři statisticky významný rozdíl není. Zatímco jedničkáři hodnotí tvrzení spíše pozitivně (2,2 je blízko 2, tj. spíše souhlasí), dvojkaři hodnotí neutrálně (2,5) a žáci s horšími známkami s tvrzením spíše nesouhlasí (hodnota 3). Porovnání mezi žáky, kteří měli 4 a 5 z fyziky na posledním vysvědčení, nebylo provedeno, protože žáků s 5 bylo málo ($N = 30$).

Gymnazisté

max. neg. difference	max. pos. difference	p-level	mean group 1	mean group 2	std. dev. group 1	std. dev. group 2	valid N group 1	valid N group 2
−0,133	0,00	$p < ,005$	2,201	2,530	1,024	1,011	249	540
−0,205	0,00	$p < ,001$	2,530	2,948	1,011	0,999	540	440
−0,104	0,00	$p > ,10$	2,948	3,186	0,999	0,927	440	86

Tab. 6 Porovnání žáků gymnázií s různými známkami z fyziky na vysvědčení (stejný význam záhlaví jako v tab. 2)

Z tab. 6 vyplývá, že mezi žáky s 1 a 2 a také mezi žáky s 2 a 3 jsou statisticky významné rozdíly, a to takové, že žáci s horší známkou méně souhlasí s tvrzením. Mezi trojkaři a čtyřkaři statisticky významný rozdíl už není. Zatímco jedničkáři hodnotí tvrzení spíše pozitivně (2,2 je blízko 2, tj. spíše souhlasí), dvojkaři hodnotí neutrálně (2,5) a žáci s horšími známkami s tvrzením spíše nesouhlasí (hodnota 3). Porovnání mezi žáky, kteří měli 4 a 5 z fyziky na posledním vysvědčení, nebylo provedeno, protože žáků s 5 bylo málo ($N = 5$).

Ostatní středoškoláci

max. neg. difference	max. pos. difference	p-level	mean group 1	mean group 2	std. dev. group 1	std. dev. group 2	valid N group 1	valid N group 2
−0,135	0,00	$p >$,10	2,325	2,517	0,910	1,032	77	261
−0,133	0,00	$p <$,01	2,517	2,775	1,032	0,997	261	387
−0,044	0,02	$p >$,10	2,775	2,797	0,997	0,969	387	202

Tab. 7 Porovnání žáků ostatních středních škol s různými známkami z fyziky na vysvědčení (stejný význam záhlaví jako v tab. 2)

Z tab. 7 vyplývá, že pouze mezi žáky s 2 a 3 jsou statisticky významné rozdíly, a to takové, že žáci s trojkou méně souhlasí s tvrzením než žáci s dvojkou. Mezi jedničkáři a dvojkaři a také mezi trojkaři a čtyřkaři statisticky významné rozdíly nejsou. Zatímco jedničkáři a dvojkaři hodnotí spíše neutrálně (kolem 2,5), žáci s horšími známkami s tvrzením spíše nesouhlasí (kolem 3). Porovnání mezi žáky, kteří měli 4 a 5 z fyziky na posledním vysvědčení, nebylo provedeno, protože žáků s 5 bylo málo ($N = 25$).

Souvislost obliby matematiky ve fyzice se studiem matematiky nebo fyziky na VŠ

V následujícím analyzujeme, jestli žáci, kteří zamýšlí v budoucnosti studovat matematiku nebo fyziku na VŠ, se ve fyzice na SŠ chtějí zabývat matematickými činnostmi.

Třetí sloupec tab. 8 ukazuje počty žáků, kteří chtějí studovat matematiku nebo fyziku na VŠ. Z celkového počtu 2 347 (resp. 2 333, kteří se vyjádřili k tvrzení) jich bylo identifikováno 188, tj. přibližně 8 %. Z tab. 8 je patrná tendence, že žáci, kteří více souhlasí s tvrzením *Ve škole při fyzice bych rád/a počítal/a příklady (řešil/a početní úlohy)*, četněji chtějí studovat matematiku nebo fyziku na VŠ (viz porovnání relativních četností ve čtvrtém sloupci). Zatímco mezi žáky, kteří s tvrzením velmi nesouhlasí, jich je jen kolem 2 %, mezi těmi, kteří velmi souhlasí, jich je 25 %. Na druhou stranu ze 188 žáků, kteří chtějí studovat matematiku nebo fyziku na VŠ, jich „pouze“ 110, tj. přibližně 59 % s tvrzením souhlasí (buď velmi nebo spíše) a 41 % nesouhlasí.

S počítáním příkladů (řešením početních úloh)	počet žáků	z toho: počet žáků, kteří chtějí studovat M nebo F	relativní četnost těchto žáků
velmi souhlasím	128	32	25,0 %
spíše souhlasím	469	78	16,6 %
spíše nesouhlasím	870	58	6,7 %
velmi nesouhlasím	866	20	2,3 %
celkem	2 333	188	8,0[5] %

Tab. 8 Souvislost zájmu o počítání příkladů se zájmem o budoucí studium matematiky nebo fyziky na VŠ

Z tab. 9 je patrná tendence, že žáci, kteří více souhlasí s tvrzením *Ve škole při fyzice bych rád/a odvozoval/a vzorečky, nejen se je učil/a nazpaměť*, četněji chtějí studovat matematiku nebo fyziku na VŠ. Zatímco mezi žáky, kteří s tvrzením velmi nesouhlasí, jich je jen kolem 2 %, mezi těmi, kteří velmi souhlasí, jich je 20 %. Dále vidíme, že ze 186 žáků, kteří chtějí studovat matematiku nebo fyziku, jich 142, tj. přibližně 76 % s tvrzením souhlasí (buď velmi nebo spíše).

S odvozováním vzorečků	počet žáků	z toho: počet žáků, kteří chtějí studovat M nebo F	relativní četnost těchto žáků
velmi souhlasím	359	72	20,1 %
spíše souhlasím	704	70	9,9 %
spíše nesouhlasím	657	30	4,6 %
velmi nesouhlasím	619	14	2,3 %
celkem	2 339	186[6]	7,9[7] %

Tab. 9. Souvislost zájmu o odvozování vzorečků se zájmem o budoucí studium matematiky nebo fyziky na VŠ

[5] Relativní četnost je určena z celkového počtu žáků (2347), tj. 188/2347 = 8,0 %.
[6] Počet se liší od údaje v tab. 8, protože někteří žáci se k tomuto tvrzení nevyjádřili.
[7] Relativní četnost je určena z celkového počtu žáků (2347), tj. 186/2347 = 7,9 %.

Shrnutí výsledků

Pokud jde o první výzkumný problém, je možné říci, že obliba činností spojených s matematikou ve výuce fyziky s prospěchem souvisí. Hypotézu, že žáci s lepší známkou z fyziky na posledním vysvědčení mají činnosti spojené s matematikou raději než žáci s horší známkou, nezamítáme. Neplatí to ale ve všech případech; platí to spíše u gymnazistů.

Podrobněji se zjistilo, že obecně u středoškoláků jsou statisticky významné rozdíly v zájmu o počítání příkladů mezi jedničkáři a dvojkaři a také mezi dvojkaři a trojkaři. Mezi trojkaři a čtyřkaři již statisticky významný rozdíl nebyl. Obdobné výsledky byly získány speciálně pro gymnazisty. U ostatních středoškoláků byl identifikován statisticky významný rozdíl jen mezi jedničkáři a dvojkaři.

Obdobné statisticky významné rozdíly byly zjištěny v zájmu o odvozování vzorečků, jen u žáků ostatních středních škol byl nalezen jiný statisticky významný rozdíl, a to mezi dvojkaři a trojkaři.

Dále je možné konstatovat, že zatímco jedničkáři (jak obecně středoškoláci, tak gymnazisté, i jedničkáři z ostatních středních škol) hodnotili zájem o počítání příkladů spíše neutrálně, žáci s horšími známkami spíše nesouhlasili s tvrzením *Ve škole při fyzice bych rád/a počítal/a příklady (řešil/a početní úlohy).* Nejhůře hodnotili toto tvrzení čtyřkaři z gymnázií (mezi „spíše nesouhlasím“ a „velmi nesouhlasím“).

Zájem o odvozování vzorečků byl oproti zájmu o počítání příkladů vyšší (byť se nezkoumala statistická významnost rozdílu). Jedničkáři tento zájem hodnotili mezi „spíše souhlasím“ a neutrálním stanoviskem, trojkaři a čtyřkaři pak „spíše nesouhlasili“ s tvrzením *Ve škole při fyzice bych rád/a odvozoval/a vzorečky, nejen se je učil/a nazpaměť.* Opět nejhůře hodnotili tvrzení čtyřkaři z gymnázií.

Dodejme, že jedničkáři, dvojkaři a trojkaři tvořili ve výběru respondentů asi 86 % ze všech středoškoláků a přibližně 93 % gymnazistů. Jedničkářů a dvojkařů mezi žáky ostatních středních škol bylo asi 35 %, dvojkařů a trojkařů přibližně 68 %. Proto usuzujeme, že výše uvedená tendence platí obecně u středoškoláků, také speciálně u gymnazistů, ale méně u žáků ostatních středních škol.

Co se týká druhého výzkumného problému, zda souvisí obliba činností spojených s matematikou ve výuce fyziky se záměrem žáků studovat v budoucnosti na vysoké škole matematiku nebo fyziku, lze odpovědět kladně. Hypotézu, že žáci, kteří zamýšlí v budoucnosti studovat na vysoké škole matematiku nebo fyziku, se ve fyzice na střední škole chtějí zabývat matematickými činnostmi, nelze zamítnout.

Konkrétně bylo zjištěno, že přibližně 59 % těch, kteří zamýšlí studovat v budoucnosti matematiku nebo fyziku na VŠ, souhlasí (spíše nebo velmi) s tvrzením, že *Ve škole při fyzice bych rád/a počítal/a příklady (řešil/a početní úlohy)* a s tvrzením *Ve škole při fyzice bych rád/a odvozoval/a vzorečky, nejen se je učil/a nazpaměť* souhlasí dokonce 76 % těchto žáků. Zatímco v případě prvního tvrzení jde spíše o mírnou převahu, ve druhém případě je rozdíl výrazný.

Závěrem

Výsledky mohou na první pohled působit jako triviální zjištění: Žáci s lepšími známkami mají matematiku ve fyzice raději a podobně ti, kteří chtějí v budoucnosti studovat matematiku nebo fyziku na VŠ. Můžeme si však všimnout několika momentů.

S oblibou matematiky ve fyzice to není zcela špatné. Jde většinou o neutrální až spíše nesouhlasný postoj, ne postoj zcela odmítavý. Potěšitelné je, že u jedničkářů a výrazně u žáků zamýšlejících studovat matematiku nebo fyziku na VŠ dokonce existuje zájem o odvozování vzorečků (nejen učení se nazpaměť) a u dvojkařů je postoj k němu neutrální, nikoli odmítavý. Mnozí žáci tedy neodmítají provádění poznávacích operací, jako jsou např. analýza, syntéza, dedukce a indukce (podrobněji [8, s. 122–127] a [9, s. 331–332]), naopak je upřednostňují před pouhým učením se nazpaměť.

Dále je možné si všimnout, že procento středoškoláků, kteří deklarovali, že chtějí studovat matematiku nebo fyziku na vysoké škole, není zanedbatelné – kolem 8 %. Při průměrném počtu 30 žáků ve třídě by to statisticky znamenalo dva až tři žáky a těm má jistě smysl se v tomto směru věnovat. Navíc někteří další budou chtít zřejmě studovat také jiné přírodovědné a technické obory a také oni budou v dalším studiu a pak v profesní praxi matematiku a fyziku využívat.

Můžeme se domnívat, že výše uvedená zjištění mají poměrně obecnou platnost, protože byla zjištěna u poměrně rozsáhlého výběru žáků a tento výběr byl reprezentativní z hlediska věku (15 až 19 let), typu školy (gymnázia i střední odborné školy) a geografické polohy (více [6, s. 15–16]).

Pokud by měl být tento článek uzavřen určitou výzvou učitelům fyziky (a často také matematiky) na středních školách, mohla by být následující: Má smysl se v rámci fyziky věnovat také činnostem spojeným s matematikou, protože jsou nedílnou součástí fyziky jako oboru a zároveň existuje nezanedbatelné množství žáků, kteří mají k těmto činnostem kladný nebo alespoň neutrální vztah.

Poděkování. Článek vznikl za podpory projektu *The relationships between skills, schooling and labor market outcomes: A longitudinal study* (No. P402/12/G130), financovaného Grantovou agenturou České republiky.

Literatura

[1] *Kraus, I.*: Fyzika v kulturních dějinách Evropy – od Leonarda ke Goethovi. Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha, 2007.

[2] *Doležalová, J.*: Produkty a efekty edukace. In: Průcha, J. (Ed.): Pedagogická encyklopedie. Portál, Praha, 2009, s. 223–229.

[3] *Hejný, M., Jirotková, D. a kol.*: Úlohy pro rozvoj matematické gramotnosti – utváření kompetencí žáků na základě zjištění šetření PISA 2009, ČŠI, Praha, 2012.

[4] http://www.niqes.cz/Co-je-NIQES.

[5] *Žák, V.*: Důvody, proč se čeští žáci učí fyziku. Pedagogika, roč. 59, č. 3, (2009), s. 269–282.

[6] *Dvořák, L. a kol.*: Lze učit fyziku zajímavěji a lépe? Matfyzpress, Praha, 2008.

[7] *Anděl, J.*: Statistické metody. Matfyzpress, Praha, 2003.

[8] *Svoboda, E., Kolářová, R.*: Didaktika fyziky základní a střední školy – vybrané kapitoly. Karolinum, Praha, 2006.

[9] *Kalhous, Z., Obst, O.*: Školní didaktika. Portál, Praha, 2002.

Astrofyzikální termodynamika ve výuce fyziky na středních školách

VLADIMÍR ŠTEFL

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Termodynamika je fyzikální disciplína zabývající se obecnými vlastnostmi a zákonitostmi makroskopických soustav, zejména procesy spojenými s tepelnou výměnou a transformacemi různých forem energie. Historicky vznikla z praktických potřeb lidstva spojených se zvýšením účinnosti parních strojů v první průmyslové revoluci. Postupně se ukázalo, že má uplatnění mnohem širší. V článku uvedeme využití termodynamiky při studiu hvězd, kosmických těles tvořených souborem částic držených pohromadě gravitační silou. Proto se v tomto případě používá termín tzv. gravitační termodynamika. Závěry z ní vyplývající jsou často velmi paradoxní, podstatně rozšiřují klasické pozemské představy.

Přestože nelze přímo studovat plazma v nitru hvězd, můžeme spolehlivě zkoumat jejich obecné termodynamické vlastnosti a odpovídat na otázky:

- Jak hvězdy pracují a jaká je jejich termodynamika?
- Lze ochlazovat hvězdy hlavní posloupnosti?
- Proč termojaderné hoření v nitru hvězd nepřechází do explozivního?
- Jak rozumět tvrzení o záporné měrné tepelné kapacitě hvězd?
- Platí toto vyjádření pro všechny etapy vývoje hvězd?
- Mohou hvězdy při svém vývoji měnit zápornou měrnou tepelnou kapacitu na kladnou a naopak?
- Je teorie vývoje hvězd v souladu s termodynamikou?

Uvedené otázky vyložíme v souvislosti s interpretací základních vývojových etap hvězd – jejich vzniku, pobytu na hlavní posloupnosti a závěrečných stadií. Budeme přitom vycházet z termodynamických úvah a aplikace jednoduché viriálové věty, která má zásadní význam pro pochopení vlastností hvězd v hydrostatické a tepelné rovnováze.

Vznik hvězd

Fyzikální procesy probíhající při vzniku hvězd lze zapsat prostřednictvím matematických vztahů. Je-li mračno mezihvězdné hmoty (částic prachu a plynu), z kterého hvězdy vznikají, gravitačně vázanou stabilní soustavou, je celková mechanická energie W všech částic tvořících mračno záporná. Gravitační potenciální energie W_{p} v absolutní hodnotě je větší než kinetická energie W_{k} jejich tepelného pohybu. Smršťování vede k zahřívání mračna. Jeho gravitační potenciální energie se stává ještě více zápornou, narůstající kinetická energie pohybu částic je kladná.

Zmenšování vzdáleností mezi interagujícími částicemi je doprovázeno poklesem jejich gravitační potenciální energie. V mračnu při jeho pomalém tzv. kvazistacionárním gravitačním smršťování se uvolňuje energie a dochází k zahřívání zejména centrálních částí protohvězd, které se mění na hvězdy. V této vývojové etapě jsou hvězdy typu T Tauri. V nitru protohvězd je taková centrální teplota, že vodík a helium již jsou ionizovány.

Není však dostatečná k realizaci průběhu termonukleárních reakcí. Pro změnu celkové energie $W = W_\mathrm{k} + W_\mathrm{p}$ platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = L_\mathrm{tjad} - L,$$

kde L je zářivý výkon obecně hvězd, v tomto případě protohvězd. U nich je zářivý výkon termojaderných reakcí nulový, $L_\mathrm{tjad} = 0$. Jestliže celková energie poklesává – protohvězda vyzařuje, musí při gravitačním smršťování narůstat kinetická energie částic a tomu odpovídajícím způsobem i centrální teplota. Zmiňované úvahy lze podpořit vztahem pro centrální teplotu $T_\mathrm{c} \sim \frac{M}{R}$, která při zmenšování poloměru a neměnné hmotnosti narůstá.

Viriálová věta

Velmi přibližně, při zanedbání excitační a ionizační energie vzhledem ke kinetické energii souboru částic, můžeme konstatovat za kvazistacionárního průběhu smršťování protohvězdy splnění podmínek pro platnost tzv. jednoduchého tvaru viriálové věty. Tu původně odvodil *Clausius* roku 1870 v [1] ve tvaru

$$\frac{1}{2}\left\langle \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} \right\rangle = 2\langle W_\mathrm{k}\rangle + \langle W_\mathrm{p}\rangle.$$

Člen na levé straně rovnice vyjadřuje druhou derivaci časové změny momentu setrvačnosti I soustavy částic vzhledem ke zvolenému počátku. V případě periodického pohybu částic v omezené oblasti prostoru a naplnění výše uvedených podmínek pro vývoj soustavy, lze člen na levé straně zanedbávat, viriálová věta získá tvar

$$\langle W_\mathrm{k}\rangle = -\frac{1}{2}\langle W_\mathrm{p}\rangle.$$

Používáme střední hodnoty energií souboru částic za dlouhé časové intervaly.

Naznačíme závěr postupu odvození viriálové věty, vycházejícího z úvah statistické termodynamiky, podrobně je rozveden například v [2]. Vyjdeme ze vztahu pro viriálovou větu ve tvaru

$$3(\gamma - 1)\langle W_\mathrm{k}\rangle + \langle W_\mathrm{p}\rangle = 0,$$

předpokládáme statický stav, bez tlaku na povrch soustavy a její rotace. Vlastnosti hvězdné látky – plazmatu, téměř úplně ionizovaného, popisujeme jednoatomovým ideálním plynem, pro který $\gamma = \frac{5}{3}$. Za předpokladu gravitační interakce mezi částicemi a dosazením uvedené hodnoty γ obdržíme pro viriálovou větu již dříve uvedený tvar

$$\langle W_\mathrm{k}\rangle = -\frac{1}{2}\langle W_\mathrm{p}\rangle, \quad \text{resp.} \quad 2\langle W_\mathrm{k}\rangle + \langle W_\mathrm{p}\rangle = 0.$$

Dosazením do vztahu pro celkovou energii obdržíme

$$\langle W\rangle = \langle W_\mathrm{k}\rangle + \langle W_\mathrm{p}\rangle = \frac{1}{2}\langle W_\mathrm{p}\rangle = -\langle W_\mathrm{k}\rangle.$$

Slovně vyjádřeno střední hodnota celkové energie gravitačně vázaných soustav – hvězd, je rovna polovině střední hodnoty gravitační potenciální energie respektive záporně vzaté střední hodnotě kinetické energie všech částic tvořících hvězdy, jak je rozebíráno u nás v [3].

V dosavadním výkladu smršťujícího se mračna jsme nebrali v úvahu rotaci respektive turbulentní pohyby plynu nebo přítomnost magnetických polí. Uvedené jevy zahrnujeme do zobecněného znění viriálové věty, které formulovali *Chandrasekhar* a *Fermi* v [4].

Hvězdy hlavní posloupnosti

Gravitační smršťování při vzniku hvězd je později zastaveno narůstajícími silami tlaku plynu, protohvězdy se mění na hvězdy. Jakmile centrální teplota dosáhne řádově $5\cdot 10^6$ K, dojde v jejich nitru k zapálení prvních termonukleárních reakcí, hvězdy přicházejí na hlavní posloupnost. Ustanoví se v nich rovnovážný stav, charakterizovaný platností rovnice hydrostatické a tepelné rovnováhy. Střední hodnoty kinetické energie neuspořádaného tepelného pohybu částic a potenciální energie jejich vzájemné gravitační přitažlivosti získávají ustálené hodnoty. Jsou tak splňovány beze zbytku podmínky pro platnost viriálové věty.

Největší počet hvězd ve vesmíru se vyznačuje hmotností menší než $2M_\odot$. Nacházejí se na dolní polovině hlavní posloupnosti, příkladem je naše Slunce $\odot$. Jaká je stavební struktura takových hvězd? Termojaderné reakce probíhají pouze v centrální části – v jádře, kde je teplota dostatečná k jejich uskutečnění. Jádro je energeticky aktivní, je obklopeno slupkou – vrstvou plnící úlohu tepelného izolátoru. Přenos tepla řízený teplotním gradientem zde probíhá zářením. Jádro i obal jsou důležité pro tepelnou stabilitu a termodynamické vlastnosti hvězd.

Zamysleme se proto nad problematikou hvězd z termodynamického pohledu. Hlavním zdrojem energie hvězd hlavní posloupnosti jsou termonukleární reakce přeměny vodíku na helium. Uvolňuje se v nich mimo jiných teplo, jehož část může být využita na práci (zvětšení objemu) a dále na nárůst kinetické energie tepelného pohybu částic hvězd. Zvětšuje se celková energie hvězd.

Připomínáme, že hvězdy reprezentují termodynamické soustavy, které vedle teploty mají ještě další stupeň volnosti – objem. Při dodání tepla objem narůstá, získaná energie uskutečnila práci proti gravitačním silám, transformovala se do energie gravitačního pole. Velikost takto uložené energie je podle viriálové věty dvojnásobkem původně dodané ve formě tepla. Proto kinetická energie tepelného pohybu částic neroste, nýbrž klesá, střední teplota se zmenšuje, hvězda se ochlazuje.

Hvězdy hlavní posloupnosti jsou ve stavu tepelné rovnováhy, jejich zářivý výkon zůstává konstantní. Energie produkovaná v jádrech hvězd je rovna vyzařované z povrchu, platí $L_{\mathrm{tjad}} = L$.

Projeví se u hvězd porušení tepelné rovnováhy? Provedeme myšlenkové úvahy, k analýze využijeme vztah pro změnu celkové energie

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = L_{\mathrm{tjad}} - L.$$

Jestliže se ve hvězdách zvýší produkce energie termonukleárními reakcemi, zářivý výkon $L_{\mathrm{tjad}} > L$, tj. $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} > 0$, hvězdy začnou zvětšovat svůj objem, kinetická energie částic plazmatu se bude snižovat, jakož i teplota v nitru. Následně poklesne tempo termonukleárních reakcí, neboť je velmi silně závislé na teplotě. Hvězdy se vrátí do rovnovážného stavu.

Naopak, pokud se ve hvězdách sníží produkce energie $L_{\mathrm{tjad}} < L$, tj. $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} < 0$, kinetická energie plazmatu bude narůstat, objem hvězd se zmenší a budou se smršťovat. Teplota nitra se zvýší, tudíž i tempo termojaderných reakcí.

V souvislosti s provedenými úvahami si položme hypotetickou otázku, zda lze hvězdy hlavní posloupnosti ochlazovat odebráním energie. Podle viriálové věty by to vedlo k jejich smršťování a uvolňování gravitační potenciální energie tempem, které by nejenom doplňovalo ztrátu energie vyzařované z povrchu, ale ještě i zahřívalo nitro hvězd. Celková energie hvězd by při tomto procesu poklesávala.

Jak se chová termodynamická veličina entropie při změnách objemu? Smršťování hvězd vede k poklesu entropie. Nejde o porušení II. věty termodynamické, podle které entropie uzavřených soustav musí být vždy stejná při vratných procesech nebo narůstající při nevratných. Hvězdy jsou otevřenými termodynamickými soustavami, entropie je z nich vynášena fotony a neutriny – klesá, zatímco v okolním vesmíru narůstá.

Důsledkem platnosti viriálové věty je záporná měrná tepelná kapacita hvězd jako celku. Nezávisí na chemickém složení hvězd a nedovoluje, jak jsme vyložili, rozvoj termojaderné exploze v jejich nitru. Zdůrazňujeme, že nejde o zápornou měrnou tepelnou kapacitu vlastního ionizovaného plazmatu hvězd.

Analyzujme okolnosti porušení hydrostatické rovnováhy, kterou zapisujeme ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -G\varrho\frac{M_r}{r^2}.$$

Vyjadřuje skutečnost, že výslednice gravitačních a ostatních sil působících na objemový element uvnitř hvězd je nulová. Smršťováním uvolňovaná gravitační potenciální energie je transformována nejen na zvětšení kinetické energie tepelného pohybu částic, ale rovněž na energii vyzařování $\langle W_\mathrm{z}\rangle$ podle zákona zachování energie

$$\langle W_\mathrm{k}\rangle + \langle W_\mathrm{p}\rangle + \langle W_\mathrm{z}\rangle = 0,$$

po úpravě $-\langle W_\mathrm{p}\rangle = \langle W_\mathrm{k}\rangle + \langle W_\mathrm{z}\rangle$. Dosazením vztahu z viriálové věty obdržíme

$$-\frac{1}{2}\langle W_\mathrm{p}\rangle = \langle W_\mathrm{z}\rangle, \quad \text{resp.} \quad \langle W_\mathrm{k}\rangle = -\frac{1}{2}\langle W_\mathrm{p}\rangle + \langle W_\mathrm{z}\rangle.$$

Tedy polovina gravitační potenciální energie uvolňované při smršťování jde na vyzařování hvězd, druhá polovina na zvýšení kinetické energie tepelného pohybu částic hvězd, viz například text v [5]. Obecně důsledkem gravitačního smršťování v některých etapách vývoje hvězd může být případně i změna jejich stavební struktury v čase.

Shrnuto: hvězdy hlavní posloupnosti ve stavu tepelné a hydrostatické rovnováhy představují přírodní termostat. Záporná měrná tepelná kapacita hvězd udržuje jejich stabilitu vůči tepelným poruchám. Důsledkem je stálost termonukleárních reakcí, hoření tak nemůže vést k explozivnímu průběhu. Hvězdy udržují přibližně konstantní zářivý výkon.

Červení obři

Z obecnějšího pohledu, bez větších podrobností, popíšeme přechod hvězd z hlavní posloupnosti do stádia červených obrů. Proces přeměny začíná zvýšeným uvolňováním energie v jádrech hvězd. Vnější vrstvy expandujících hvězd v důsledku nárůstu opacity, existence tzv. opacitní zdi, zadržují zářivou energii. Gravitační potenciální energie vnějších vrstev se zvyšuje při jejich postupném vzdalování od středu hvězd. Při expanzi se mírně na povrchu ochlazují, vznikají červení obři s poloměry řádově desítek případně až stovek poloměrů Slunce. Fyzikálně zjednodušeně lze vyložit expanzi vnějších vrstev hvězd jako důsledek závislosti gravitační potenciálu

$$\varphi \sim -\frac{1}{r}.$$

Plazma se chová jako pružina, jejíž konstanta tuhosti se stává slabší při rostoucím poloměru hvězd, usnadňujícím expanzi, podrobněji viz [6].

Naopak smršťování jádra v závěru pobytu hvězd na hlavní posloupnosti je doprovázeno poklesem jeho gravitační potenciální energie. Na konci hoření vodíku se smršťuje v čase kratším, než činí pomalá fáze kontrakce tzv. Kelvinova–Helmholtzova časová škála

$$t_{\mathrm{KH}} \approx 2 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \frac{R_\odot}{R}$$

v rocích. Při splnění této podmínky platí u hvězd viriálová věta, použijeme ji společně se zákonem zachování energie. V rovnicích vyjádřeno platí

$$2\langle W_\mathrm{k}\rangle + \langle W_\mathrm{p}\rangle = \mathrm{konst.}_1 \quad \text{a} \quad \langle W_\mathrm{k}\rangle + \langle W_\mathrm{p}\rangle = \mathrm{konst.}_2.$$

Musí tak zůstávat konstantní obě energie individuálně, jak kinetická, tak i gravitační potenciální energie. Právě neměnnost velikosti posledně jmenované vede ke smršťování jader a expanzi obálek hvězd, tedy ke změně jejich stavební struktury.

Didaktické aspekty astrofyzikálního výkladu funkce termodynamického termostatu, hvězd hlavní posloupnosti, jakož i přechodu hvězd z hlavní posloupnosti do stádia červených obrů jsou diskutovány v článcích [6], [7].

U hvězd s hmotností menší než $2M_\odot$ se na konci pobytu na hlavní posloupnosti při hoření v jádrech spotřeboval téměř veškerý vodík, vyhasl zdroj energie. Jádra složená z helia se smršťují a vzniká degenerovaný elektronový plyn, jehož vlastnosti nezávisí na teplotě. Nemá již zápornou měrnou tepelnou kapacitu. Proto termonukleární reakce, například zapálení helia v degenerovaném jádru, se vyznačují explozivním charakterem, reakce 3α v červených obrech probíhá vysokým tempem. Jde o nárůst zářivého výkonu heliového jádra až na $10^{10} L_{\odot}$ během několika minut. Na povrchu hvězd se však heliový záblesk neprojeví. Exploze zvýší teplotu jádra, zejména však zvětší jeho objem, neboť poloměr naroste přibližně třikrát. Následný řádový pokles hustoty odstraní degeneraci, hvězdná látka v jádře hvězd se přemění na plazma, popsatelné jako ideální plyn. Heliový záblesk sníží stupeň degenerace jádra. Tudíž v něm znovu započne spalování helia na uhlík a kyslík. Hvězdy jako celek se opět začnou vyznačovat zápornou měrnou tepelnou kapacitou. Později se uprostřed hvězd při nárůstu hustoty opět vytvoří elektronově degenerované jádro, nyní již z uhlíku, dusíku, kyslíku případně neonu. Měrná tepelná kapacita hvězd se tak stane kladnou, což umožňuje v závěrečných fázích vývoje například bílých trpaslíků jejich chladnutí.

Po vyčerpání termonukleárních zdrojů energie se hvězdy začnou pozvolna smršťovat, bude se zmenšovat jejich celkové energie W současně s gravitační potenciální energií W_{p}, naopak se bude zvětšovat kinetická energie W_{k}. Jak jsme již rozebírali, polovina z uvolněné energie při smršťování bude hvězdami vyzářena, druhá polovina půjde na nárůst W_{k}. Při smršťování se hvězdy zahřívají a vyzařují energii. Paradoxní závěr vyplývá ze vztahu

$$L = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t}.$$

Záporná měrná tepelná kapacita v pozemských laboratořích

I v pozemských laboratořích lze připravit látky se zápornou měrnou tepelnou kapacitou. Krystaly atomových klasterů, například 147 atomů sodíku, se za určitých podmínek vyznačují touto vlastností. Konkrétně při přechodu uvedené soustavy fázovou přeměnou – při zkapalnění látky. Roztavení krystalů probíhá po dosažení kritické hodnoty, atomová vazba již neudrží atomy v pevné struktuře, vazby se narušují. Přitom teplo, získávané klastery, nejde pouze na úkor kinetické pohybové energie atomů (charakterizujících teplotu), nýbrž na destrukci vazeb, tedy na zvětšení potenciální části energie. Popsané experimenty v [8] prováděné s klastery atomů sodíku prokázaly, že při dodání energie 1 eV se jejich teplota zmenšila přibližně o 10 K. Shrnuto při dodání tepla teplota popsané látky klesá, tudíž se vyznačuje zápornou měrnou tepelnou kapacitu.

Závěr

V článku jsme ukázali možnosti uplatnění poznatků z astrofyzikální gravitační termodynamiky do obsahu výuky fyziky na středních školách. Prostřednictvím myšlenkových úvah spojených s aplikací viriálové věty jsme vyložili termodynamické vlastnosti hvězd hlavní posloupnosti s hmotností menší než $2M_\odot$. Při objasňování důsledků tepelné rovnováhy hvězd má zásadní roli záporná měrná tepelná kapacita.

Viriálová věta v jednoduchém tvaru použitém v článku umožňuje na středoškolské úrovni kvalitativně předvídat fyzikální chování hvězd a usnadnit tak žákům porozumění této problematiky. V astrofyzikálních interpretacích již byla viriálová věta zařazována do středoškolské fyzikální výuky, u nás v učebnici [9], v Polsku byly možnosti diskutovány v článku [10], v Rusku [11]. Termodynamika hvězd je vyložena ve vysokoškolských učebnicích u nás v [12], v zahraničí [13], [14], komplexně hlouběji v [2].

Literatura

[1] *Clausius, R.*: Ueber einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. Annalen der Physik **217**, č. 9, (1870), s. 124–130.

[2] *Collins, G. W.*: The Virial Theorem in Stellar Astrophysics. http://ads.harvard.edu/books/1978vtsa.book

[3] *Štefl, V.*: Viriálová věta v astrofyzice. PMFA **25** (1980), s. 348–352.

[4] *Chandrasekhar, S., Fermi, E.*: Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field. ApJ **118** (1953), s. 116–141.

[5] *Prialnik, D.*: An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[6] *Hauptmann, H., Hermann, F., Schmidt, K.*: The transformation of a main sequence star into a red-giants star in the core and shell model. Am. J. Phys. **68** (2000), s. 421–423.

[7] *Hermann, F., Hauptmann, H.*: Understanding the stability of stars by means of thought experiments with a model star. Am. J. Phys. **65** (1997), s. 292–295.

[8] *Schmidt, M., a.j.*: Negative Heat Capacity for a Cluster of 147 Sodium Atoms. Phys. Rev. Lett. **86** (2001), s. 1191–1194.

[9] *Šolc, M., Švestka, J., Vanýsek, V.*: Fyzika hvězd a vesmíru. SPN, Praha, 1983.

[10] *Domański, J.*: Twierdzenie o wiriale w nauczaniu astronomii. Fizyka w Sokole **24** č. 3, (1978), s. 127–131.

[11] *Ivanov, A. I., Kazanceva, L. P.*: Teorema viriala v prepodavanii fiziki i astronomii. http://vestnik.yspu.org/releases/uchenue_praktikam/12_2/.

[12] *Kvasnica, J.*: Termodynamika. SNTL, Praha, 1965.

[13] *Chandrasekhar, S.*: Stellar Structure. University of Chicago Press, Chicago, 1938.

[14] *Schwarzschild, M.*: Structure and evolution of the stars. Princeton University Press, Princeton, 1958.

Jak souvisí CO_2 s teplotou na Zemi

LIBUŠE ŠVECOVÁ – ERIKA MECHLOVÁ

Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita, Ostrava

Předkládaný článek je zaměřen na environmentální fyziku – obor fyziky, „jehož cílem je poukázat na význam fyzikálních faktorů pro existenci člověka a živých organismů v životním prostředí“ [5; 7]. Svým obsahem rovněž podporuje koncepci „trvale udržitelného rozvoje“ [5; 7].

Článek je věnovaný nevratným procesům a je zaměřen na energetickou bilanci Země. Řeší jednoduchou formou globální problém lidstva, tj. *jak souvisí množství oxidu uhličitého* CO_2 *s teplotou na Zemi.* Upozorňuje na realitu současné doby a to, že i klimatické změny jsou příkladem nevratných procesů.

Fyzikální pojem nevratný proces (tj. termín a jeho obsah) nebývá většinou uváděn ve spojení s energetickou bilancí Země – zde je objasňován na příkladu z praxe – zvyšujícím se množství oxidu uhličitého v atmosféře Země a s tím související změnou teplot na Zemi.

Prekoncepty žáků v závislosti na etapě vzdělávání

Od 1. září 2005 začal platit Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání s přílohou upravující vzdělávání žáků s lehkým mentálním postižením (dále jen RVP ZV), jehož součástí bylo i zavedení environmentální výchovy do výuky základních škol.

Environmentální výchova mimo jiné učí jedince pozorovat, citlivě vnímat a hodnotit [8; 122] děje, které probíhají v přírodě a jsou důsledkem lidské činnosti. Všechny tyto děje jsou nevratné. Proto od roku 2006 až do roku 2013 proběhly výzkumy mapující názory žáků během základního, středního a na začátku terciárního vzdělávání na nevratné děje. Na základě výsledků výzkumů jsou uvedeny důvody k zavedení pojmů vratný a nevratný děj do výuky fyziky na ZŠ:

1. Výzkum, který proběhl na jaře 2006 u 69 žáků 8. a 9. ročníku ZŠ a 100 žáků 2. ročníku SŠ ukázal, že 100 % dotázaných žáků považuje kruhový a vratný děj za totožný [4].

2. Výzkum, který proběhl na jaře 2013 u 35 studentů 1. ročníku VŠ a na konci podzimu 2013 u 75 studentů 1. ročníku VŠ, tento výsledek potvrdil. Dalším závažným zjištěním bylo, že na jaře 43 % a na podzim 51 % dotázaných VŠ studentů považovalo klimatické změny, které pozorujeme na Zemi, za vratný děj.

Z obou výzkumů vyplynulo, že žáci ZŠ, SŠ i studenti VŠ považují vratný děj za kruhový děj, tzn. že prekoncepty žáků o vratném ději nezávisí na etapě vzdělávání, což může vést k nesprávnému pochopení změn, které probíhají na Zemi.

Témata s nevratnými procesy je vhodné zařadit do výuky fyziky ZŠ po probrání Tepelných jevů [3]. Cílem je zavedení pojmu nevratný děj do výuky fyziky ZŠ. Ve školské fyzice je stále používán termín *děj*, i když v odborné fyzice převažuje jeho synonymum *proces* i vzhledem k jeho anglickému ekvivalentu *process* [6].

Problematika nevratných procesů není v učivu základní školy zavedena, i když většina reálných pokusů, uvedených v učebnicích ZŠ, jsou procesy nevratné. Vyučujícím jsou k dané problematice nabídnuty dva scénáře vyučovacích hodin. Návrhy vyučovacích hodin fyziky vycházejí z učebního textu pro žáky ZŠ a nižších ročníků víceletých gymnázií *Nevratné děje pro žáky základních škol*, který byl ověřen na třech školách během pedagogického experimentu [4], kterého se zúčastnilo 136 žáků ZŠ. Na základě výsledků dotazníkových šetření a pedagogického experimentu byly scénáře přepracovány a doplněny o nejnovější poznatky.

Navržené scénáře vyučovacích hodin jsou zaměřeny na rozvoj kritického myšlení žáků formou včlenění problémových úloh z každodenní praxe. Při řešení badatelských úloh žáky je kladen důraz na práci a diskusi ve dvojicích, případně v malých čtyřech až pětičlenných skupinách. Během diskuse žáci rozvíjejí schopnost obhájit svůj názor, jsou podporovány sociální vztahy ve skupině. V diskusi žáci především dospívají k přesvědčení, že životní prostředí ovlivňuje každý z nás.

K doplnění tepelných jevů o problematiku globálního oteplování Země vedou tyto tři důvody.

1. V současné době stále naléhavěji vědci upozorňují na změny, které probíhají na Zemi, a na jejich dopady na lidskou populaci. Je vhodné, aby již žáci základní školy pochopili, že většina změn, které probíhají na Zemi, jsou nevratné a aby byli cílevědomě vedeni k možným řešením vznikajících situací. Potom lze očekávat, že sami budou hledat nová řešení, která povedou ke zmírnění dopadu celé situace na lidskou populaci a živé organismy.

2. Žáci základní školy by si měli uvědomit, že jejich dnešní jednání ovlivní jejich budoucí život. Záleží na každém z nich, jak se k danému problému postaví.

3. Zároveň je nutné žáky seznámit, že kroky, které by v budoucnu mohli učinit, nesmí být v rozporu s rezolucemi OSN, i když si o nich budou myslet, že budou mít pozitivní vliv na planetu. Vždy je nutné pečlivě zvážit i možné negativní dopady.

Scénář vyučovací hodiny: Jak souvisí CO_2 s teplotou na Zemi?

Cíl hodiny: Žák bude umět vysvětlit vliv množství oxidu uhličitého v atmosféře na teplotu na Zemi.

Metody výuky: Metoda problémového výkladu.

Organizační formy vyučování podle vztahu k osobnosti žáka: hromadné vyučování.

Organizační formy vyučování podle charakteru výukového prostředí: výuka ve třídě, práce ve dvojicích nebo v malých skupinách.

Výklad

Otázka: Uveďte příklad nevratného děje.

Možné odpovědi žáků: Stárnutí. Chladnutí čaje atd.

Otázka: Zamyslete se, co podle vás ovlivňuje teplotu na Zemi? Poraďte se ve skupinách.

Možné odpovědi: Skleníkové plyny. Skleníkový jev. Auta. Spalovaní uhlí.

Dalším příkladem nevratných dějů je měnící se teplota na Zemi.

Otázka: Zamyslete se a zkuste vysvětlit, proč klimatické změny na Zemi považujeme za nevratný děj? Možná nastane znovu doba ledová? Poraďte se ve skupinách.

Otázka: Jakou máte představu o vratném ději?

Možné odpovědi: Něco se opakuje, např. střídání ročních období.

Učitel: Máte pravdu, že vratný děj se může opakovat. Ještě platí další podmínka.

Vratný děj je děj, který může probíhat v obou směrech a okolí i soustava, se vždy vrátí do původního stavu [6, 243]. Podstatné je, že *na okolí nenastanou trvalé změny a okolí se také vrátí do původního stavu.* V případě, že nyní nastane pouze prudké ochlazení a teplota se sníží na teplotu, která byla během doby ledové, sníží se sice teplota na Zemi, ale nedojde ke snížení skleníkových plynů v atmosféře, nebo k obnově zničených korálů v mořích a oceánech. Proto považujeme klimatické změny za nevratný děj.

Žáci: Co je vratný děj?

Učitel: Příklad vratného děje je houpající se hračka na pružině, v případě, že zanedbáme odpor vzduchu a pružina stále kmitá ve stejných pozicích. V určitém období vývoje Země se kolem ní postupně vytvářela atmosféra.

Otázka: Jak se měnilo složení atmosféry na Zemi?

Odpověď: V průběhu vývoje Země se měnilo složení atmosféry na Zemi a ovlivňovalo podmínky života na Zemi. Před 3 miliardami let byly pravděpodobně na naší planetě teplé oceány, v atmosféře byly prachové částice, oxid uhličitý CO_2 z vulkanické činnosti sopek, metan a amoniak, atd. Z této doby pravděpodobně pochází nejstarší fosílie, stromatolity. Stromatolity jsou horninové shluky mikroorganismů, které jsou přibližně 0,5 m až 1 m vysoké a asi 1 m široké, kulovitého tvaru. Dnes je můžeme najít ve Žraločí zátoce v Severozápadní Austrálii. Stromatolity se nacházejí v mělkých vodách, tzn., že jsou schopny přijímat energii slunečního záření. Protože v prvotní atmosféře byl dostatek oxidu uhličitého CO_2 a zároveň stromatolity byly schopny zachytit energii slunečního záření, předpokládá se, že začaly využívat oxid uhličitý CO_2 a energii slunečního záření k výrobě glukózy a jako vedlejší produkt začaly produkovat kyslík O_2. Tomuto ději se říká fotosyntéza. Nejprve se kyslík O_2 začal uvolňovat do vody, postupně se začal vypařovat i do atmosféry nad hladinu oceánů. Po určité době se vytvořil ozón O_3. Ozón začal chránit naši planetu před slunečním zářením (UV zářením). Tímto způsobem byl pravděpodobně zpracován oxid uhličitý CO_2 do takové míry, že umožnil příznivý vývoj života na pevnině.

Odpověď: Našim úkolem bude vysvětlit, proč změna zemské atmosféry ovlivňuje změnu teploty na Zemi.

Všichni víte, že Země přijímá ze Slunce energii. Tento přenos energie se děje formou slunečního záření. Prvotní zemská atmosféra neměla dostatek ozónu O_3. Sluneční záření, které ze Slunce dopadalo na Zemi, částečně bylo Zemí pohlceno a část se od Země odrazila. V počátcích vývoje Země byla energie záření ze Slunce dopadající na Zemi a energie záření odražená od Země v rovnováze.

Každá látka může za určitých podmínek vyzařovat energii a stejnou energii opět přijímat.

Země sama v současné době trvale vyzařuje energii, kterou mohou v silné vrstvě její atmosféry přijímat některé plynné molekuly. Jsou to právě ty, které mohou stejnou energii vyzařovat. Jedná se o tři a víceatomové plynné molekuly, např. vodní pára H_2O, oxid uhličitý CO_2, oxid dusíku N_2O, ozón, metan. Energie, kterou přijmou tyto molekuly zemské atmosféry, nemůže již být vyzářena do meziplanetárního prostoru (pozn. pro učitele: Je to způsobeno jejich chemickými a fyzikálními vlastnostmi). Tato energie zůstane na Zemi a povrch Země se otepluje.

Vysvětlíme situaci na jednoduchém příkladu vodních par H_2O v atmosféře Země. Země vyzařuje energii do meziplanetárního prostoru ve dne i v noci. V noci, kdy na určitý povrch Země nedopadá energie slunečního záření, Země stále vyzařuje svou energii do meziplanetárního prostoru. Je-li bezmračná noc, tj. v atmosféře nejsou tříatomové molekuly vodních par, je v noci velmi chladno. Tento jev je pozorovatelný zejména v zimních měsících. Je-li obloha zatažena mraky, ve kterých jsou tříatomové molekuly vodní páry, potom je noc poměrně teplá, protože energie vyzářena povrchem Země se nemůže dále šířit do meziplanetárního prostoru, tato energie je zachycena tříatomovými molekulami vodní páry v oblacích, zůstává tedy na Zemi. A stejně je tomu u dalších tří a víceatomových molekul plynů, které jsou v zemské atmosféře, tedy i s oxidem uhličitým. Jediný rozdíl je v tom, že molekuly tříatomové vodní páry jsou „viditelné“ ve formě mraků, molekuly oxidu uhličitého viditelné nejsou.

Takto, jak se postupně v atmosféře zvyšuje množství tří a víceatomových plynů, které narušují rovnovážný stav mezi energií slunečního záření přijatou Zemí a energii vyzářenou Zemí do meziplanetárního prostoru, dostává se Země do dalšího rovnovážného stavu s energií poněkud vyšší, což se projeví zvýšením teploty na Zemi.

Nyní vás napadlo, když se tak dlouho zvyšuje teplota na Zemi, proč se ekologové tolik bouří, vždyť je to normální proces?

Například oxid uhličitý CO_2 v přírodě existuje od pradávna. Na jedné straně je dobře, že v atmosféře oxid uhličitý je, protože umožnil vznik příznivých podmínek pro život na Zemi, jak bylo uvedeno u stromatolitů. Na druhé straně jeho současné zvýšené množství v atmosféře zabraňuje Zemi vyzařovat svou energii do meziplanetárního prostoru, tím zvyšuje Země svou celkovou energii, což se projevuje zvýšením teploty na Zemi.

Otázky pro žáky: Jak se nazývá děj, při kterém se mění oxid uhličitý CO_2 na kyslík O_2? Kde tento proces probíhá? Poraďte se ve dvojicích.

Odpověď: Děj se nazývá fotosyntéza a probíhá v rostlinách. Dále víme, že oceán je schopen absorbovat oxid uhličitý CO_2. Vlivem působení lidské činnosti se množství oxidu uhličitého tak zvýšilo, že ho příroda už sama nedokáže zpracovat.

V současné době nejvíc vypouští oxid uhličitý CO_2 do atmosféry člověk. Oxid uhličitý se do atmosféry uvolňuje při spalování takových látek, které obsahují uhlík, například dřeva, uhlí, oleje, plynu, suchých rostlin apod. Oxid uhličitý je výsledkem hoření, při němž se uhlík slučuje s kyslíkem.

Nyní obdržíte list s úkoly a pokuste se na ně společně v tříčlenných maximálně čtyřčlenných skupinách odpovědět.

Úkoly k zamyšlení: Malé skupiny žáků obdrží od učitele list s úkoly.

1. Navrhněte, jak lidé mohou snížit množství oxidu uhličitého CO_2 a dalších tříatomových a víceatomových molekul plynů (skleníkových plynů) v atmosféře? Poraďte se ve skupinách.
2. Tří a víceatomové molekuly plynů v atmosféře jsou nazývány „skleníkovými plyny“. Co myslíte, je tento název správný vzhledem k tomu, co jste se o vyzařování Země dověděli?
3. Celý jev je v literatuře nazýván „skleníkovým jevem“ nebo „skleníkovým efektem“. Porovnejte princip funkce skleníku na pěstování rostlin a jevu, který způsobuje zvyšování teploty na Země.
4. Navrhněte, jak vy sami můžete omezit nebo snížit množství CO_2 v atmosféře Země?
5. Navrhněte, jak vaši rodiče mohou omezit nebo snížit množství CO_2 v atmosféře?
6. Navrhněte, jak zastupitelé obcí a měst mohou omezit nebo snížit množství CO_2 v atmosféře?
7. Navrhněte, jak představitelé státu (parlament, senát, vláda, prezident) mohou omezit nebo snížit množství CO_2 v atmosféře?
8. Zamyslete se, jestli se bude nadále zvyšovat průměrná teplota na Zemi, zda ovlivní tato situace život lidí a živých organismů. Svou odpověď zdůvodněte.

Po práci ve skupinách učitel promítne úkoly na tabuli. Potom podle pořadí těchto úkolů jednotlivé skupiny sdělují svůj názor, ke kterému dospěly na základě diskuse. Učitel žáky nepřerušuje. Nakonec vždy shrne a u mnoha úkolů zdůrazní, že záleží na každém jedinci, a na dané úkoly *neexistuje nesprávná* odpověď.

Shrnutí

V hodině jste se seznámili, jak oxid uhličitý CO_2 ovlivňuje teplotu na Zemi. Uvědomili jste si, že oxid uhličitý pozitivně ovlivnil vývoj atmosféry v počátečních fázích vývoje Země. Dnes zvýšení množství oxidu uhličitého, které člověk vypouští do atmosféry, již příroda sama nedokáže zpracovat. Hledali jste možná řešení, jak vy sami můžete omezit jeho nadměrné vytváření. Zároveň jste se zamysleli, jak v dospělosti můžete snížit jeho nadměrné vypouštění do atmosféry.

Článek je rozšířením fyziky základní školy o pojem nevratný proces z oblasti environmentální fyziky. Článek byl rozdělen do dvou hlavních částí. V první části zdůvodňuje, proč je důležité zařadit téma nevratný proces do výuky fyziky na základní škole. Druhá část článku obsahuje scénář vyučovací hodiny fyziky, kde je kladen důraz na aktivity žáků v oblasti řešení problémových úloh. Uvedený metodický postup ve vyučovací hodině se setkal s ohlasem učitelů zejména z toho hlediska, že skleníkový efekt je jednoduše objasněn na úrovni myšlení žáků základní školy, aniž by se používala kvantová fyzika k vysvětlení absorpce určité vyzařované energie Zemí. Analogie vysvětlení uvedené absorpce s bezmračnou oblohou a s oblohou zataženou mraky s vodní párou se setkal s pozitivním ohlasem u učitelů fyziky.

Literatura

[1] *Bartuška, K., Svoboda, E.*: Fyzika pro gymnázia: molekulová fyzika a termika. 4. přeprac. vyd., Prometheus, Praha, 2000.

[2] *Braniš, M., Hůnová, I.*: Atmosféra a klima: aktuální otázky ochrany ovzduší. 1. vyd., Karolinum, Praha, 2009.

[3] *Kolářová, R., Bohuněk, J.*: Fyzika po 8. ročník základní školy. Dotisk 1. vyd., Prometheus, Praha, 2001.

[4] *Kubincová, L.*: Termodynamika nevratných procesů pro žáky základních škol. Disertační práce. Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita, Ostrava, 2009.

[5] *Lepil, O.*: Fyzika aktuálně: příručka nejen pro učitele. 1. vyd., Prometheus, Praha, 2009.

[6] *Mechlová, E., Košťál, K. aj.*: Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz. 1. vyd., Prometheus, Praha, 1999.

[7] *Nezvalová, D.*: Didaktika fyziky: trendy, výzvy a perspektivy. MFI, roč. 21, č. 2 (2011), s. 87.

[8] Rámcový vzdělávací Program pro základní vzdělávání (verze platná od 1. 9. 2013) úplné znění upraveného RVP ZV s barevně vyznačenými změnami. [online]. Výzkumný ústav pedagogický, Praha, 2013. [cit. 2013-12-03]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani

INFORMATIKA

Bobřík učí informatiku

3. díl – Algoritmické úlohy

DANIEL LESSNER – JIŘÍ VANÍČEK

Matematicko-fyzikální fakulta, UK Praha

Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Algoritmus je základní informatický pojem. Algoritmy v nějaké formě se zabývá téměř každá oblast informatiky. Kdybychom se na informatiku podívali jako na vědu, zkoumající efektivní zpracování informací, nejefektivněji dnes informace zpracovávají stroje a algoritmy jsou právě návody pro tyto stroje.

Abychom nějaký postup prohlásili za algoritmus, musí splňovat několik základních kritérií. Postup musí být formulován pomocí jasně definovaných jednotlivých kroků, musí být jednoznačný (nepřipouští svévolné rozhodování), musí někdy skončit a musí vydat nějaký výsledek. Tyto vlastnosti zajišťují, že provádění postupu můžeme bez obav svěřit stroji. Pro praktické použití algoritmu je dále žádoucí, aby byl obecný (tedy aby řešil celou skupinu obdobných problémů), aby byl správný (pro všechna možná zadání) a aby byl efektivní, tedy úsporný ve využití zdrojů (zpravidla především aby byl rychlý).

Je na místě si uvědomit, že se s takovými rutinními postupy nesetkáváme zdaleka jen ve světě počítačů. Čekáme-li, že někdo splní zadanou práci podle našich představ, musí to zadání naše představy vystihovat. Patrně nikomu neprospěje, když zadaný postup nebude srozumitelný, když umožní několik různých výkladů, když nebude jasné, co je výsledkem práce, natož když půjde o mechanicky převzatý postup ke splnění jiného úkolu. Naopak dobře algoritmicky napsaný postup umožní autorovi ponechat provádění postupu na ostatních.

Informatici vymýšlejí a následně programují algoritmy pro řešení široké škály problémů. Algoritmy porovnávají a rozhodují, ve kterých podmínkách je který algoritmus nejvhodnější. Zkoumají, jak jsou algoritmy efektivní, hledají obecné postupy pro nacházení efektivních algoritmů pro různé druhy problémů. V té souvislosti je také zajímá, které problémy vůbec nelze efektivně řešit a jak si s tím poradit.

Z uvedeného je mimo jiné zřejmé, že zařazení provádění algoritmů do výuky v jiných předmětech nepokrývá potřeby výuky algoritmizace v pravém slova smyslu. Např. v matematice se žáci naučí a provádějí řadu algoritmů (od písemného násobení přes řešení rovnic po sestrojování řezů krychle či vyšetřování průběhu funkce) a popisují je (zápis geometrické konstrukce). Je samozřejmé používat v té souvislosti pojem algoritmus. Když ale nejsou nuceni algoritmus např. nejdřív vytvořit, pracovat s jeho explicitním popisem (tedy nikoliv předvedením a nápodobou), hodnotit jeho správnost nebo srovnávat efektivitu několika variant, rozvíjejí jen ty zcela nejzákladnější algoritmické dovednosti.

Bobříkovy algoritmické úlohy směřují i k využití pokročilejších algoritmických kompetencí. V první řadě jsou to úlohy, které vyžadují provedení zadaného postupu, který je např. netradičně popsán (alespoň z pohledu soutěžícího). Zajímavější jsou úlohy, kde je třeba zkoumat vztah vstupu a výstupu algoritmu, tedy např. jak bude vypadat výsledek po provedení daného algoritmu nebo zda vytvořený algoritmus vede k požadovanému cíli.

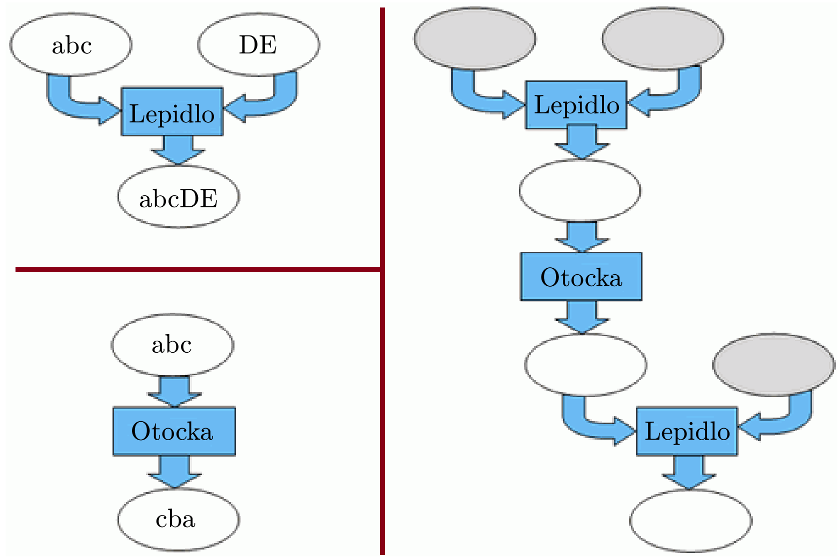
Další algoritmické úlohy směřují k nalezení nejrychlejších postupů, popř. k vyloučení jejich existence. Tento typ algoritmických úloh představuje např. toto zadání: Máme rozbitou kalkulačku, která umí pouze násobit dvěma a dělit třemi. Na začátku je na displeji zobrazeno číslo 1. Lze docílit toho, aby se na displeji objevilo číslo 15?

Míchačka textu

Kategorie Junior, Senior, autorka Andrea Hrušecká.

Zadání

Máme dva druhy strojů, Lepidlo a Otočku. Lepicí stroj slepuje dvě slova do jednoho (obr. 1 vlevo nahoře). Otočka napíše zadané slovo pozpátku (obr. 1 vlevo dole).



Obr. 1

Kombinaci obou strojů ukazuje obr. 1 vpravo. Do tří šedých polí jsou vkládána slova, v bílých se objeví výsledek. Která slova musíme vložit do šedých polí stroje, abychom v nejspodnějším bílém poli získali slovo PROSINEC?

A) N ISORP EC B) ORP IS CEN C) PR OSI NEC D) RP ISON EC

Co má tato úloha společného s informatikou

Tato úloha souvisí s oblastí formálních jazyků a automatů, jedné z hlavních částí informatiky. Počítač zpracovává čísla a texty a pomocí takovýchto grafů, jako byl použit v úloze, si lépe dokážeme představovat a navrhovat, co se s těmito daty v počítači děje.

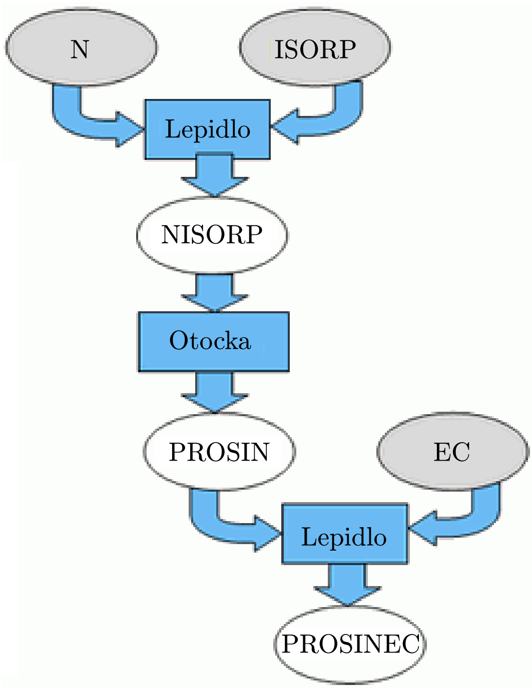
Úloha předkládá stroj a popis chování jeho částí, nikoliv ovšem popis chování stroje jako celku. Úkolem je najít vstupní podmínky, vedoucí k danému výstupu. Je tedy třeba porozumět danému popisu postupu, identifikovat řetězce příčin a následků, z nich plynoucí vztahy mezi vstupy a výstupy a porozumět tak celému postupu. To je informatikův denní chléb.

Schéma je přehledné pro člověka, pro stroj bychom stejný stroj popsali prostřednictví funkcí, např. takto: `slep(otoč(slep((L1, L2)), L3)`. Volání funkce je považováno za počátek nějaké aktivity. Funkce dostávají vstupní parametry (v našem případě dvě slova), zpracují je a vrací výstupní hodnoty (zde jedno výsledné slovo). Výstup funkce lze ihned použít jako vstup další funkce, jak naznačuje i uvedený zápis a jak to známe z matematiky (ve středoškolské matematice se ovšem soustředíme na funkce reálných čísel, např. logaritmus).

Jeden z významných výsledků teoretické informatiky (zjednodušeně) říká, že vše, co jde spočítat na počítači, jde spočítat i pomocí několika málo základních funkcí (např. „zvětši vstupní hodnotu o 1“) a operátorů (např. opakované provádění nějaké funkce). To je skvělé, protože pro zkoumání hranic vypočitatelného nemusíme zkoumat všechny programy, stačí se zabývat kombinacemi základních funkcí.

Zdůvodnění správné odpovědi

Správná odpověď je A) N ISORP EC. Na obr. 2 je znázorněno, jak bude slovo PROSINEC při správném řešení vznikat.



Obr. 2

Odpověď B) ORP IS CEN nemůže být správně, protože poslední část CEN se přilepí na konec slova, slovo tedy skončí na CEN. U odpovědi C) PR OSI NEC po spojení prvních dvou částí a otočení vznikne buď ISORP, nebo RPISO podle toho, do které šedého pole vložíme jednotlivé části textu. Odpověď D) RP ISON EC obsahuje část slova, které je pozpátku NOSI a není součástí slova PROSINEC. U žádné z nesprávných odpovědí nelze vytvořit slovo PROSINEC, ani když by se vstupní texty vložily do vstupních polí zpřeházeně.

Jak najít správné řešení? Máme přinejmenším dvě možnosti hledání správné odpovědi. První je zkoušení možností. Do stroje postupně dosazujeme nabízené vstupy a díváme se, jak to dopadne. Dříve či později trefíme tu správnou, protože je 24 možností, jak texty do šedých polí vložit.

Druhý způsob řešení spočívá v prozkoumání struktury stroje jako takového a odvození vlastností, které musí správná vstupní slova mít. Vidíme například, že s koncem slova PROSINEC se nic neděje, jen se přilepí. To vylučuje možnost ORP IS CEN, která má vstupní slovo CEN obrácené.

Naopak začátek slova prosinec bude slepen ze dvou kusů a otočen. Hledáme tedy dva navazující otočené kousky. Možnosti PR OSI NEC chybí otočení. Možnost RP ISON EC zase obsahuje ISON, což ani jedním směrem není část slova prosinec. Zbývá možnost N ISORP EC.

Rozmyslete si, který postup řešení (přímé dosazování nebo odvozování nutných vlastností vstupu) je výhodnější a proč. Současné počítače první způsob řešení (projít „hrubou silou“ všechny možnosti) velice dobře umí. Potíž nastane, když možností není 24, ale třeba přes bilión, což odpovídá např. hledání trasy, na které procházíme pouhých 40 rozcestí. Druhý způsob (odvozování) vyžaduje vyšší inteligenci strojů. Konstrukce a programování takových strojů je jeden z fascinujících úkolů, který současná informatika řeší.

Posouvání proužku papíru

Kategorie Senior, autor Mathias Hiron.

Zadání

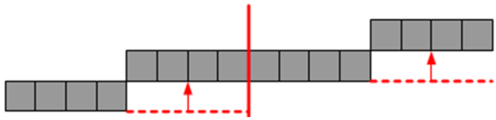
Na stole leží proužek papíru o rozměrech 16 cm × 1 cm. Je rozdělený na 16 čtverců o straně 1 cm.

Obr. 3

Proužek přestřihneme v polovině. Pravý díl posuneme o 1 cm nahoru.

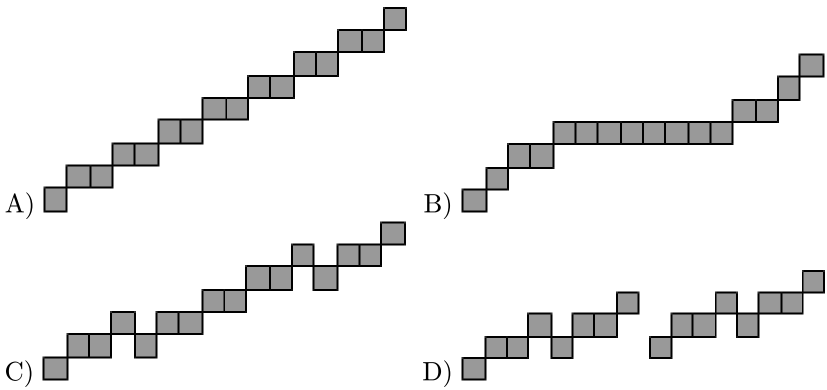
Obr. 4

Na dvou vzniklých proužcích zopakujeme celý postup znovu: přepůlíme je a pravou polovinu vždy posuneme o 1 cm nahoru.



Obr. 5

Postup zopakujeme, dokud nejsou nastříhané proužky dlouhé 1 cm. Jak vypadá výsledný obrazec z proužků (viz obr. 6)?



Obr. 6

Co má tato úloha společného s informatikou

Tato úloha popisuje často používaný algoritmus „rozděl a panuj“. Zároveň názorně ukazuje velmi oblíbený a častý jev v informatice: jednoduchá pravidla mohou vést k překvapivě složitému chování, nebo naopak, složité chování lze (někdy) zapsat pomocí jednoduchých pravidel. Jen si představte, jak byste popisovali výsledný obrazec po jednotlivých dílcích, kdybyste nevěděli, jak jednoduše vznikl.

Oblíbeným příkladem jednoduchého popisu složitého chování je *Hra života*, kterou si můžete zkusit na http://www.bitstorm.org/gameoflife/ nebo http://www.kongregate.com/games/locos/the-game-of-life (vysvětlivky ke hře najdete na http://cs.wikipedia.org/wiki/Hra_života).

Charakteristickým prvkem uvedených pravidel je rekurze, tedy volání nebo odkaz na sebe sama. V naší úloze například proužek rozpůlíme, nějak upravíme poloviny, a potom tutéž úpravu provedeme s jednotlivými půlkami. Tento přístup v programování nazýváme „rozděl a panuj“. Velmi se hodí u problémů, které lze rozdělit na menší, které jsou vlastně stejnými podproblémy.

Například hledání prvku v seřazeném seznamu realizujeme následujícím způsobem: http://www.algoritmy.net/article/21/Binarni-vyhledavani

Nejprve se podíváme doprostřed prohledávaného seznamu. Pokud jsme našli hledané, jsme hotovi. Pokud ne, je jasné, ve které polovině seznamu se hledaný prvek musí nacházet. Nyní tedy potřebujeme najít prvek v kratším seznamu. To už ale přece víme jak: stačí začít číst tento odstavec zase od začátku. Tím je řečeno vše potřebné k nalezení hledaného prvku. Nebo není?

Rekurze je schovaná i v samotných základech informatiky, navíc je základním kamenem počítání vůbec. V matematice se využívá k definici tak základních struktur, jako jsou přirozená čísla: přirozené číslo je buď 1, nebo následovník jiného přirozeného čísla (a tím je buď 1, nebo opět následovník atd.). Vizuálně si s rekurzí můžete pohrát na http://recursivedrawing.com/.

Zdůvodnění správné odpovědi

Nabízejí se dvě cesty k řešení. První spočívá v krokování neboli v postupné simulaci popsaného postupu. Na konci stačí porovnat vlastní výsledek s nabízenými možnostmi.

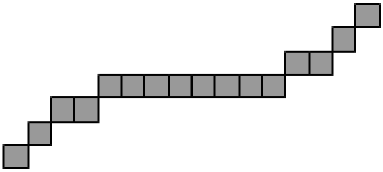
Druhá cesta spočívá v pozorování toho, co se při stříhání a posouvání děje. Přitom hledáme zobecnění, vlastnosti, které musí řešení splňovat (a které zároveň některé z nabízených odpovědí nesplňují).

Uvedeme dvě pravidla pro výsledný obrázek, která lze odvodit ze zadání úlohy:

1. Jestliže jsme na začátku proužek rozstřihli a pak s oběma polovinami zacházeli stejně, musí mít obě poloviny proužku stejný tvar.

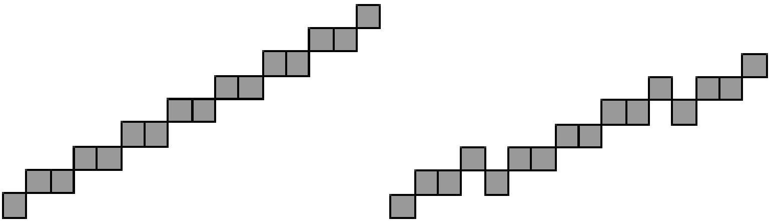
2. Jestliže jsme při prvním střihání posunuli pravý proužek o 1 cm výše a pak s oběma polovinami zacházeli stejně, musí být pravá polovina posunuta o 1 cm výše než levá.

Na obr. 7 nejsou levá a pravá polovina stejné, poloviny jsou otočené o 180°. Obr. 7 nesplňuje pravidlo 1.



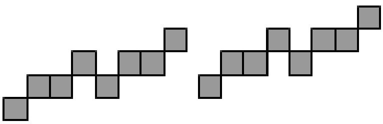
Obr. 7

Na obr. 8 jsou sice obě poloviny stejné, ale pravá je posunuta o více než jeden čtvereček nahoru než levá. Oba obrázky odporují pravidlu 2.



Obr. 8

Správná odpověď je D) (obr. 9), všechny ostatní možnosti jsou špatné.



Obr. 9

Mimochodem, všimněte si, že tento obrázek má obě poloviny stejné a pravá část jako celek je posunuta pouze o jeden čtvereček oproti levé, splňuje tedy obě pravidla. Stejně tak splňují obě pravidla i menší části, vzniklé při dalším stříhání (např. první a druhá čtvrtina obrázku jsou stejné, jsou navzájem posunuté o jeden čtvereček).

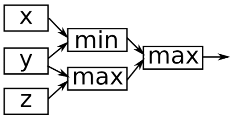
Všimněte si také, že ve správném řešení vznikly dva zcela oddělené obrazce. To je překvapivé, protože celou dobu posouváme proužek jen o jeden centimetr nahoru, takže rohy původního a posunutého proužku se stále dotýkají a nikdy neoddělí. Jak tedy k oddělení došlo?

Jak vybrat medián

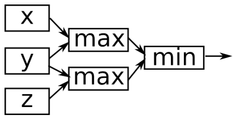
Kategorie Senior, autor Ilja Posov.

Zadání

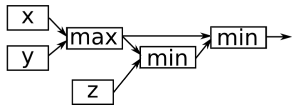
Mějme dána tři různá čísla x, y a z. Nejvyšší z nich je maximum, nejnižší minimum a zbývající číslo budeme nazývat medián. Na kterém schématu je zobrazen správný postup určení mediánu čísel x, y, z?



Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12

A) Obr. 10 B) Obr. 11 C) Obr. 12 D) Žádné z uvedených schémat.

Co má tato úloha společného s informatikou

Třídicí schémata jsou jedním z přístupů ke klasickému informatickému problému – řazení. Stavební prvky těchto schémat více či méně odpovídají stavebním prvkům skutečných obvodů. Představme si na vstupu logické hodnoty zadané pomocí jedniček a nul. Jakým logickým operátorům pak odpovídají prvky max a min?

Kontrola správnosti pracovního postupu je důležitá dovednost pro každého. Informatik musí umět správnost algoritmu (zapsaného např. právě pomocí schématu, jako v této úloze) dokonce dokázat. Algoritmus má být mimo jiné obecný, to znamená, že funguje správně pro všechny povolené vstupní údaje (zde tři různá čísla) – i tohle musí informatik ověřit.

Pokud jde o opačný případ a chceme ukázat, že nějaký postup *nefunguje*, vyplatí se najít vhodný *protipříklad* – tedy vstup, na kterém postup selže. Konkrétní vstupy vedoucí k selhání jsou užitečné i při hledání místa a důvodu selhávání algoritmu či programu.

Zdůvodnění správné odpovědi

Schéma A) nefunguje pro čísla $x = 1$, $y = 2$ a $z = 3$ (jako medián vyjde z, ale to je maximum).

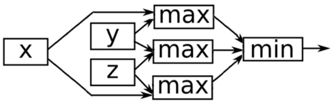
Schéma B) nefunguje pro $x = 2$, $y = 3$ a $z = 1$ (jako medián vyjde y, ale to je maximum).

Schéma C) nefunguje pro čísla $x = 3$, $y = 2$ a $z = 1$ (jako medián vyjde z, ale to je minimum).

Ani jedno z právě uvedených schémat není správné. *Správně je* D).

Ve zdůvodnění této úlohy jsme použili protipříklad. Jak nacházet protipříklady? Přinejhorším budeme muset procházet všechny možnosti. Zde to naštěstí neznamená projít všechna čísla nějakého oboru. Protože důležitá je jedině jejich vzájemná velikost, pro každou síť tedy potřebujeme vyzkoušet nanejvýš $3! = 6$ různých možností vstupních hodnot. Postupně získávaná zkušenost nám pak napoví, které možnosti mají vyšší pravděpodobnost selhání. Například pokud má některá hodnota možnost projít do cíle čistě přes operátory stejného druhu, je něco v nepořádku – doporučujeme vyzkoušet si průchod schématy A) a C) pro číslo z. Podobně nezdravé je, pokud nějaká hodnota, aniž by byla mediánem, vytlačí z výpočtu všechny ostatní (příklad čísla y u schématu B).

Možným správným řešením je např. ze všech dvojic xy, xz, yz vybrat maxima (tím se zbavíme nejmenšího čísla) a potom z těchto maxim najít minimum. Protože nejmenšího čísla (celkového minima) jsme se při prvním kroku zbavili, hledané minimum v druhém kroku je medián. Příklad takového schématu je na obrázku. Najdete jiné funkční schéma?



Obr. 13

Polička s knihami

Kategorie Senior, autor Ahto Truu.

Zadání

Knihovník rovná zpřeházené svazky encyklopedie v několika krocích. Jeden krok rovnání vypadá tak, že vezme jeden svazek z police, posune některé ze zbývajících svazků doleva nebo doprava a pak vloží vyjmutý svazek na prázdné místo (obr. 14). Na obr. 14 knihovník srovnal svazky na jeden krok.

Obr. 14

Kolik nejméně kroků (tedy „vyjmutí svazku“ – „posunutí některých zbývajících“ – „vložení svazku“) je potřeba k uspořádání všech svazků na obr. 15?

Obr. 15

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6

Co má tato úloha společného s informatikou

Tato úloha se týká řazení, jednoho z nejčastěji řešených problémů v informatice. Řazení dat umožňuje rychlejší vyhledávání. Představte si, že byste např. v obchodě s obuví požádali o svou velikost, a personál by začal prohledávat postupně všechny krabice! Bez řazení výsledků podle relevance je dnes nemyslitelná také např. práce s internetovým vyhledávačem.

Na stránce http://www.sorting-algorithms.com se můžete přesvědčit, jak důležité je zabývat se efektivitou algoritmů – lze tak ušetřit obrovské množství času (a tím i peněz).

U řazení je důležité poznat, které části jsou již vlastně seřazené a co bude třeba ještě seřadit. Postup potřebný k vyřešení této úlohy, tedy nalezení nejdelší rostoucí podposloupnosti, je další typickou informatickou úlohou. Efektivní řešení využívá dynamické programování, které se objevilo i u úlohy na vzdálenost řetězců DNA v prvním dílu tohoto seriálu. Počet kroků nutných k seřazení svazků lze využít jako míru pro posouzení „zamíchanosti“ posloupnosti. Tedy čím víc výměn, tím zpřeházenější je pořadí svazků.

Řazení je klasickou partií informatiky, jak ukazuje i toto dnes již historické video, plné zajímavých informací:

http://www.youtube.com/watch?v=SJwEwA5gOkM

Zdůvodnění správné odpovědi

Svazky, které nevyjmeme z poličky, zůstanou vůči sobě v původním pořadí. Svazky, které ve vzájemně správném pořadí už jsou, vyjímat z poličky nebudeme – nic bychom tím nezískali. Naopak všechny ostatní vyjmout v průběhu řazení musíme – jinak by se do správného pořadí nedostaly. Nejdelší taková vzestupná posloupnost obsahuje pět svazků (1, 6, 7, 8, 9), zbývající čtyři svazky (4, 5, 3, 2) musí být vyjmuty a přesunuty.

Správná odpověď je B: *potřebujeme čtyři kroky.* Lépe to nejde, protože to by muselo být na začátku ve správném pořadí alespoň 6 svazků.

Jiné řady svazků s vzestupným pořadím, které lze v obrázku najít, jsou (1, 4, 5, 9) nebo (1, 4, 8, 9), ty jsou ale kratší (a další řady jsou ještě kratší), takže by muselo být vyjmuto a správně zařazeno více svazků.

Poznámka. Pořadí, ve kterém budou svazky vyjmuty a vloženy na správná místa, sice ovlivňuje počet svazků, které při jednotlivých krocích musí být posunuty, ovšem neovlivňuje počet svazků, které musí být z poličky vyjmuty.

K této úloze se nabízejí další otázky. Kolik kroků by bylo potřeba, abychom svazky seřadili sestupně? Jak by vypadala posloupnost zpřeházených svazků, která by vyžadovala největší možný počet vyjmutí? Kolik takových posloupností najdete?

Elektronické hlasovací zařízení

FRANTIŠEK LÁTAL – MAŁGORZATA MICHEJDOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Na základních i středních školách žáci často nechtějí odpovídat na otázky kladené učitelem. Žáci, kteří si nejsou jisti správnou odpovědí, raději neodpoví vůbec. Učitel získá odpověď od jednoho nebo dvou žáků, a když je tato odpověď správná, nemá již možnost posoudit, zda ostatní ve třídě pochopili probírané učivo. Hlasovací zařízení umožňuje anonymně testovat znalosti všech žáků ve třídě. Učitel získá okamžitou informaci o znalostech žáků a může s žáky diskutovat o výsledcích hlasování, dříve než sdělí správnou odpověď.

Používáním hlasovacího zařízení ve výuce využijeme přirozených vlastností žáka, jako je jeho soutěživost a hravost. Zároveň pomocí hlasovátek procvičíme učivo se všemi žáky najednou a omezíme tak, aby se někdo ze třídy při zkoušení nudil [1].

Výhody a nevýhody použití hlasovacího zařízení

Mezi základní *výhody* použití hlasovacího zařízení ve výuce lze zařadit:

- motivování žáků k diskuzi;
- větší aktivita všech žáků během vyučovací hodiny;
- soutěživost žáků;
- okamžitá zpětná vazba pro žáka i učitele;
- anonymita hlasování;
- zvýšení interaktivity;
- zlepšení učení prostřednictvím opakování.

Mezi *nevýhody* využití hlasovacího zařízení ve výuce lze zařadit:

- pořizovací cena hlasovacího systému;
- horší viditelnost textu na obrazovce hlasovátka;
- náročnější časová příprava pro učitele;
- neakceptace české diakritiky;
- snadnější opisování žáků mezi sebou.

Typy hlasovacích zařízení

Nabídka hlasovacích zařízení pro školy je v současné době poměrně pestrá a cenový rozsah se pohybuje v rozmezí 1 000–1 500 Kč za jedno hlasovátko. Jednotlivé druhy hlasovátek lze rozdělit do dvou kategorií.

První kategorii tvoří hlasovátka, u kterých lze odpovídat pouze zmáčknutím odpovědi A, B, C, ..., resp. 1, 2, 3, ... Některé z hlasovátek v této skupině mají obrazovku, kde se mohou zobrazovat otázky a odpovědi, ale žádné z těchto hlasovátek nedisponuje klávesnicí a tedy možností vepsání vlastní odpovědi. Do této kategorie můžeme zařadit např. zařízení (obr. 1):

- MimioVote
- CPS™ IR
- ActiVote
- QClick QRF300
- SMART Response LE

Druhý typ hlasovátek disponuje klávesnicí, která umožňuje vpisovat vlastní odpověď. Samozřejmostí je obrazovka, na které se zobrazuje text dané otázky. Do této skupiny patří např. (obr. 2):

- CPS Pulse™
- SMART Response PE
- SMART Response XE
- ActivExpression
- ActivExpression 2

Obr. 1 Hlasovátka (zleva): MimioVote, CPS^{TM} IR, ActiVote, QClick QRF300, SMART Response LE [2–6]

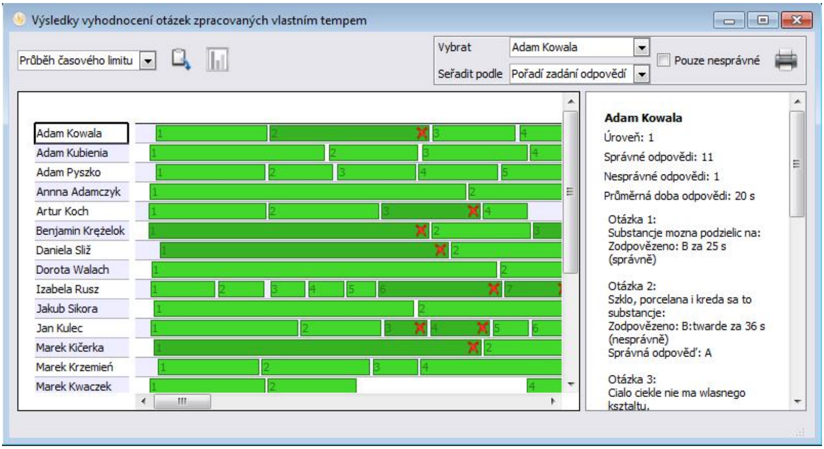
Obr. 2 Hlasovátka (zleva) CPS Pulse^{TM}, SMART Response PE, SMART Response XE, ActivExpression, ActivExpression 2 [3, 4, 6]

Princip hlasování s hlasovacím zařízení ActivExpression

Pro práci s hlasovacím zařízením ActivExpression je potřeba mít tyto součásti:

- hlasovátko ActivExpression;
- software ActivInspire;
- počítač nebo notebook s připojením k projektoru;
- rozbočovač ActivHub, který zajišťuje komunikaci mezi hlasovátkem a počítačem.

Samotné hlasování ve výuce může probíhat dvěma způsoby: *hlasování vedené učitelem* a *hlasování vlastním tempem žáka*. Při hlasování, které vede učitel, je položena otázka a všichni žáci ve třídě odpovídají na tuto položenou otázku. Po odeslání odpovědí všech žáků může proběhnout diskuze a vyhodnocení výsledků konkrétního hlasování. Při druhém typu hlasování, hlasování vlastním tempem žáka, musí učitel předem připravit sadu otázek, které se žákům zobrazí přímo v jejich hlasovátkách. Každý žák odpovídá na otázky svým vlastním tempem, bez ohledu na rychlost odpovídání svých spolužáků. Učitel může nastavit časový limit, povolit pohyb v sadě otázek, nebo nastavit možnost opravit se při špatné odpovědi. Při hlasování vlastním tempem žáka se učiteli na monitoru počítače zobrazuje přehled o průběhu hlasování (viz obr. 3) a učitel tak může lépe pracovat např. se slabšími žáky, kteří odpovídají špatně nebo ve velmi pomalém tempu oproti ostatním. Zajímavou možností při tomto typu hlasování je funkce náhodné uspořádání otázek, která umožňuje odesílání otázek žákům v náhodném pořadí. Tím se alespoň trochu sníží možnost opisování mezi žáky.



Obr. 3. Průběžné výsledky hlasování vlastním tempem

Typy otázek

Hlasovací zařízení ActivExpression nabízí možnost vytvoření sedmi různých typů otázek:

- více možností – žák vybírá správnou odpověď z více možností, v programu lze nastavit požadovaný počet odpovědí;
- ano/ne – žák se rozhoduje mezi dvěma možnostmi Ano/Ne nebo Pravda/Nepravda;
- seřadit v pořadí – žák seřadí odpovědi sestupně nebo vzestupně;
- Likertova stupnice – žák vybere jednu možnost ze škály odpovědí, Velmi souhlasím–Velmi nesouhlasím, v programu lze nastavit i vlastní škálu;

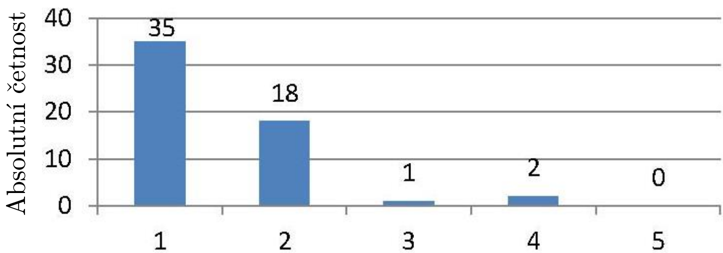
- číselná hodnota – žák odpoví pomocí čísla, program umožňuje toleranci pro správnou odpověď;
- text – žák píše textovou odpověď na klávesnici hlasovacího zařízení, je třeba počítat s neakceptováním české diakritiky, problémy mohou nastat i při drobných překlepech, kdy je odpověď vyhodnocena jako chybná;
- rovnice – software nabízí otázku formou rovnice, je třeba však zdůraznit, že hlasovátko ActivExpression neumí zapisovat rovnice, a proto je tato funkce nepoužitelná.

Zpětná vazba žáků z výuky s hlasovátky

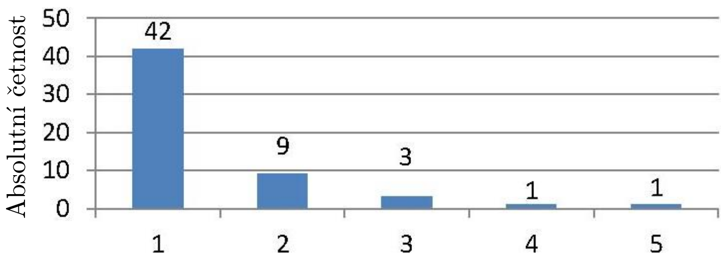
Autorka článku odučila na základní škole 28 vyučovacích hodin s hlasovacím zařízením ActivExpression [7]. Na konci celého bloku výuky s hlasovátky byl pro žáky vytvořen krátký dotazník, který se skládal z pěti škálových položek Likertova typu. Na škále 1 – Velmi souhlasím, 2 – Souhlasím, 3 – Neutrální, 4 – Nesouhlasím, 5 – Velmi nesouhlasím měli žáci za úkol zhodnotit práci s hlasovacím zařízením. Výsledky dotazníkového šetření, na které odpovědělo 56 žáků, jsou vidět na následujících grafech.

Tvrzení:

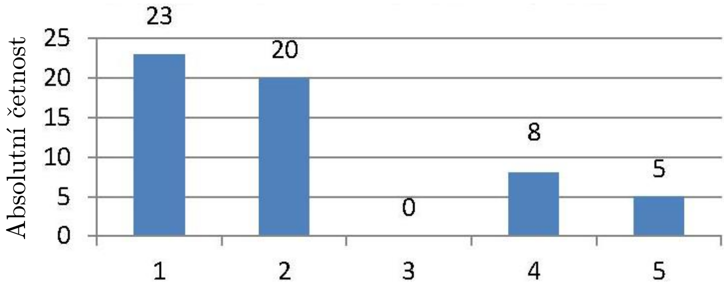
1. Princip hlasování je jednoduchý na pochopení.



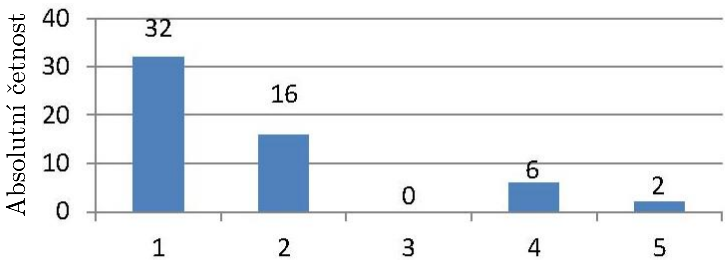
2. Odpovídání na otázky pomocí hlasovacího zařízení mě bavilo více, než klasické odpovídání.



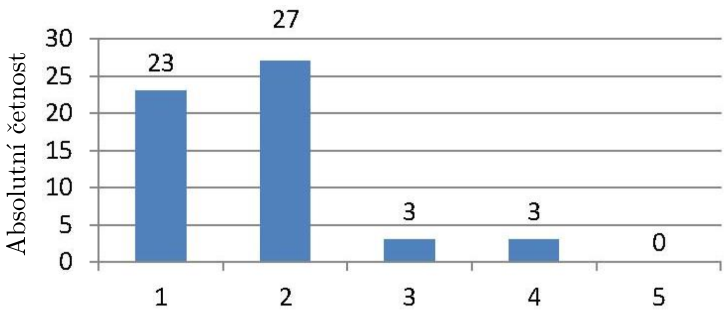
3. Při práci s hlasovacím zařízením se více soustředím než u klasického ústního zkoušení.



4. Hlasovací zařízení může zcela nahradit písemné či ústní zkoušení.



5. Naučil/a jsem se víc v hodinách, kde bylo použito hlasovací zařízení, než v hodinách bez hlasovátek.



Zpětná vazba žáků na hlasovací zařízení použité ve výuce je pozitivní. Většina žáků vnímala hlasovací zařízení jako pomůcku, která jim pomohla více se soustředit v hodinách, protože stále museli sledovat výuku, aby mohli následně odpovědět na otázky učitele. Nejlépe dopadlo tvrzení č. 2, které ukazuje, že žáky odpovídání pomocí hlasovacího zařízení bavilo více, než klasické odpovídání. Největším přínosem použití těchto pomůcek bylo zapojení všech žáků najednou. Žáci mezi sebou soutěžili, kdo správně odpoví na více otázek.

Závěr

Hlasovací zařízení zvýší aktivitu žáků při výuce, zlepší komunikaci mezi učitelem a žáky a mezi žáky samotnými během hodiny, podnítí zájem a zahájí diskuzi. Učitel získá velmi rychle zpětnou informaci, zda žáci pochopili probíranou látku. Žáci ihned vidí, jak si vedou v porovnání se spolužáky. Anonymita hlasování odbourá u žáků obavu z odpovídání. Z těchto důvodů může být hlasovací zařízení velmi přínosné při výuce libovolného předmětu na základní i střední škole. Hlasovátka je ovšem potřeba používat promyšleně, aby práce s nimi byla efektivní a přínosná pro žáky i učitele.

Technologický pokrok se však u hlasovátek nezastavil a vývoj dále směřuje k aplikacím využívajícím tablet. Již nyní se na trhu objevují aplikace, určené pro hlasování pomocí tabletu. Výhodou ve srovnání s popsanými hlasovátky je multifunkčnost tabletu, který může sloužit jak k prezentaci učební informace, tak k volbě odpovědi na kladené otázky. K této aktuální problematice se na stránkách MFI ještě vrátíme.

Poděkování. Tento příspěvek vznikl za podpory projektu IGA_PrF_2014002.

Literatura

[1] *Vaněček, D.*: Informační a komunikační technologie ve vzdělávání. ČVUT, Praha, 2008.

[2] MimioVote. [online] [cit. 2014-06-03] Dostupné z: http://www.mimio.com/

[3] eInstruction. Student response systems. [online] [cit. 2014-06-03] Dostupné z: http://www.einstruction.com/srs-overview

[4] Promethean. [online] [cit. 2014-06-03] Dostupné z: http://www.prometheanworld.com/education/products/assessment-and-student-response/

[5] QOMO QClick Student Response Systems. [online] [cit. 2014-06-03] Dostupné z: http://www.qomo.com/Categories-Products.aspx

[6] SMART Response interactive response systems. [online] [cit. 2014-06-03] Dostupné z: http://smarttech.com/

[7] *Michejdová, M.*: Hlasovací zařízení ve výuce fyziky na základní škole. Diplomová práce, PřF UP, Olomouc, 2014.

LITERATURA

Stanislav Trávníček:
Pojďme na to s matematikou (a někdy i s počítačem)

Zájmeno „to" v názvu recenzované knížky zastupuje praktické úlohy, které před nás někdy staví běžný život a k jejichž řešení můžeme úspěšně využít matematické znalosti a dovednosti. Jak konstatuje autor v úvodu díla, výuka matematiky na základních i středních školách bohužel málo přesvědčuje žáky o tom, že probírané teoretické poznatky lze úspěšně uplatňovat v praxi, a to nejen v technických či vědeckých disciplínách, ale i v situacích, které známe z běžného života. Zejména takové si autor pro prvních 19 kapitol knihy vybírá a poutavým, živě a čtivě napsaným výkladem popisuje způsob, jakým pro ně vybrat vhodný matematický model, jehož užitím (spojeným s uplatněním školské matematiky) dostáváme odpovědi na otázky, které nás ve zkoumaných situacích zajímají. Výběr situací, ke kterým autor hledá matematické modely, je dostatečně rozmanitý, takže při něm najdou uplatnění výsledky z algebry, teorie čísel, geometrie, kombinatoriky i teorie pravděpodobnosti. Velkým požitkem pro čtenáře může být kupříkladu četba kapitoly *Optimální tvar podlahy hlediště*, která musí nadchnout každého, kdo se s popsaným modelem seznámí poprvé. V této i v mnohých dalších kapitolách je v závěru textu čtenáři nabídnut program, podle kterého je možné nalezené algoritmy řešení realizovat na počítači.

Poslední dvě kapitoly textu mají odlišné poslání, a tedy i zpracování. V první z nich autor poutavým způsobem popisuje metodologii postupu, který nazýváme *matematizací reálné situace*. Obecné principy jsou doprovázeny vhodnými ukázkami a zamyšlením, jak dovednost matematizace a motivaci k této činnosti rozvíjí u našich žáků současná škola. Závěrečná kapitola celého rukopisu je pak věnována typologii a postupům řešení slovních úloh, které se tradičně škole řeší. Jsou to úlohy o celku a částech, o směsích, o společné práci a o pohybu. Kromě obecných popisů obsahové podstaty těchto typů úloh zde najdeme mnohé ukázky dobových slovních úloh převzatých z českých učebnic a sbírek různých údobí posledního století.

Autorem hodnocené knížky, jež vyšla r. 2013 ve Vydavatelství Univerzity Palackého v Olomouci, je osobnost nadmíru povolaná a zasvěcená k psaní o tom, jak uplatňovat matematiku v praxi. Učitelská kariéra Stanislava Trávníčka na Přírodovědecké fakultě UP byla z politických důvodů počátkem 70. let minulého století přerušena. V průběhu dvou následujících desetiletí se tento matematik uplatňoval v různých podnicích při zavádění výpočetní techniky a vývoji tzv. automatizovaných systémů řízení. V roce 1990 se na požádání vrátil na Přírodovědeckou fakultu UP a přešel od svého původního akademického zaměření v oblasti diferenciálních rovnic k práci v oboru didaktiky matematiky, při níž bohatě zúročil svůj celoživotní zájem o elementární matematiku, dobře patrný i z recenzované knihy. Ta je celá napsána přesným a přitom srozumitelným jazykem, místy okořeněným špetkou autorova jemného humoru.

Je potřeba zdůraznit, že podobně zaměřená publikace v novější české matematicko-popularizační literatuře prakticky neexistuje. Proto by Trávníčkova kniha mohla přinést velký užitek jak učitelům a žákům zejména středních škol, tak i všem dalším zájemcům o matematiku. Jejich požitek a poučení z četby bude tím větší, čím pečlivěji budou promýšlet autorovy matematické úvahy a výpočty vedoucí k řešení zvolených problémových situací.

Jaromír Šimša