Aplikační úlohy z geometrie

JANA HROMADOVÁ

Matematicko–fyzikální fakulta UK, Praha

Na Katedře didaktiky matematiky MFF UK v Praze vzniká sbírka aplikačních úloh[1] z matematiky. Cílem tohoto článku je představit několik úloh z kapitoly, která se bude věnovat geometrii. Článek navazuje na dva příspěvky [1] a [2] uveřejněné v časopisu MFI zaměřené na tematiku lineárních a kvadratických funkcí, rovnic a nerovnic.

Geometrie v současné době nepatří mezi nejoblíbenější partie středoškolské matematiky, přestože hraje důležitou roli při rozvoji prostorové představivosti, logického a tvůrčího myšlení. Nejen proto bychom se měli snažit učinit její výuku pro studenty zajímavější, toho lze dosáhnout např. vhodným výběrem úloh z reálného života. Svět kolem nás nabízí řadu geometrických problémů, stačí se jen pozorně dívat. Geometrie vždy vycházela z praktických potřeb člověka, bez geometrie se neobejde řada technických profesí, architekti, stavební či strojní inženýři. Při řešení stereometrických úloh z reálného života mají studenti menší problém s prostorovou představivostí, jelikož pracují se známými objekty.

Pro ilustraci je zde prezentována jedna planimetrická a dvě stereometrické úlohy, na nichž si lze procvičit použití Pythagorovy věty, výpočty objemů a povrchů těles.

1. Stěhování výstavy

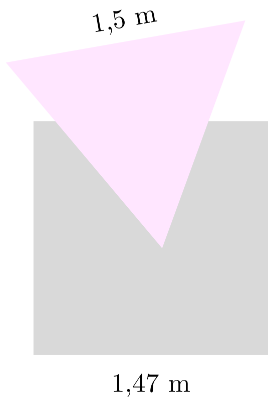
Při stěhování výstavy je třeba vitrínu ve tvaru kolmého trojbokého hranolu, jehož podstava má tvar rovnostranného trojúhelníku o straně 1,5 *m, umístit do bednění ve tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu. Vnitřní rozměr čtvercové podstavy bednění je* 1,47 *m, výška hranolu je větší než výška vitríny. Vejde se vitrína do tohoto bednění?*

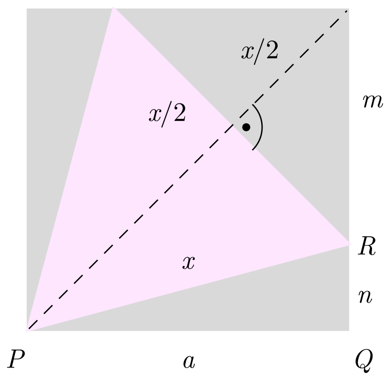
Řešení: Úlohu stačí řešit pro podstavy obou těles.

Pomocný rovnostranný trojúhelník umístíme do čtverce tak, aby jeden

[1] Sbírka vzniká za podpory rozvojového projektu MŠMT č. 14/9 (Zvyšování kvality studia na MFF UK, dílčí část Homo Mathematicus).

jeho vrchol splýval s libovolným vrcholem čtverce, zbývající dva vrcholy nechť leží na stranách čtverce neprocházejících již obsazeným vrcholem, symetricky podle úhlopříčky čtverce.





Označme si a velikost strany čtverce a x velikost strany trojúhelníku. Vrchol R trojúhelníku, který nesplývá s vrcholem čtverce, rozděluje stranu čtverce, na níž leží, na dvě úsečky o délkách m a n. Podle Pythagorovy věty platí $m^2 = 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$. Odtud odvodíme

$$m = \frac{x}{\sqrt{2}}, \ n = a - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Použijeme-li Pythagorovu větu tentokrát pro pravoúhlý trojúhelník PQR, dostaneme

$$x^2 = a^2 + \left(a - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 .$$

Po úpravě dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou x:

$$x^2 + 2ax\sqrt{2} - 4a^2 = 0$$

Zadání úlohy vyhovuje kořen $x = a\cdot(-\sqrt{2}+\sqrt{6})$. Pro $a = 1,47$ je $x \doteq 1,52$. Rovnostranný trojúhelník o straně 1,5 m se do čtverce o straně 1,47 m vejde, a tedy i vitrínu ze zadání úlohy lze umístit do připraveného bednění.

2. Oceňování nemovitostí

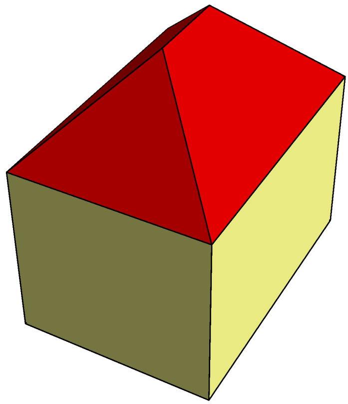
Při oceňování nemovitostí jsou nejčastěji využívány tři základní mezinárodně uznávané metody – porovnávací metoda, nákladová metoda a výnosová metoda. Podle charakteru nemovitosti a způsobu jejího užívání se mohou při oceňování využít buď všechny metody, nebo pouze některé.

Nákladovou metodu je možné využít u všech nemovitostí, ovlivňuje ji míra opotřebení nemovitosti. Vypočítaná cena bez DPH se skládá z několika složek. Největší podíl na ceně mají základní rozpočtové náklady (ZRN), které se odvíjejí od velikosti obestavěného prostoru. Ceny za 1 m^3 jsou dány tzv. cenovými ukazateli[2], které se liší podle typu stavby a použitého stavebního materiálu. Na celkové ceně nemovitosti se dále podílejí náklady na projektové a průzkumné práce, náklady na umístění stavby, riziková rezerva a ostatní náklady, které mohou dosahovat až 18 % ze ZRN. Ke konečné ceně nemovitosti je třeba ještě připočítat cenu pozemku.

Cena rodinného domu

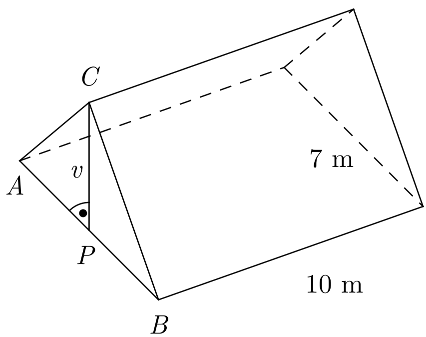
Dvoupatrový zděný rodinný dům s podkrovím má obdélníkový půdorys. Rozměry půdorysu jsou 7×10 *metrů, výšky prvního a druhého patra jsou* 3,2 *m (myslí se konstrukční výšky, tj. včetně tloušťky stropu). Střešní roviny svírají s vodorovnou rovinou úhel* $45°$*, jedná se o střechu valbovou (viz následující obrázek). Určete základní rozpočtové náklady na stavbu nového rodinného domu, je-li cena za* 1 *m*^{3} *obestavěného prostoru dle cenových ukazatelů rovna* 5 102 *Kč.*

[2] Tyto ukazatele se každý rok aktualizují, pro rok 2012 je lze nalézt na adrese `http://www.stavebnistandardy.cz/doc/ceny/thu_2012.html`



Řešení: Jestliže je cena stanovena za metr krychlový obestavěného prostoru, je třeba vypočítat objem domu. Objem prvních dvou pater ve tvaru kvádru je

$$V_1 = (7 \cdot 10 \cdot 3{,}2 \cdot 2)\ \mathrm{m}^3 = 448\ \mathrm{m}^3.$$

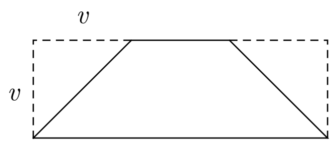


Kdyby střecha byla sedlová, měla by tvar trojbokého hranolu, jehož podstavou je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC, úhly CAB a CBA jsou dle zadání 45°. Přepona trojúhelníku ABC má délku 7 m, výška hranolu je 10 m. Výšku v trojúhelníku ABC snadno určíme, uvědomíme-li si, že trojúhelník ACP, kde P je pata kolmice spuštěná z bodu C na AB, je rovněž rovnoramenný.

$$v = |AP| = 3{,}5 \text{ m}.$$

Objem sedlové střechy je tedy

$$V_2 = \left(\frac{7 \cdot 3{,}5}{2} \cdot 10\right) \text{ m}^3 = 122{,}5 \text{ m}^3.$$



Valbová střecha je oproti sedlové menší o dva shodné jehlany, podstavou jednoho z nich je trojúhelník ABC a výška je rovna velikosti v, což je dáno opět sklonem střešních rovin (45°). Objem těchto dvou jehlanů je roven

$$V_3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 3{,}5}{2} \cdot 3{,}5\right) \text{ m}^3 \doteq 28{,}58 \text{ m}^3.$$

Objem celého domu je roven

$$V = V_1 + V_2 - V_3 = (448 + 122{,}5 - 28{,}58) \text{ m}^3 = 541{,}92 \text{ m}^3.$$

Základní rozpočtové náklady na stavbu rodinného domu jsou

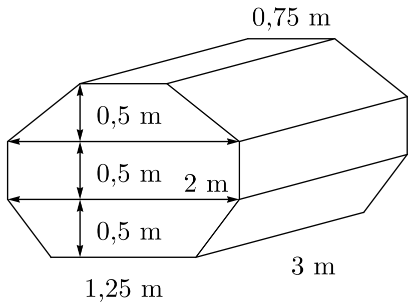
$$P = (5102 \cdot 541{,}92) \text{ Kč} = 2\,764\,875{,}84 \text{ Kč}.$$

3. Kontejnery

V malé obci nedaleko Prahy se staví nové sídliště. Podle předběžných studií by mělo mít zhruba 1 200 *obyvatel. Firma zajišťující svoz komunálního odpadu má k dispozici kontejnery ve tvaru osmibokého hranolu, jehož rozměry jsou uvedeny v následujícím obrázku.*

a) Kolik těchto kontejnerů bude potřeba pro celé sídliště při frekvenci vyvážení jednou týdně? Obecní vyhláška stanoví objem vyváženého odpadu 30 *l na osobu a týden.*

b) Před uvedením do provozu se firma rozhodla své kontejnery zrenovovat. Firma zakoupí 2,6 *kilogramová balení barvy v ceně* 479,90 *Kč, u nichž výrobce udává spotřebu* 1 *kg na* 5 *až* 8 *m*^{2}. *Kolik bude stát nátěr všech kontejnerů? Uvažujte pouze vnější nátěr.*



Řešení: a) Při řešení této úlohy potřebujeme určit objem jednoho kontejneru a celkový objem odpadu, který připadá na 1 200 obyvatel sídliště. Kontejner má tvar osmibokého hranolu, jeho objem vypočítáme jako součin obsahu podstavy S_P a výšky hranolu. Podstava hranolu se skládá z obdélníku a dvou rovnoramenných lichoběžníků. K výpočtu obsahu rovnoramenného lichoběžníku potřebujeme znát jeho výšku v_L a délky obou základen z_1, z_2:

$$S_L = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot v_L$$

Obsah podstavy hranolu je

$$S_P = \left(\frac{2 + 0{,}75}{2} \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 + \frac{2 + 1{,}25}{2} \cdot 0{,}5 \right) \text{ m}^2 = 2{,}5 \text{ m}^2.$$

Výška hranolu je v = 3 m, objem jednoho kontejneru je tedy

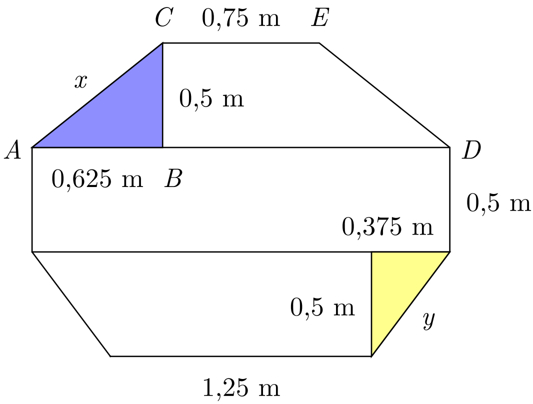
$$V = S_P \cdot v = (2{,}5 \cdot 3) \text{ m}^3 = 7{,}5 \text{ m}^3.$$

Je-li objem vyváženého odpadu na osobu a týden 30 l, pak na sídliště s 1 200 obyvateli připadá 1 200 · 30 l = 36 000 l = 36 m^3 odpadu. Celkový objem odpadu vydělíme objemem jednoho kontejneru:

$$36 \text{ m}^3 : 7{,}5 \text{ m}^3 = 4{,}8$$

Pro sídliště je zapotřebí celkem 5 kontejnerů.

b) Povrch jednoho kontejneru vypočítáme jako součet obsahů obou podstav a obsahu pláště. Pro výpočet obsahu pláště potřebujeme znát obvod podstavy hranolu. Známe velikosti všech hran, kromě hran o délkách x, y, vyznačených na následujícím obrázku. Jedná se o ramena rovnoramenných lichoběžníků, z nichž se skládá podstava.



Použitím Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC vypočítáme velikost x. Velikost úsečky BC se rovná výšce lichoběžníku, pro velikost úsečky AB platí

$$|AB| = \frac{|AD| - |CE|}{2} = \left(\frac{2 - 0{,}75}{2}\right) \text{ m} = 0{,}625 \text{ m}.$$

Odtud dostaneme:

$$x = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}625^2} \text{ m} \doteq 0{,}80 \text{ m}$$

Obdobně zjistíme hodnotu y:

$$y = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}375^2} \text{ m} \doteq 0{,}63 \text{ m}$$

Nyní již můžeme vypočítat obvod podstavy:

$$o \doteq (0{,}75 + 2 \cdot 0{,}80 + 2 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}63 + 1{,}25) \text{ m} = 5{,}86 \text{ m}$$

Obsah pláště hranolu S_{Pl} vypočítáme jako součin obvodu podstavy a výšky hranolu:

$$S_{Pl} = o \cdot v \doteq (5{,}86 \cdot 3)\ \mathrm{m}^2 = 17{,}58\ \mathrm{m}^2$$

Povrch hranolu vypočítáme jako součet obsahů obou podstav a obsahu pláště.

$$S = 2 \cdot S_P + S_{Pl} \doteq 2 \cdot 2,5\ \mathrm{m}^2 + 17{,}58\ \mathrm{m}^2 = 22{,}58\ \mathrm{m}^2.$$

Povrch pěti kontejnerů je

$$5 \cdot 22{,}58\ \mathrm{m}^2 = 112{,}9\ \mathrm{m}^2.$$

Vystačí-li kilogram barvy na 5 až 8 m^2, bude firma potřebovat

$$\frac{112{,}9}{8} \text{ až } \frac{112{,}9}{5}$$

kilogramů barvy, tj. 14,11 až 22,58 kilogramů. Pokud bude firma počítat s horší variantou (5 m^2), musí nakoupit 9 balení barvy po 2,6 kg.

Jedno balení stojí 479,90 Kč. Firma za nátěr všech kontejnerů pro nové sídliště zaplatí 4 319 Kč.

Závěr

Kromě planimetrických a stereometrických úloh, jejichž ukázky zde byly prezentovány, bude kapitola o geometrii obsahovat rovněž úlohy z trigonometrie. Některé úlohy z připravované sbírky, představené v předchozích článcích, jsou zveřejněny na webových stránkách Katedry didaktiky matematiky, MFF UK:

`www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/aplikace`

Literatura

[1] *Pavlíková P. – Robová J. – Slavík A.*: Fahrenheit, Celsius a americký cent, Matematika – Fyzika – Informatika, 20 (2011), str. 385-392.

[2] *Pavlíková P. – Robová J. – Slavík A.*: Úlohy s dopravní tematikou, Matematika – Fyzika – Informatika, 20 (2011), str. 454-461.