Niekoľko príkladov k iracionálnym číslam

ANDREA KANÁLIKOVÁ – JANA PÓCSOVÁ

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice – Fakulta BERG TU, Košice

V tomto článku podrobne popisujeme riešenia troch úloh, v ktorých vystupujú iracionálne čísla. Pojem iracionálne číslo vznikol prevažne pre potreby matematiky. Keďže nie je tak silne previazaný s mimomatematickou realitou, pokúsili sme sa zozbierať a vhodne upraviť niekoľko úloh, v riešení ktorých tieto čísla vystupujú a schopnosť s nimi pracovať je nevyhnutná pre ich samotné riešenie. Tieto úlohy zaradzujeme k nadstavbovým úlohám, ktoré sú vhodné predovšetkým na prácu s nadanými žiakmi, alebo v matematických krúžkoch. Určite nepatria k základným úlohám slúžiacim na precvičenie vlastností iracionálnych čísel, ale ich využite je možne aj na obohatenie štandardnej výučby k téme Iracionálne čísla.

Pohľad do kurikula

V priebehu základnej školy sa žiak postupne oboznamuje s oborom prirodzených a celých čísel. Pri obore racionálnych čísel sa vytvára väzba medzi pojmom zlomok a desatinné číslo. Taktiež v priebehu 8., resp. 9. ročníka základnej školy vzniká aj prvá intuitívna predstava o iracionálom čísle a to pri téme Pytagorova veta. K prehĺbeniu tejto predstavy dochádza až v 1. ročníku gymnázia, kde už je pojem iracionálneho čísla zadefinovaný korektne spolu s určením reprezentantov tohto číselného oboru.

Z algebraickej stránky je obsahom preberanej látky usporiadanie, porovnanie iracionálnych čísel a zaokrúhľovanie iracionálnych čísel. Tiež by sa mali v tomto období precvičovať aj úlohy obsahujúce výrazy s odmocninami, ale v novom Štátnom vzdelávacom programe pre gymnázia (podľa [1]), s názvom ISCED 3A (vyššie sekundárne vzdelávanie), už táto téma úplne absentuje. V priebehu 1. ročníka gymnázia sa pri dôkazoch spomína aj dôkaz, že $\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo. Tento dôkaz sa vyžaduje od žiakov na maturitných skúškach z matematiky.

Prvá geometrická predstava o iracionálnom čísle vzniká už počas základnej školy pri téme Pytagorova veta. Pri narysovaní pravouhlého trojuholníka s odvesnami dĺžky 1 je prepona dĺžky $\sqrt{2}$. Žiakom je predostretá predstava, že $\sqrt{2}$ je dĺžka nejakej úsečky, ktorá sa dá narysovať, ale toto číslo nevieme presne vyjadriť.

Neskôr, v prvom ročníku gymnázia, je obsahom preberanej latky úloha: „Nájdite obraz čísla $\sqrt{5}$ na číselnej osi.“ Pri jej riešení sa aplikujú Pytagorova veta a Euklidova veta o výške.

Podľa [2] nasledujúce úlohy môžu byť zaradnené do vyučovania v prvom ročníku gymnázia na upevnenie a prehĺbenie geometrickej predstavy o iracionálnom čísle.

- Znázornite na číselnej osi úsečky AB, BC, pričom body A, B, C sú obrazy reálnych čísel. Bod A je obrazom reálneho čísla $-3-2\sqrt{5}$, bod B je obrazom čísla $1-2\sqrt{3}$ a bod C je obrazom čísla $0,3+\sqrt{5}$.
- Zostrojte obdĺžnik $ABCD$, ak $|AB|=\sqrt{5}$, $|BD|=\sqrt{3}$.

V nasledujúcej časti článku uvádzame niekoľko úloh podporujúcich rozvoj algebraickej a tiež geometrickej predstavy o iracionálnom čísle spolu s popisom ich riešení.

Niekoľko úloh s využitím iracionálnych čísel

Prvá úloha (vybraná z [3]) poukazuje na to, ako možno pri nesprávnom počítaní s kalkulačkou získať chybný výsledok.

Príklad 1

Porovnajte čísla $\sqrt{990}+\sqrt{86}$ a $\sqrt{778}+\sqrt{165}$. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Riešenie. Pokiaľ si tieto čísla vyjadríme pomocou kalkulačky (s pomerne malým počtom desatinných miest, t.j. do 10), pravdepodobne vyhlásime obe súčty za rovnaké. Avšak s presnejšiou kalkulačkou by sme sa dopracovali k výsledku

$$\begin{aligned}\sqrt{990}+\sqrt{86} &= 40{,}737\,883\,940\,60\ldots,\\ \sqrt{778}+\sqrt{165} &= 40{,}737\,883\,940\,62\ldots\end{aligned}$$

Môžeme vidieť, že tieto dve iracionálne čísla nie sú rovnaké, pretože sa líšia ciframi na 11. desatinnom mieste. Obe čísla sa zhodujú na prvých 10 desatinných miestach. Ďalej ukážeme, že číslo $\sqrt{990}+\sqrt{86}$ je menšie ako číslo $\sqrt{778}+\sqrt{165}$, t.j. že platí

$$\sqrt{990}+\sqrt{86}<\sqrt{778}+\sqrt{165}.$$

Nerovnosť umocníme na druhú

$$990 + 2 \cdot \sqrt{990 \cdot 86} + 86 < 778 + 2\sqrt{778 \cdot 165} + 165$$

a postupne upravujeme ekvivalentne tak, aby sme odstránili odmocniny

$$\begin{aligned} 133 &< 2 \cdot (\sqrt{778 \cdot 165} - \sqrt{990 \cdot 86}) \\ 133^2 &< 4 \cdot (778 \cdot 165 - 2 \cdot \sqrt{778 \cdot 165 \cdot 990 \cdot 86} + 990 \cdot 86) \\ 8 \cdot \sqrt{778 \cdot 165 \cdot 990 \cdot 86} &< 4 \cdot (778 \cdot 165 + 990 \cdot 86) - 133^2 \\ 64 \cdot 778 \cdot 165 \cdot 990 \cdot 86 &< 836\,351^2 \\ 699\,482\,995\,200 &< 699\,482\,995\,201. \end{aligned}$$

Tým je dôkaz ukončený.

Námety na diskusiu:

- Podobne, porovnajte (čo do veľkosti) nasledujúce dve iracionálne čísla $\sqrt{944} + \sqrt{236}$, $\sqrt{531} + \sqrt{531}$. [1]
- S využitím tzv. surdických výrazov, ktorých bližšia charakteristika je uvedená tiež v [4], je možné riešiť nasledujúcu úlohu. Určte, ktoré z daných čísel je iracionálne: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ a $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Ďalšia z vybraných úloh (podľa [6]) využíva aplikáciu Pytagorovej vety v praxi. Učiteľ ju môže využiť jednak ako motivačnú úlohu pri tematickom celku Pytagorova veta, prípadne ako úlohu na precvičenie počítania s výrazmi obsahujúcimi odmocniny.

Príklad 2

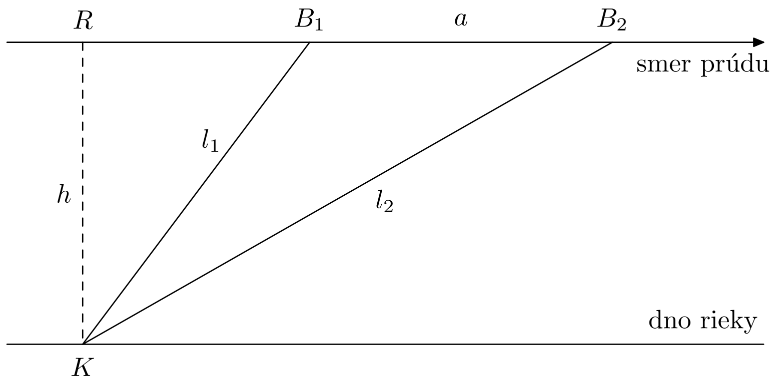
V roku 1966 dvaja vynálezci J. Šarikov a V. Zdanovič vymysleli spôsob, ako merať hĺbku dna v úsekoch rieky, ktorá je pre človeka nedostupná. Do vody sa hodí kotva, ku ktorej sú na dvoch lanách rôznej dĺžky (označme l_1 a l_2) priviazané dve bóje. Kotva s bójami sa vyhodí z lietadla na miesto rieky, kde je potrebné odmerať jej hĺbku. v momente, keď obe bóje vyplávajú na hladinu sa z lietadla urobia fotografické zábery na rieku. Odmeraním vzdialenosti medzi bójami z fotografií sa získa vzdialenosť medzi nimi

[1] Ron Graham zostavil dve iracionálne čísla (označme a, b), ktorých desatinný rozvoj sa zhoduje až na 40 desatinných miest (pozri [5]). Každé z týchto iracionálnych čísel tvorí súčet deviatich čísel pod odmocninou:

$$\begin{aligned} a = {} & \sqrt{1000001} + \sqrt{1000025} + \sqrt{1000031} + \sqrt{1000084} + \sqrt{1000087} + \sqrt{1000134} + \\ & + \sqrt{1000158} + \sqrt{1000182} + \sqrt{1000198}, \\ b = {} & \sqrt{1000002} + \sqrt{1000018} + \sqrt{1000042} + \sqrt{1000066} + \sqrt{1000113} + \sqrt{1000116} + \\ & + \sqrt{1000169} + \sqrt{1000175} + \sqrt{1000199}. \end{aligned}$$

(označme a) a z toho sa už dá vypočítať hĺbka rieky (označme h) v danom mieste. Pokúste sa odvodiť vzorec pre výpočet hĺbky dna rieky.

Riešenie. Situáciu môžeme zakresliť ako na obrázku 1.



Obr. 1 Náčrt situácie pri meraní hĺbky dna pomocou kotvy s bójami

Vzdialenosť bodov R a B_1 označme ako x. Všimnite si, že na obrázku sú dva pravouhlé trojuholníky: trojuholník KB_2R a trojuholník KB_1R. Pomocou Pytagorovej vety vypočítame hĺbku rieky h. Túto vetu použijeme na výpočet hĺbky h v trojuholníku KB_2R a tiež v trojuholníku KB_1R. Dostaneme nasledujúce dva vzorce

$$h = \sqrt{l_2^2 - (x+a)^2} = \sqrt{l_2^2 - (x^2 + 2xa + a^2)},$$
$$h = \sqrt{l_1^2 - x^2}.$$

Z druhého vzorca vyjadríme x

$$x^2 = l_1^2 - h^2,$$
$$x = \sqrt{l_1^2 - h^2}$$

a dosadíme do prvého vzťahu. Dostaneme

$$h = \sqrt{l_2^2 - \left(l_1^2 - h^2 + 2a\sqrt{l_1^2 - h^2} + a^2\right)}.$$

Pomocou ekvivalentných úprav vyjadríme vzťah pre výpočet hĺbky rieky h.

$$h^2 = l_2^2 - (l_1^2 - h^2 + 2a\sqrt{l_1^2 - h^2} + a^2),$$

t.j. po úpravách máme

$$h = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2 l_1^2 - (l_2^2 - l_1^2 - a^2)^2}\,.$$

Námety na diskusiu:

- Vynálezcovia však pôvodne na výpočet hĺbky rieky využili tzv. Herónov vzorec

  $$P_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

  Pokúste sa vyjadriť hĺbku rieky h s využitím práve tohto Herónovho vzorca.

Iracionálne čísla v úlohách Sangaku

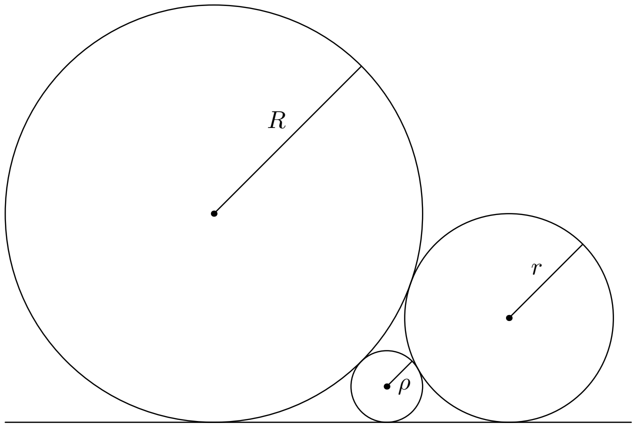
V rokoch 1603–1868 došlo k úplnej izolácií japonských ostrovov od okolitého sveta. V tom čase bolo v Japonsku publikovaných mnoho matematických spisov zapísaných na špeciálnych drevených doskách (SANGAKU). Tieto boli umiestnené na stenách blízko chrámoch ako obetné dary všetkých členov sociálnych tried. Na týchto nástenkách bol nakreslený obrázok, ktorý slúžil k implicitnému popisu planimetrickej úlohy s textom: „Pozri sa, ak vieš, dokáž to!“ (viď. [8])

Tieto úlohy sa líšia od tradičných európskych geometrických úloh, pretože v nich ide spravidla o vyšetrovanie zaujímavých metrických vzťahov v planimetrii, ktoré nie sú bežne známe z našich učebníc (pozri [7, 8, 9]).

Riešením jednej z úloh SANGAKU (podľa [7, 9, 10, 11]) sme sa inšpirovali a pokúsili sme sa k tomuto riešeniu sformulovať problém z mimomatematického prostredia.

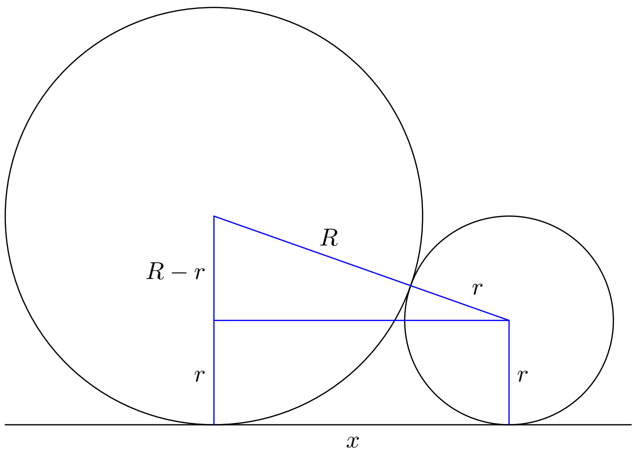
Príklad 3

Firma na výrobu tlačiarenských strojov potrebuje vyrobiť sústavu troch valcov rôznych polomerov podľa nákresu na obrázku 2. Dva väčšie valce s rôznymi polomermi sú už vyrobené. Vytvorte tretí najmenší valec, ktorý bude umiestnený medzi dvoma už vytvorenými väčšími valcami tak, aby sa ich dotýkal. Aký polomer musí mať najmenší valec?



Obr. 2 Schématický náčrt zadanej úlohy

Riešenie. Najskôr je potrebné vypočítať vzdialenosť x obrazu stredov dvoch väčších kružníc na spoločnej dotyčnici (obr. 3).



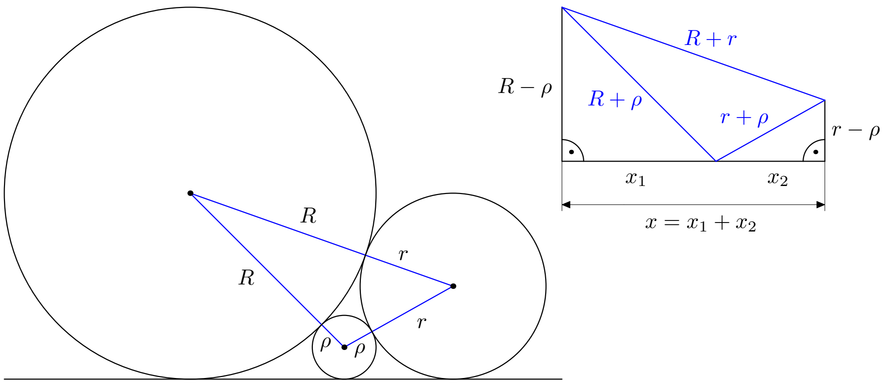
Obr. 3 Náčrt postupu výpočtu vzdialenosti x

Túto vzdialenosť vypočítame pomocou Pytagorovej vety

$$x^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2.$$

Odtiaľ $x^2 = 4Rr$, t.j. $x = 2\sqrt{Rr}$.

Ak spojíme stredy všetkých troch kružníc, dostaneme trojuholník (pozri obr. 4), ktorého strany majú dĺžky $R+\rho$, $r+\rho$ a $R+r$.



Obr. 4 Náčrt postupu výpočtu vzdialenosti x_1 a x_2

Dĺžky odvesien tohto trojuholníka je možné dopočítať z náčrtu. Dĺžky x_1 a x_2 vyjadríme pomocou Pytagorovej vety

$$x_1^2 = (R+\rho)^2 - (R-\rho)^2, \qquad x_1^2 = 4R\rho, \qquad x_1 = 2\sqrt{R\rho}.$$

Podobne

$$x_2 = 2\sqrt{r\rho}.$$

Podľa obr. 3 vieme, že platí $x_1 + x_2 = x$, čiže

$$2\sqrt{R\rho} + 2\sqrt{r\rho} = 2\sqrt{Rr}. \tag{1}$$

Odtiaľ dostávame hľadanú dĺžku najmenšej kružnice

$$\rho = \frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}.$$

Po zvolení konkrétnych hodnôt polomerov kružníc napr. $R = 30$ cm a $r = 10$ cm a po výslednom zaokrúhlení dostávame, že najmenší valec má polomer 0,4 cm.

Námety na diskusiu:

- Popremýšľajte, ako môže zaokrúhľovanie iracionálnych čísel v priebehu výpočtu ovplyvniť presnosť výsledku.

V prípade, ak k zaokrúhleniu iracionálnych čísel dôjde na začiatku riešenia úlohy, tak môžeme očakávať skreslenie celého výsledku nakumulovaním chyby. Pri úlohách z praxe, ktorých riešenie vyžaduje veľkú presnosť, je toto počiatočné zaorkrúhlenie veľmi neželané. Aj na tejto úlohe je možné poukázať na tento fakt.

- Nájdite polomery všetkých troch kružníc na obrázku tak, aby to boli racionálne čísla.

  K vyriešeniu stačí rovnosť (1) upraviť do tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Poďakovanie. Tento píspevok vznikol s podporou pojektov VEGA (VEGA 1/1331/12) a KEGA (040TUKE-4/2014).

Literatura

[1] Štátny pedagogický ústav. Štátny vzdelávací program: MATEMATIKA (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami), Príloha ISCED 3A. [online]. Štátny pedagogický ústav, Bratislava, 2009. [cit. 2011-06-20]. Dostupné na: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced3a.pdf.

[2] *Šidlová, Z.*: Iracionálne čísla na strednej škole. Diplomová práca. Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského, Bratislava, 1995.

[3] *Horváth, G. – Verhoeff, T.*: Numerical Difficulties in Pre-University Informatics Education and Competitions. Journal Informatics in education, roč. 2 (2003), č. 1, s. 21–38.

[4] *Beránek, J.*: Netradiční úlohy o reálných číslech. In: Sborník příspěvků z mezinárodní vědecké konference – Matematika v škole dnes a zajtra [CD-ROM]. Katolická Univerzita, Ružomberok, 2007.

[5] Graham's Problem [online]. [cit. 2014-05-15]. Dostupné na: http://www.cs.nyu.edu/exact/realexpr/Graham.html.

[6] *Beran, L. – Ondráčková, I.*: Prověřte si své matematické nadání. Polytechnická knižnice, Praha, 1988.

[7] *Fukagowa, H. – Rothman, T.*: Sacred Mathematics, Japanese Temple Geometry. Princeton University Press, 2008.

[8] *Švrček, J.*: Japonská planimetrie 18. a 19. století. MFI, roč. 4 (1995), č. 9, s. 385–391.

[9] *Švrček, J. – Leischner, P.*: Ke dvěma úlohám SANGAKU. MFI, roč. 5 (1996), č. 7, s. 340–344.

[10] SANGAKU's [online]. [cit. 2014-05-15]. Dostupné na: http://www.hhofstede.nl/sangakus/sangaku2.htm.

[11] Sangaku [online]. [cit. 2014-05-15]. Dostupné na: http://gery.huvent.pagesperso-orange.fr/html/sangaku.htm.