Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 2. 2015 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 209

Je dána úsečka AK s vnitřním bodem B a čtverce $ABCD$ a $BKLM$ v téže polorovině s hraniční přímkou AK. Dokažte, že se přímky AC, DL a KM protínají v jediném bodě.

Pavel Leischner

Úloha 210

Pro libovolná reálná čísla $p \neq -1$ a q dokažte: Rovnice

$$x^2 + px + q = 0$$

má v oboru reálných čísel dva (ne nutně různé) kořeny, z nichž jeden je číslo opačné k druhé mocnině druhého kořene, právě když platí

$$\bigl(p^2 - q\bigr)(p + q) = (p + 1)^2 q.$$

Jaromír Šimša

Dále uvádíme řešení úloh 205 a 206, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle letošního (23.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 205

Je dán pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D. Označme K, L, M po řadě středy jeho hran BC, CA, AB. Dokažte, že součet velikostí tří úhlů ve stěnách při vrcholu D čtyřstěnu $KLMD$ je 180°.

Jaroslav Švrček

Řešení. Trojúhelník BCD je pravoúhlý, střed K strany BC je středem (Thaletovy) kružnice jemu opsané, platí tedy

$$|DK| = |BK| = |CK| = \frac{1}{2}|BC|.$$

Úsečka ML je přitom střední příčkou trojúhelníku ABC. Z vlastností střední příčky dostaneme $|ML| = \frac{1}{2}|BC|$. Proto platí

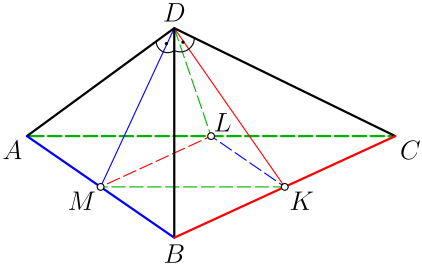
$$|DK| = \frac{1}{2}|BC| = |ML|. \tag{1}$$

Analogicky dostaneme

$$|DL| = \frac{1}{2}|CA| = |KM|, \tag{2}$$

$$|DM| = \frac{1}{2}|AB| = |KL|. \tag{3}$$

Z (1), (2), (3) plyne že trojúhelníky LKD, DML, MDK jsou podle věty *sss* shodné s příčkovým trojúhelníkem KLM (a tedy i navzájem shodné).



Součet velikostí tří úhlů ve stěnách při vrcholu D čtyřstěnu $KLMD$ je tak roven součtu velikostí tří vnitřních úhlů trojúhelníku KLM, a je proto $180°$, čímž je důkaz ukončen.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Markéta Calábková*, *Jan Gocník* a *Marian Poljak*, všichni z GJŠ v Přerově, *Ondřej Kincl* z GOP v Praze 5, *Lucien Šíma* z PORG v Praze 8, *Radovan Švarc* z G v České Třebové a *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně.

Úloha 206

Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna čísla $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$xf(x) = xf\left(\frac{x}{y}\right) + yf(y).$$

Pavel Calábek

Řešení. Nechť t je libovolné kladné reálné číslo. Substitucí $x = ty$ dostaneme

$$tyf(ty) = tyf(t) + yf(y). \tag{4}$$

Rovnice (4) tak platí pro libovolná kladná reálná čísla t a y. Záměnou proměnných[1] t a y dostaneme

$$ytf(yt) = ytf(y) + tf(t).$$

Tato rovnice má s rovnicí (4) stejný výraz na levé straně, proto se musí rovnat i výrazy na jejich pravých stranách a pro libovolná kladná reálná čísla y a t tak platí

$$tyf(t) + yf(y) = ytf(y) + tf(t).$$

Provedeme-li v této rovnici substituci $y = 2$ a označíme $a = 2f(2) \in \mathbb{R}$, dostaneme po úpravě

$$f(t) = 2f(2) \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right) = a\left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

Pro libovolné reálné číslo t tak platí $f(t) = a\left(1 - \frac{1}{t}\right)$, kde a je nějaké (pevně dané, v našem případě $2f(2)$) reálné číslo.

Nyní provedeme zkoušku. Pro libovolná kladná reálná čísla x a y je výraz na levé straně dané funkcionální rovnice roven

$$xf(x) = xa\left(1 - \frac{1}{x}\right) = ax - a,$$

zatímco výraz na pravé straně funkcionální rovnice je roven

$$xf\left(\frac{x}{y}\right) + yf(y) = xa\left(1 - \frac{1}{\frac{x}{y}}\right) + ya\left(1 - \frac{1}{y}\right) = (ax - ay) + (ay - a) = ax - a.$$

Vidíme tedy, že výrazy na pravé i levé straně zadané funkcionální rovnice jsou shodné pro libovolné reálné číslo a.

[1] Rovnice (4) platí pro libovolná kladná reálná čísla t a y, můžeme v ní dvojici proměnných (t, y) nahradit dvojicí proměnných (y, t), což je dvojice libovolných reálných čísel.

Daná funkcionální rovnice má nekonečně mnoho řešení. Jsou jimi funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f(x) = a\left(1 - \frac{1}{x}\right),$$

kde a je libovolné reálné číslo.

Jiné řešení podle M. Raszyka. Nechť t je libovolné kladné reálné číslo. Substitucí $x = 2t$, $y = t$ v zadané funkcionální rovnici dostaneme

$$2tf(2t) = 2tf(2) + tf(t),$$

zatímco substitucí $x = 2t$, $y = 2$ dostaneme

$$2tf(2t) = 2tf(t) + 2f(2).$$

Levé strany předcházejících výrazů jsou shodné, musí proto být shodné i jejich pravé strany

$$2tf(2) + tf(t) = 2tf(t) + 2f(2).$$

Označíme $a = 2f(2)$ a úpravou předcházející výrazu obdržíme

$$f(t) = a\left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

Zkouškou pak ověříme, že každá taková funkce je pro libovolné reálné číslo a řešením zadané funkcionální rovnice.

Správná řešení zaslali: *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Jan Gocník* a *Marian Poljak*, oba z GJŠ v Přerově, *Ondřej Kincl* z G O. Pavla v Praze 5, *Radovan Švarc* z G v České Třebové a *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně.

Cestou do redakce našeho časopisu se zatoulala správná řešení úloh **201** a **202** *Martina Raszyka* z ETH Zürich, čímž se mu omlouváme a zařazujeme ho mezi úspěšné řešitele těchto úloh.

Pavel Calábek