

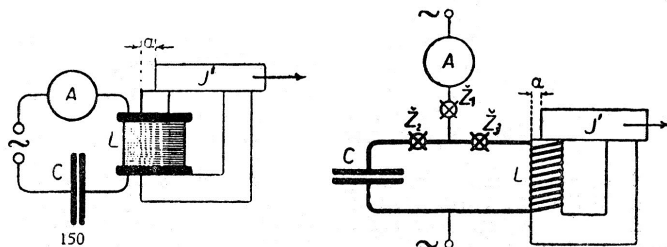
## Rezonance v učivu o střídavých proudech

OLDŘICH LEPIL – FRANTIŠEK LÁTAL

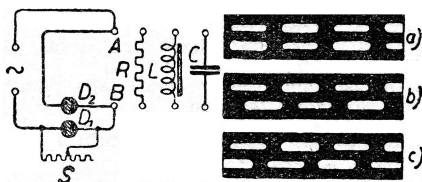
Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Jev rezonance patří k důležitým poznatkům učiva středoškolské fyziky, což je dáno nejen jeho významem ve fyzice od mechaniky až po kvantovou a částicovou fyziku, ale i v řadě technických oborů. Žák se s pojmem rezonance setká poprvé v učivu mechaniky v souvislosti s kmitáním pružinového oscilátoru nebo kyvadla. Zdálo by se, že demonstrace rezonance je v tomto případě jednoduchou záležitostí a tradičně se demonstruje soustavou spřažených kyvadel. Avšak demonstrovat rezonanci mechanického oscilátoru např. pokusem, který je v učebnici [1, čl. 1.9 (obr. 1–28)], už tak snadné není (viz [2]).

Znovu se žáci setkají s pojmem rezonance v učivu o střídavých proudech. Toto učivo se v osnovách středoškolské fyziky objevuje poprvé v roce 1933 a je zaměřeno jednak na uplatnění střídavých proudů v energetice a při výkladu elektrických kmitů ve vztahu k základům radiotechniky. Velmi důkladně je zpracován výklad tohoto učiva v první poválečné učebnici fyziky pro gymnázia [3], kde je podrobně probrán složený obvod střídavého proudu s  $RLC$  v sérii, včetně kvalitativního experimentu, kterým se demonstrovala rezonance nucených kmitů v oscilačním obvodu (obr. 1). Další možnosti demonstrace jevů v obvodech střídavého proudu však byly omezené vzhledem k tomu, že k dispozici byl jen zdroj střídavého napětí o konstantní frekvenci elektrické sítě (50 Hz). Fázové posuny střídavého proudu a napětí bylo možné demonstrovat jen kvalitativně subjektivním pozorováním obrazu doutnavek pomocí rotujících zrcadel (obr. 2). Pokus je popsán např. v [4, s. 237].



Obr. 1



Obr. 2

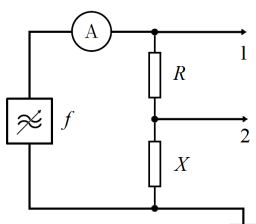
Současné pojetí učiva o střídavých proudech je odlišné a děje v elektrických obvodech s obvodovými prvky  $R$ ,  $L$ ,  $C$  chápeme spíše jako nucené kmitání, jehož zdrojem je spojitě se měnící (analogové) napětí, popř. proud. Při výkladu se zabýváme jen obvody s lineárními součástkami, jejichž voltampérová charakteristika, tzn. závislost  $I = f(U)$ , je přímka. To znamená, že amplituda střídavého proudu  $I_m$  je přímo úměrná amplitudě  $U_m$  střídavého napětí. Jednotlivé součástky, popř. jejich kombinace jsou do obvodu připojeny dvojicí svorek a celek tvoří tzv. lineární jednobran. Velmi dobře zpracovanou teorii dějů v těchto obvodech na středoškolské úrovni najde zájemce ve studijním textu [5] a výklad věnovaný *rezonančním jednobranům* je i teoretickým východiskem další části tohoto příspěvku.

Názorné prezentace dějů v rezonančních jednobranech, které dále uvedeme, jsou založeny na třech, navzájem se doplňujících možnostech, které nám poskytují současné prostředky ICT:

1. Počítačem podporovaný experiment s využitím systému Vernier.
2. Modelování dějů v rezonančních jednobranech pomocí programu Modellus 4.01.
3. Simulace dějů v rezonančních jednobranech programem NL5 Circuit Simulator.

Základním rezonančním jednobranem v učivu elektřiny je obvod s  $RLC$  v sérii. Proto se zaměříme především na demonstraci rezonance v tomto ob-

vodu. Vycházíme ze základního zapojení (obr. 3), kde reaktance  $X$  je tvořena sériovým spojením kondenzátoru a cívky. Obvod je připojen ke zdroji harmonického střídavého napětí a rezonance můžeme dosáhnout dvojím způsobem. První způsob představuje použití zdroje harmonického napětí s měnitelnou frekvencí. Tak postupujeme např. v případě, že chceme měřit frekvenční charakteristiku obvodu, tzn. jeho rezonanční křivku. Postupně zvětšujeme frekvenci střídavého napětí a pro každou frekvenci určíme napětí na reaktanci (výstup 2), popř. na celém obvodu (výstup 1). Tento postup je vhodný např. pro laboratorní cvičení (viz laboratorní cvičení 9 v učebnici [6]).

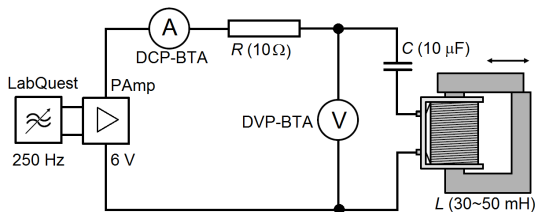


Obr. 3

Jako demonstrační experiment je vhodnější postup, kdy volíme konstantní frekvenci střídavého napětí blízkou rezonanční frekvenci obvodu a sledujeme děje při malých změnách parametrů rezonančního jednobranu. Osvědčil se postup použitý již při původním uspořádání experimentu (obr. 1), tzn. změna indukčnosti cívky nasunuté na U jádro, jehož magnetický obvod je uzavřen pohyblivým krátkým jádrem. Při demonstraci měníme polohu krátkého jádra a sledujeme fázový posun napětí a proudu v obvodu v případech, kdy  $X_L < X_C$ ,  $X_L = X_C$  a  $X_L > X_C$ .

### Demonstrace obvodu systémem Vernier

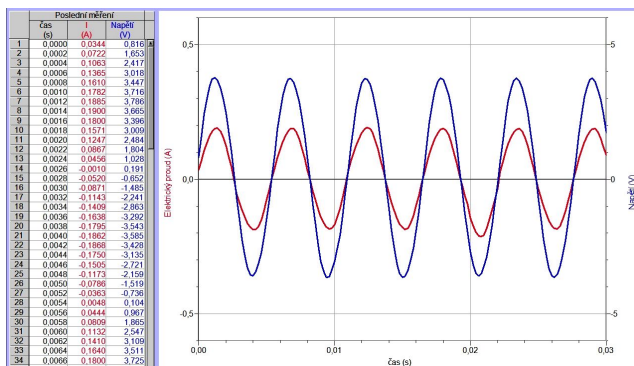
Uspořádání demonstrace fázových posunů v rezonančním jednobranu je na obr. 4.



Obr. 4

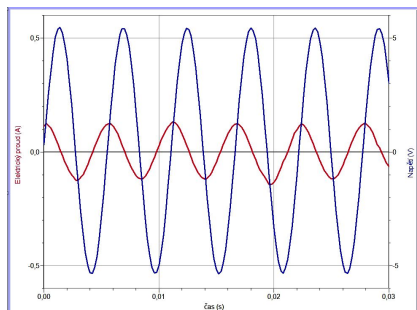
Zdrojem harmonického střídavého napětí je přenosný datalogger LabQuest Vernier a napětí je zesíláno zesilovačem Power Amplifier Vernier. Hodnoty použitých obvodových prvků jsou:  $R = 10 \Omega$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$  a indukčnost obvodu představuje cívka z rozkladného transformátoru s 300 závitů na uzavřeném jádře. Pohybem krátkého jádra lze dosáhnout změn indukčnosti v intervalu přibližně 30 mH až 50 mH. Voltmetr DVP-BTA a ampérmetr DCP-BTA je připojen přes rozhraní Vernier LabQuest Mini k počítači.

Frekvence zdroje střídavého napětí je volena tak, aby rezonance bylo dosaženo při částečně otevřeném jádře cívky. V našem případě to byla frekvence 180 Hz. Při rezonanci ( $X_L = X_C$ ) je impedance obvodu nejmenší a proud procházející obvodem je největší (když je krátké jádro volně položené, vznikají dobře slyšitelné vibrace jádra o dvojnásobné frekvenci). Zobrazením časového diagramu napětí a proudu ukážeme, že při rezonanci se obvod  $RLC$  chová jako rezistance, takže napětí a proud mají stejnou fázi (obr. 5).

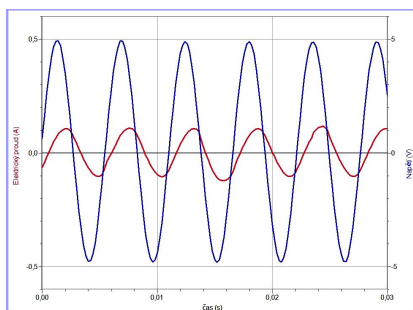


Obr. 5

Při dalším experimentu zmenšíme indukčnost cívky posunutím krátkého jádra, čímž dosáhneme, že  $X_L < X_C$ . Obvod má vlastnosti kapacitance a to se projeví záporným fázovým rozdílem proudu  $i$  vzhledem k napětí  $u$  (proud předbíhá napětí, obr. 6). Když naopak jádro více uzavřeme, je  $X_L > X_C$  a fázový rozdíl je kladný (proud se za napětím zpožďuje, obr. 7). Je samozřejmé, že v tomto uspořádání experimentu nedosáhne fázový rozdíl napětí a proudu hodnot  $\pm\pi/2$ . Rozdíl je vždy menší v závislosti na velikosti odporu  $R$  rezistoru. Přesněji to ukážeme pomocí počítačového modelu nebo simulací dějů v obvodu.



Obr. 6



Obr. 7

## Modelování dějů v rezonančním jednobranu programem Modellus 4.01

Program Modellus 4.01 [7] umožňuje modelování dějů popsaných obvykle pomocí diferenciálních rovnic, jejichž řešením jsou získány závislosti jednotlivých fyzikálních veličin jako funkce času. Z didaktického hlediska je významná tato metoda modelování dějů tím, že model je s použitím rovnic popisujících děj vytvářen přímo uživatelem. Tím se toto tzv. *dynamické modelování* [8] liší od simulace, kdy k vytvoření modelu postačuje jen stanovení parametrů zkoumaného objektu a volba počátečních podmínek. Samotný matematický model je v tomto případě uživateli nedostupný. Na druhé straně je však možné simulace využít při vytváření složitějších systémů, jejichž matematický popis by byl zdlouhavý a náročný. Příkladem může být simulace dějů v obvodu s *nelineárním jednobranem*, např. obvodu usměrňovače s polovodičovou diodou.

Model dějů v obvodu s  $RLC$  v sérii řešíme jako nucené kmitání, při němž je obvod v počátečním okamžiku připojen ke zdroji harmonického napětí o stálé amplitudě  $U_m$  a úhlové frekvenci  $\omega$ . Pro nucené kmitání elektromagnetického oscilátoru platí 2. Kirchhoffův zákon ve tvaru

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = U_m \sin \omega t. \quad (1)$$

V programu Modellus 4.01 můžeme model vytvořit dvojím způsobem. V prvním, jednodušším případě vycházíme ze známého řešení rovnice (1). Vyjádříme indukanci  $X_L$  a kapacitanci  $X_C$  obvodu a pomocí vztahu pro impedanci určíme hodnotu amplitudy  $I_m$  proudu v obvodu (amplituda napětí  $U_m$  je definována jako vstupní parametr modelu). Vypočítáme fázový

posun  $\varphi$  (v modelu  $f_i$  v radiánech a  $f_{is}$  ve stupních; pro úhlovou frekvenci je použita značka  $w$ ). Program ve zvolených časových krocích počítá okamžité hodnoty napětí  $u$  a proudu  $i$  a zobrazuje je graficky. Model je na obr. 8 (proveden je i výpočet okamžitého výkonu  $p = ui$ ).

Poněkud složitější je model vytvořený metodou dynamického modelování. V tomto případě je východiskem rovnice (1), z níž určíme přírůstek náboje a proudu v posloupnosti časových kroků  $\Delta t$ . Tento model (obr. 9) má ve srovnání s předcházejícím modelem jednu významnou odlišnost. Zobrazuje v podstatě průběh přechodného děje, který nastane, když je obvod v počátečním okamžiku připojen ke zdroji střídavého napětí. V okamžiku připojení dochází v obvodu k superpozici dvou kmitání – vlastního kmitání obvodu a nuceného kmitání. V závislosti na hodnotě rezistance obvodu se vlastní kmitání rychle utlumí a obvod kmitá jen s frekvencí nuceného kmitání.

$$\begin{aligned}
 w &= 2 \times \pi \times f \\
 XL &= w \times L \\
 XC &= \frac{1}{w \times C} \\
 \varphi &= \arctan\left(\frac{XL - XC}{R}\right) \\
 \varphi_s &= \frac{180}{\pi} \times \varphi \\
 Im &= \frac{Um}{\sqrt{(R^2 + (XL - XC)^2)}} \\
 u &= Um \times \sin(w \times t + \varphi) \\
 i &= Im \times \sin(w \times t) \\
 p &= u \times i
 \end{aligned}$$

Obr. 8

$$\begin{aligned}
 w &= 2 \times \pi \times f \\
 u &= Um \times \sin(w \times t) \\
 q &= \text{last}(q) + i \times \Delta t \\
 uC &= \frac{q}{C} \\
 uR &= R \times i \\
 uL &= u - uR - uC \\
 i &= \text{last}(i) + \left(\frac{uL}{L}\right) \times \Delta t \\
 \varphi &= \arctan\left(\frac{w \times L - \frac{1}{w \times C}}{R}\right) \\
 \varphi_s &= \frac{180}{\pi} \times \varphi
 \end{aligned}$$

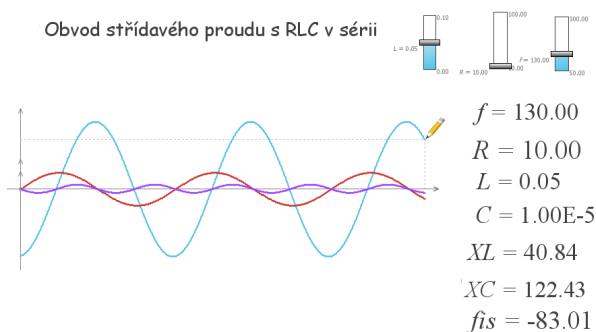
Obr. 9

Při výkladu dějů v obvodu zobrazujeme obdobně jako při reálném experimentu fázový posun křivek napětí a proudu. Model realizujeme tak, abychom mohli měnit hodnotu frekvence střídavého proudu, indukčnosti a rezistance. Všechny potřebné veličiny jsou zobrazeny na pracovní ploše, takže změnou frekvence nastavíme model postupně na hodnoty  $f < f_{rez}$ ,  $f = f_{rez}$  a  $f > f_{rez}$ . Podle nastavení indukčnosti pak získáme shodné časové diagramy, jako při reálném experimentu. Na obr. 10 je zobrazen

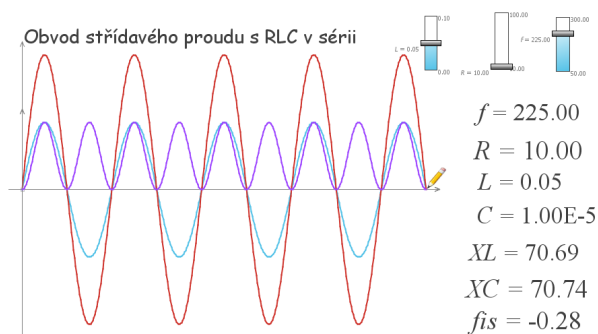
časový diagram kmitání obvodu při  $f < f_{\text{rez}}$  (fialová křivka zobrazuje okamžitou hodnotu výkonu střídavého proudu),  $X_L < X_C$  a proud (červená křivka) předbíhá napětí. Na obr. 11 je případ rezonance ( $X_L = X_C$ ), proud i napětí mají stejnou fázi, okamžitý činný výkon má v průběhu periody kmitů jen kladné hodnoty a dosahuje tedy maxima. Z časového diagramu je přímo patrné, že průměrný výkon  $\bar{P}$  za periodu střídavého napětí

$$\bar{P} = \frac{1}{2}P_m = \frac{1}{2}U_m I_m = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}},$$

kde  $P_m$  je amplituda výkonu a  $U_{\text{ef}}$  a  $I_{\text{ef}}$  jsou efektivní hodnoty střídavého napětí a proudu. Naopak z časových diagramů na obr. 10 a 12 je patrné, že průměrná hodnota výkonu za periodu je přibližně nulová a nulový je tedy také činný výkon.

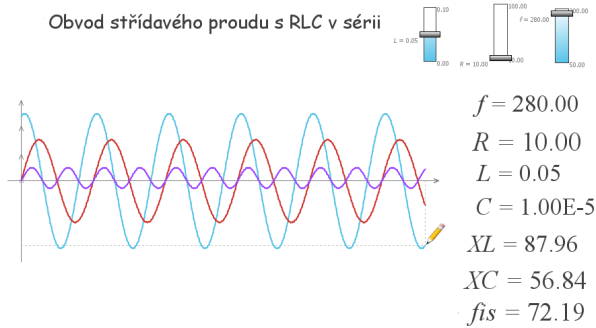


Obr. 10



Obr. 11

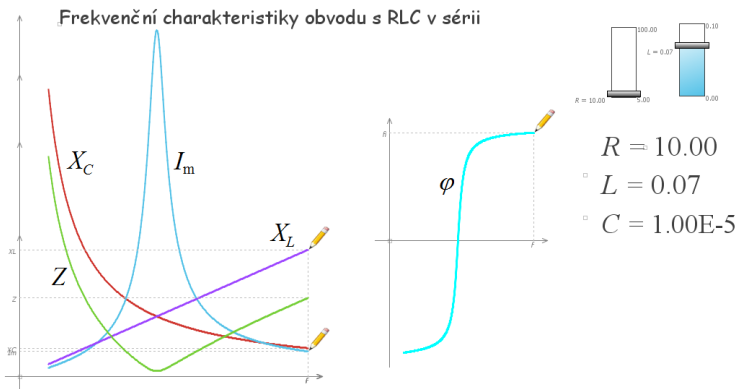
Obvod střídavého proudu s RLC v sérii



Obr. 12

Na obr. 12 je případ  $X_L > X_C$ . Fázový rozdíl je kladný, a tedy proud se za napětím zpožďuje.

K lepšímu pochopení dějů v obvodech střídavého proudu přispívá frekvenční charakteristika a fázová charakteristika obvodu ( $\varphi = f(f)$ ). Na obr. 13 je frekvenční charakteristika indukčnosti a kapacitance obvodu a současně jsou zobrazeny frekvenční závislosti impedance  $Z$  obvodu a amplitudy  $I_m$  proudu v obvodu, tedy rezonanční křivky obvodu s  $RLC$  v sérii. Je zřejmé, že při rezonanci je proud v obvodu největší, naopak impedance obvodu je nejmenší a je rovna rezistanci obvodu.



Obr. 13

Fázový posun se vyjadřuje jako úhel měřený od fázoru proudu směrem k fázoru napětí v matematicky kladném směru. To znamená, že při nižší frekvenci je  $X_L < X_C$  ( $U_L < U_C$ ), fázový rozdíl je záporný a proud před-



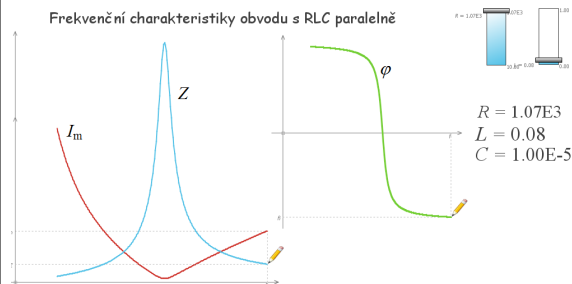
bíhá napětí. Obvod má vlastnosti kapacitance. Naopak při vyšší frekvenci je  $X_L > X_C$  ( $U_L > U_C$ ), fázový rozdíl je kladný a proud se za napětím zpožďuje. Obvod má vlastnosti induktance.

Při rezonanci je  $\varphi = 0$  a v okolí rezonanční frekvence se fázový rozdíl  $\varphi$  velmi rychle mění v závislosti na rezistanci obvodu. V případě, že by  $R \rightarrow 0$ , fázový rozdíl by se při rezonanci měnil skokem z hodnoty  $-\pi/2$  na  $+\pi/2$ . Takový případ ovšem v reálném obvodu nenastane (amplituda proudu by rostla neomezeně, tzn.  $I_m \rightarrow \infty$ ), poněvadž jak cívka, tak kondenzátor mají vždy určitý odpor.

Z popsaného modelu obvodu s  $RLC$  v sérii snadno odvodíme další případ rezonančního jednobranu, kterým je obvod s  $RLC$  paralelně. Model pro obvod s  $RLC$  paralelně je na obr. 14 a jeho frekvenční charakteristiky jsou na obr. 15.

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \times \pi \times f \\ X_L &= \omega \times L \\ X_C &= \frac{1}{\omega \times C} \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{X_L}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2}} \\ \varphi &= \arctan\left(R \times \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)\right) \\ f_{is} &= \frac{180}{\pi} \times \varphi \\ I_m &= \frac{U_m}{Z} \end{aligned}$$

Obr. 14



Obr. 15

## Simulace dějů v obvodech střídavého proudu programem NL5 Circuit Simulator

Pro simulaci dějů v obvodech střídavého proudu existuje několik programů dostupných na webu. Pro naše účely se velmi dobře hodí program *NL5 Circuit Simulator* [9], který si můžeme stáhnout jako demoverzi, v níž lze prakticky využívat všechny funkce potřebné pro středoškolskou výuku, a umožňuje také archivaci vytvořených modelů. Na stejných stránkách jako program NL5 můžeme získat obdobně koncipovaný program *Ideal Z* pro výpočet impedance a fázového posunu v obvodu, jehož schéma vytvoříme na pracovní ploše, a jednodušší simulační program *Ideal Circuit*.

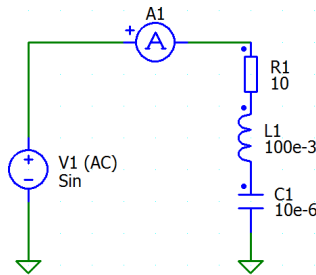
Pro simulaci dějů v rezonančních jednobranách programem NL5 použijeme navzájem propojené složky programu: Schéma (*Schematic*), Pře-

chodný děj (*Transient*) a Frekvenční charakteristika (AC). Modelování spočívá ve vytvoření schématu zkoumaného obvodu v okně Schematic, v němž se definují parametry jak zdroje napětí, tak jednotlivých obvodových prvků. V okně Transient se vymezí časový interval, v němž bude zobrazen průběh přechodného děje, a je proveden výběr zobrazovaných veličin. V okně AC lze zobrazit frekvenční charakteristiku vybrané veličiny (např. impedance  $Z$ ) a fázovou charakteristiku. Pro zobrazení charakteristik je nutné, aby v menu zdroje napětí byla vyznačena položka AC. V tomto nastavení se frekvence zdroje napětí ve zvoleném intervalu plynule zvětšuje. Frekvenční charakteristiky se zobrazují jako grafy s lineární nebo logaritmickou stupnicí na osách. Svislá osa fázové charakteristiky je lineární a úhly se vyjadřují ve stupních.

Při vytváření simulačního modelu můžeme volit různé režimy zdroje napětí. Může to být buď skoková změna vstupního napětí (označení *step*, popř. *pulse*, což představuje zdroj kmitů s obdélníkovým průběhem), nebo střídavé napětí s harmonickým průběhem (označení *sin*). V tomto případě volíme amplitudu a periodou, popř. počáteční fázi. Toto nastavení použijeme pro simulaci dějů v obvodu s  $RLC$  v sérii.

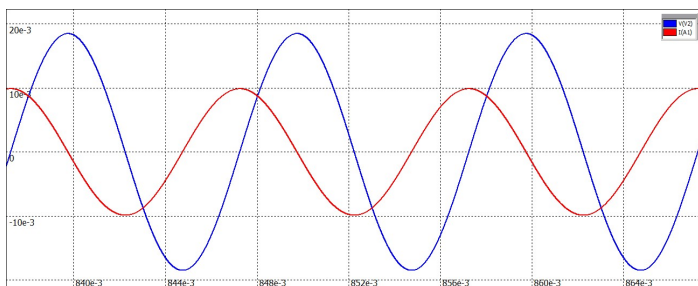
Na obr. 16 je schéma obvodu s  $RLC$  v sérii vytvořené v okně Schematic.

Obvod střídavého proudu s  $RLC$  v sérii -  $f_{rez} > f_{zdroje}$

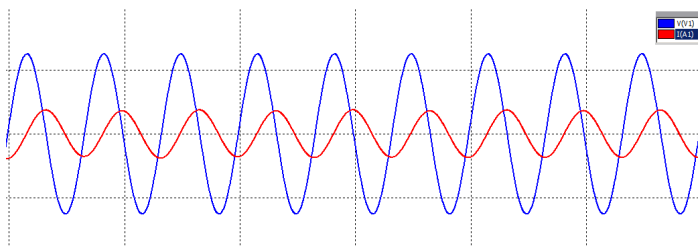


Obr. 16

Vzhledem ke zvoleným hodnotám  $L$  a  $C$  má obvod rezonanční frekvenci  $f_{rez} = 159 \text{ Hz}$  ( $T = 6,28 \cdot 10^{-3}$ ). V menu zdroje napětí je zvoleno sinusové napětí s amplitudou 10 V a s frekvencí 100 Hz (nastavuje se perioda  $T = 0,01 \text{ s}$ ). To znamená, že v tomto případě je  $X_L < X_C$ , fáze napětí, popř. impedance vzhledem k proudu v obvodu je záporná ( $\varphi \rightarrow -\pi/2$ ) a proud předbíhá napětí (obr. 17). Naopak při frekvenci 300 Hz je  $X_L > X_C$  a proud se za napětím zpožďuje (obr. 18).

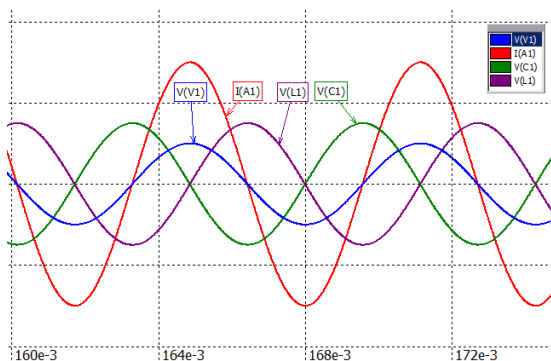


Obr. 17



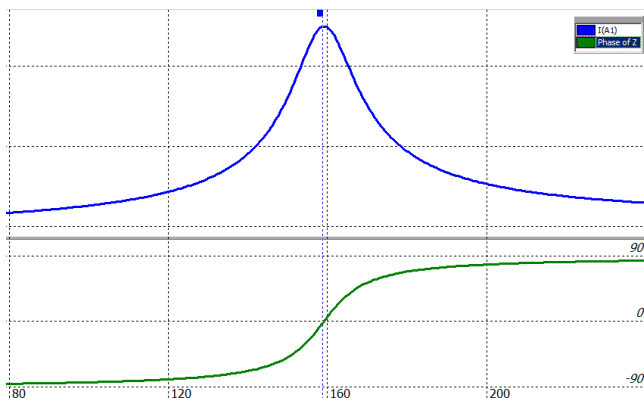
Obr. 18

Případ rezonance je na obr. 19. Zobrazeny jsou také časové diagramy napětí na cívce a na kondenzátoru ( $V(L1)$  a  $V(C1)$ ). Je patrné, že tato napětí mají opačnou fázi, proud ( $I(A1)$ ) má stejnou fázi jako napětí zdroje ( $V(V1)$ ) a jeho amplituda dosahuje maxima.



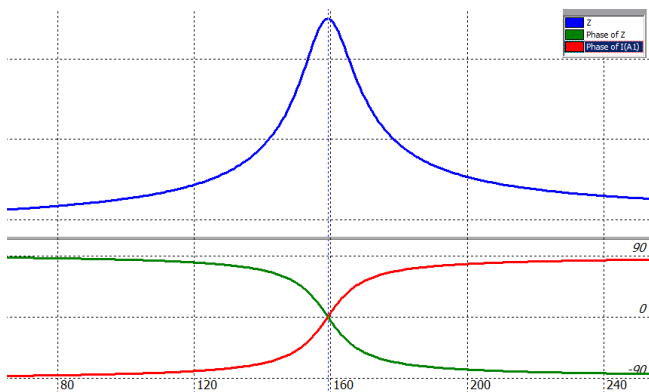
Obr. 19

V okně AC se zobrazí frekvenční charakteristika amplitudy proudu v obvodu, která představuje rezonanční křivku (horní část obr. 20), a fázová charakteristika obvodu (dolní část). Z ní je patrné, že při nižších frekvencích, než je rezonanční frekvence, je fázový rozdíl proudu a napětí záporný, v blízkosti rezonanční frekvence narůstá a při vyšších frekvencích je kladný. Změnou rezistance obvodu můžeme ověřit, v jakém intervalu se v okolí rezonanční frekvence mění fáze.



Obr. 20

Pro srovnání ještě uvedeme frekvenční charakteristiky obvodu s  $RLC$  paralelně (obr. 21). Rezonanční křivka v tomto případě vyjadřuje závislost impedance  $Z$  obvodu na frekvenci střídavého napětí. V dolní části obr. 21 je fázová charakteristika impedance (zelená křivka), která představuje rozdíl fází napětí  $\varphi_U$  a proudu  $\varphi_I$  ( $\varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I$ ). Fázová charakteristika proudu je na obr. 21 vyznačena červenou křivkou. Poněvadž napětí je na všech obvodových prvcích paralelního obvodu  $RLC$  stejné, můžeme položit  $\varphi_U = 0$ . Při nízkých frekvencích je fáze impedance  $\varphi_Z$  kladná a fáze proudu  $\varphi_I$  je záporná ( $I_L < I_C$ ), čili při kladné fázi impedance se proud za napětím opožďuje a naopak. U sériového obvodu  $RLC$  je tomu obráceně. V tomto případě prochází všemi obvodovými prvky stejný proud a jeho fázi položíme  $\varphi_I = 0$ . Fáze impedance  $\varphi_Z$  je v tomto případě dána přímo fází napětí  $\varphi_U$ . Při nízké frekvenci je  $U_L < U_C$ ,  $\varphi_Z$  má zápornou hodnotu a proud předbíhá celkové napětí na obvodu (viz obr. 17). Při vyšších frekvencích ( $f > f_{\text{rez}}$ ) je tomu naopak (viz např. fázorové diagramy v Přehledu obvodů střídavého proudu v učebnici [6, s. 183]).



Obr. 21

Simulační program NL5 Circuit Simulator využijeme nejen při výkladu dějů v rezonančních jednobraních, ale i v dalších obvodech. Příkladem může být modelování přechodných dějů v obvodech s  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , kdy použijeme skokovou změnu vstupního napětí. Program je vhodný k simulaci dějů v obvodech s nelineárními obvodovými prvky (např. v obvodech s polovodičovou diodou), u nichž by bylo obtížné vytvořit jednoduchý matematický model. Ale tyto a další možnosti vytváření simulačních modelů si každý najde snadno sám, když trochu pronikne do nabídky menu programu.

## Literatura

- [1] Lepil, O.: Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění. 4. vyd., Prometheus, Praha, 2009.
- [2] <http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/06-11-Lepil.html>
- [3] Bělař, A. a kol.: Fyzika pro čtvrtou třídu gymnasií. SPN, Praha, 1951.
- [4] Svoboda, E. a kol.: Pokusy z fyziky na střední škole 3. Prometheus, Praha, 1999.
- [5] Šedivý, P.: Obvody střídavého proudu s lineárními jednobranými a dvojbými. Gaudemus, MAFY, Hradec Králové, 1992. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/stpr1.pdf>
- [6] Lepil, O. – Šedivý, P.: Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus. 5. vyd., Prometheus, Praha, 2009.
- [7] <http://modellus.fct.unl.pt/>
- [8] Lepil, O. – Richterek, L.: Dynamické modelování. Repronis, Ostrava, 2007.
- [9] <http://nl5.sidelinesoft.com/>