MATEMATIKA

O paradoxech spojených s losováním koulí

PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Ekonomická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków

Matematika popisuje a zkoumá různé situace reálného světa. Je přirozené, že někdy řešíme případ, který se bez hlubšího rozboru jeví jako paradoxní. Speciálně teorie pravděpodobnosti je na paradoxy velmi bohatá. To svědčí o tom, že naše stochastické intuice nejsou vždy utvářené správně. Jedním takovým paradoxem se zabývá i tento článek.

Začneme jednoduchým příkladem.

Příklad 1

V pytlíku je b bílých a c černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vylosovaná koule bude černá? Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vylosovaná koule ve druhém tahu bude černá, pokud první vylosovanou kouli vrátíme zpět do pytlíku?

Snadno si rozmyslíme, že obě otázky řeší stejnou situaci, a tedy je zřejmé, že v obou případech je hledaná pravděpodobnost rovna $c/(c+b)$.

Nyní situaci změníme.

Příklad 2

V pytlíku je b bílých a c černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vylosovaná koule ve druhém tahu bude černá, pokud první vylosovanou kouli nevrátíme zpět do pytlíku?

V tomto případě vidíme, že stav koulí v pytlíku před druhým losováním závisí na výsledku prvního tahu. Jiná situace nastane, pokud v prvním tahu vylosujeme bílou kouli, a jiná, pokud je v prvním tahu tažena koule černá. Obvykle se takových případech zavádí pojem „podmíněná pravděpodobnost" a k řešení příkladu 2 se užije věty o celkové pravděpodobnosti (viz [1, str. 193]). Tímto postupem dostaneme následující řešení:

První řešení. Označme

- $P(C_n)$ ... pravděpodobnost vylosování černé koule v n-tém tahu ($n \in \mathbb{N}$),
- $P(B_1)$ ... pravděpodobnost vylosování bílé koule v 1. tahu,
- $P(C_2|B_1)$ ... pravděpodobnost vylosování černé koule v 2. tahu, bude-li v prvním tahu vylosována bílá koule,
- $P(C_2|C_1)$ ... pravděpodobnost vylosování černé koule v 2. tahu, bude-li v prvním tahu byla vylosována černá koule.

Pak dle věty o celkové pravděpodobnosti dostaneme rovnost

$$P(C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2|C_1) + P(B_1) \cdot P(C_2|B_1).$$

Víme, že

$$P(C_1) = \frac{c}{c+b}, \qquad P(B_1) = \frac{b}{c+b}.$$

Podobně vypočítáme, že

$$P(C_2|C_1) = \frac{c-1}{c-1+b}, \qquad P(C_2|B_1) = \frac{c}{c+b-1}.$$

Po dosazení dostaneme

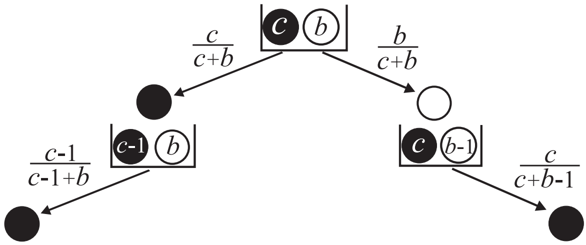
$$P(C_2) = \frac{c}{c+b} \cdot \frac{c-1}{c-1+b} + \frac{b}{c+b} \cdot \frac{c}{c+b-1} = \frac{c}{c+b}.$$

Uvedený výsledek ukazuje, že pravděpodobnost vylosování černé koule ve druhém tahu nezáleží na tom, zdali kouli vylosovanou v prvním tahu vrátíme do pytlíku či nikoli, a je též rovna pravděpodobnosti vylosování černé koule v prvním tahu. Tato skutečnost se zdá paradoxní.

Užití podmíněné pravděpodobnosti znamená, že takové úlohy bychom mohli řešit až se studenty vyšších ročníků střední školy. Další nevýhodou takovéhoto „formalizovaného" řešení je jeho malá názornost.

Zvolíme-li jiný přístup s užitím tzv. stochastického stromu (podrobně je tato technika popsána např. v [1]), můžeme se pojmu podmíněné pravděpodobnosti vyhnout, jak ukazuje následující řešení:

Druhé řešení. Náhodný pokus se skládá ze dvou tahů (etap). Na obr. 1 je stochastický strom takového pokusu, čísla přiřazená jednotlivým větvím stromu představují odpovídající pravděpodobnosti.



Obr. 1

Při použití stochastického stromu vidíme, že vylosovat černou kouli ve druhém tahu můžeme dvěma různými způsoby (strom má dvě větve). Podle kombinatorického pravidla součtu (viz např. [2]) je výsledná pravděpodobnost rovna součtu pravděpodobností jednotlivých větví. Podle kombinatorického pravidla součinu (viz např. [2]) je pravděpodobnost každé z větví dána součinem pravděpodobností jednotlivých losování. Odtud plyne, že

$$P(C_2) = \frac{c}{c+b} \cdot \frac{c-1}{c-1+b} + \frac{b}{c+b} \cdot \frac{c}{c+b-1} = \frac{c}{c+b}.$$

Základní kombinatorické principy využívá i následující řešení.

Třetí řešení. Vzhledem k tomu, že všechny možné výsledky vylosování dvou koulí z pytlíku jsou stejně pravděpodobné, je stochastickým modelem takového pokusu klasický pravděpodobnostní prostor. V klasickém pravděpodobnostním prostoru se pravděpodobnost jevu vypočte jako podíl počtu výsledků příznivých danému jevu a počtu všech možných výsledků.

- Počet všech možných výsledků losování:

  Před prvním tahem je v pytlíku $(c+b)$ koulí, a tedy můžeme získat $(c+b)$ různých výsledků losování. Před druhým tahem je v pytlíku $(c+b-1)$ koulí, a tedy můžeme získat $(c+b-1)$ různých výsledků losování. Podle kombinatorického pravidla součinu je tedy celkem $(c+b)\cdot(c+b-1)$ různých výsledků tažení dvou koulí.
- Počet losování, v nichž je ve druhém tahu vylosována černá koule:

  V pytlíku je c černých koulí, a tedy ve druhém tahu lze vylosovat černou kouli c různými způsoby. V první tahu losujeme libovolnou kouli ze zbývajících, což lze udělat $(c+b-1)$ různými způsoby. Podle kombinatorického pravidla součinu je celkem $c \cdot (c+b-1)$ různých výsledků.

Odtud plyne, že

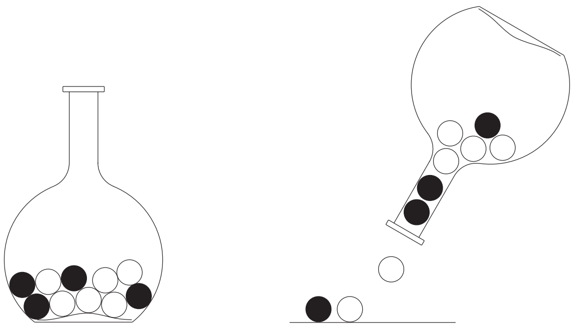
$$P(C_2) = \frac{c \cdot (c+b-1)}{(c+b) \cdot (c+b-1)} = \frac{c}{c+b}.$$

Tento postup je univerzální, tj. lze ho použít i v situaci, kdy nás zajímá, jaká je pravděpodobnost, že koule vylosovaná v n-tém tahu bude černá $n = 1, 2, \ldots, c+b$. Pak dostáváme

$$P(C_n) = \frac{c \cdot (c+b-1) \cdot \ldots \cdot (c+b-(n-1))}{(c+b) \cdot (c+b-1) \cdot \ldots \cdot (c+b-(n-1))} = \frac{c}{c+b}.$$

Vidíme tedy překvapující skutečnost, že při losování koulí (po jedné) je pravděpodobnost vylosování černé koule ve všech tazích stejná!

Čtvrté řešení. Do láhve dáme b bílých a c černých koulí. Zamícháme je a obrátíme láhev dnem vzhůru. Koule začnou vypadávat z láhve (obr. 2). Zajímá nás pořadí, v jakém koule vypadnou.



Obr. 2

Ze symetrie je zřejmé, že každá z koulí může se stejnou pravděpodobností vypadnout na libovolném z $c+b$ míst, proto

$$P(C_n) = \frac{c}{c+b} \quad \text{pro } n \in \{1, 2, \ldots, c+b\}.$$

Situaci lze ještě zobecnit.

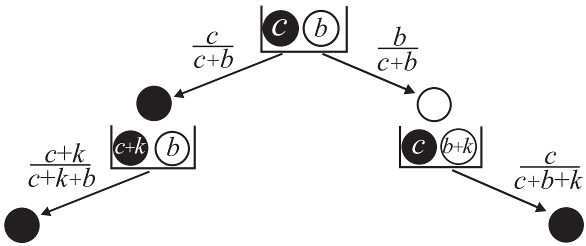
Příklad 3

V pytlíku je b bílých a c černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vylosovaná koule ve druhém tahu bude černá, pokud kouli vylosovanou v prvním tahu vrátíme zpět do pytlíku a

a) přidáme k koulí téže barvy,

b) ubereme k koulí téže barvy, kde $k \leq \min(c, b)$?

Řešení. Označme k celé číslo splňující zadání příkladu a užijeme stejný postup jako ve 2. řešení příkladu 2. Odpovídající stochastický strom je na obr. 3.



Obr. 3

Z obr. 3 plyne, že

$$P(C_2) = \frac{c}{c+b} \cdot \frac{c+k}{c+b+k} + \frac{b}{c+b} \cdot \frac{c}{c+b+k} = \frac{c}{c+b}.$$

Uvedené tři příklady poukazují na paradoxní situaci. Pravděpodobnost vylosování koule

- nezávisí na způsobu losování, tj. zda vylosované koule vracíme do pytlíku či nikoli,
- je stejná pro všechny tahy, tj.

$$P(C_1) = P(C_2) = \ldots = P(C_{c+b}),$$

- nezávisí na přidání nebo ubrání koulí (podle pevně stanovených pravidel).

Literatura

[1] *Płocki, A. – Tlustý, P.*: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé. Prometheus, Praha, 2007.

[2] *Płocki, A. – Tlustý, P.*: Kombinatoryka wokół nas, Novum, Płock, 2010.