Porozumění matematice

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Motto: *Polopřímka je přímka, která začíná bodem a na druhé straně jde do nekonečna.*

Při matematickém vzdělávání žáků nám jde především o to, aby se matematika stala významnou součástí jejich základního, resp. všeobecného vzdělání a v odborných školách i potřebnou součástí jejich odborného vzdělání. Podle úrovně tohoto vzdělání tak člověk získá (měl by získat) základní matematickou výzbroj, schopnosti analyzovat a řešit problémy, pozná principy řešení typových matematických úloh a různé užitečné algoritmy. Matematika ho učí logicky uvažovat, získat představu o tom, co je to důkaz, přesně formulovat svá tvrzení, dívat na problémy z více hledisek a při jejich řešení nebo postupném řešení si je vhodně modelovat. Žáci se při výuce seznamují s různými modely (početními, analytickými i grafickými), učí se s nimi pracovat a získávají první zkušenosti, jak své znalosti uplatnit v praxi. To všechno jsou cílené vklady pro život a jednání člověka 21. století dosti potřebné. Základním předpokladem úspěchu však je, aby žák matematice porozuměl, aby si „ve své mysli" postupně vytvářel správnou, i když třeba neúplnou „svou" matematiku.

Nejednou jsem se setkal s názorem, že pro „slušné známky z matematiky" je třeba mít pro matematiku zvláštní nadání. Má odpověď je ano, chcete-li, aby se vaše dítě stalo profesionálním matematikem, je k tomu třeba i něco zvláštního nadání, stejně jako v jiných oborech. Na druhé straně jsem však byl svědkem neúspěchu některých studentů matematiky, kteří se spoléhali na své nadání a hrubě podcenili druhou složku – své pracovní úsilí.

Hloubka porozumění jistě závisí i na nadání pro matematiku, ale platí, že žák může přiměřeně porozumět matematice nebo jejím dílčím úsekům, i když jeho nadání je „běžné" a dokonce, i když je nižší. Musí však na to *vynakládat potřebné úsilí* a podstatnou roli tu má učitel, jemuž záleží na tom, aby jeho žáci učivu porozuměli, ne se ho jen učili, a který ví, jak na to, tedy dobrý učitel. Že si žáci musí svou matematiku budovat postupně, od základů, že další poznatky si musí ke stávajícím, kterým už rozumějí, připojovat přiměřeným tempem a užitím vhodných aktivních metod, že si žáci musí uvědomovat vzájemné vazby a užitím vhodných příkladů a úloh získávat své vlastní zkušenosti a početní i grafickou praxi.

Jsou však žáci, u kterých ani dobrý učitel naplno neuspěje. Někteří jsou myšlenkově leniví, jiní jsou příliš jednostranně zaměřeni „svým“ směrem k budoucímu svému povolání, kde, jak si říkají, matematiku potřebovat nebudou. Pro obojí je společné to, že prostě *nechtějí vynakládat jakékoli úsilí* na porozumění „látce“ a akceptují matematiku jen jako soubor pravidel, operací a návodů, kdy se má které pravidlo nebo operace použít. Význam takového učení se redukuje v podstatě jen na cvičení mechanické paměti; takové vědomosti se však z paměti brzy vytrácejí a navíc takový žák přichází o potěšení ze samostatného zvládnutí matematické úlohy a o určité sebevědomí, jež jsou součástí porozumění matematice. Mají-li takoví žáci dostatečně rozvinutou mechanickou paměť, mohou příslušnou školou projít, ale je smutnou pravdou, že „pro život“ toho takoví žáci získají málo a až vyrostou, tak si s chutí na výuku matematiky a na své učitele postěžují (třeba v televizi).

Není pochyb o tom, že cílem snahy nebo dokonce snem každého dobrého učitele matematiky je, aby jeho žáci „uměli matematiku“, tj. aby jí rozuměli a měli požadované znalosti. Mezi žáky jsou však také jedinci, kteří sice projevují snahu, ale jejichž myšlení se s matematikou stále nějak nechce skamarádit. A tu musí učitel volit zvlášť citlivý individuální přístup spojený s povzbuzováním a pochvalou za každý drobný úspěch.

Je přirozené, že žáci poznávají nové matematické pojmy a jejich zápisy v souladu s tím, jak jsou uvedeny v jejich učebnicích a jak je používá jejich učitel. Přes snahu autorů učebnic i učitele se však stává, že žák některý pojem nestráví, není mu jasný, neporozuměl mu, třeba i proto, že se tu navazuje na jiný pojem, v němž také jasno nemá. Málokdy takový žák požádá učitele o vysvětlení – buď se stydí zeptat, protože má dojem, že ostatním je to jasné, nebo se naopak spokojí s pocitem, že ostatní jsou na tom také tak. Tato nepochopená místa, nejsou-li podchycena a na přiměřené úrovni vysvětlena, mohou v myslích žáků postupně vytvářet jakási prázdná (neustále rostoucí) okna, narušují vztah těchto žáků k matematice a je nebezpečí, že se (v lepším případě) začnou učit matematiku mechanicky a mají pak v hlavě sklad různých (třeba i dobrých) útržků matematiky bez logických souvislostí. Takové infekce nedostatečného porozumění pojmům, operacím či algoritmům mohou vznikat již u žáků na základních školách, ale i dále na středních školách. V horším případě, když takových zdrojů nejistoty a nepochopení přibývá, žák rezignuje („na to já nemám hlavu“)

a jeho pohled na matematiku se postupně mění jako na něco tajemného a nesrozumitelného a někdy i protivného. Je na didaktické dovednosti a lidskému přístupu učitele, aby u žáků postihl i drobná neporozumění, aby jim pomohl porozumět a nenechal věci dojít až k výše popsaným koncům.

Často veřejně omílané tvrzení, že žáci nemají rádi matematiku, nepovažuji za univerzálně pravdivé. Je v moci učitele matematiky, aby (zejména na ZŠ a gymnáziích) navodil takové pracovní prostředí, že spektrum vztahů k matematice nebude obsahovat odpor k matematice. Vztah žáka k matematice se zlepšuje s každým jeho drobným úspěchem (třeba i úspěchem, že něco pochopil, a byl za to pochválen, nemusí to být zrovna získaná „jednička") a individuálním přístupem se v tomto dá mnohého dosáhnout.

Tedy porozumění, ale jak na to? Samozřejmě jsou jistá obecná pravidla (studenti učitelství se s nimi seznamují v didaktice matematiky), ale každá školní třída je množina individualit. Základní pravidlo je samozřejmé: Nejdůležitější je správný začátek, po němž následuje správné pokračování.

K tomu uvedu drobnou, ale poučnou příhodu, kterou mi kdysi vyprávěla maminka. Ta příhoda ukazuje, jaká učitelem nepředvídaná drobnost může u žáka narušit jeho porozumění. V jejich vesnické škole se tehdy v 1. třídě (před více než 100 lety) začali učit počítání na prstech a ukazovali jeden prst – jedna, druhý prst – dvě, třetí prst – tři, atd., ale té dívence tehdy vrtalo hlavou, proč u druhého prstu říkáme dvě, když je to zase jen jeden prst, a podobně další prst je přece zase jen jeden, ale styděla se zeptat. Toto trápení sice pak nakonec překonala, ale trvalo nějakou dobu a bylo tak intenzivní, že si na ně pamatovala do svých 85 let. Vidíme, že přitom v původní situaci stačilo jen málo, aby učitel žákům vysvětlil, jak to počítání na prstech funguje, a tato žačka by problém, který ji tak dlouho trápil, jistě hned pochopila a navíc s radostí, že tomu rozumí.

Zvolme nyní několik praktických ukázek při malé procházce po základních planimetrických pojmech. Budeme si všímat zejména takových kritických míst, kdy se v žácích porozumění matematice vytváří nebo naopak narušuje. Může se zdát, že jde o maličkosti, ale právě „maličkosti" mohou velmi narušit porozumění.

Ještě však poznámka o motivu pro napsání tohoto článku. Kdysi jsem debatoval se skupinou studentů 5. ročníku učitelského studia matematiky na témata elementární geometrie. Studenti v té době již měli rozsáhlé matematické znalosti mnoha matematických disciplín, jejichž studiu věnovali mnoho hodin svého studijního času. Ukázalo se však, že když v minulosti narazili při studiu na didaktickou stránku samotných základů geometrie, tak si říkali „to je přece lehké", takže se nad tím „lehkým" učivem ani nějak nezamýšleli. Tak se při té besedě ukázalo, že znalosti základů byly u některých z nich překvapivě povrchní. Například jsem se jich zeptal, co by odpověděli, kdyby jim jejich žáci položili otázky formulované třeba takto: „Co je to polopřímka?" „Co je to polorovina?" „Co je to úhel?". Tyto otázky vyvolaly širokou diskusi s neuspokojivým průběhem, ale nakonec s vcelku uspokojivým závěrem, ke kterému se studenti však jen postupně dopracovali. Ale bylo vidět, že v jejich profesionální výzbroji dosud chybí schopnost pohotově a srozumitelně na dotazy žáků reagovat. Tuto dovednost nezíská učitel automaticky, ale právě promýšlením samotných základů a porozuměním, co se děje v myslích žáků.

Porozumění není totéž jako schopnost se správně a srozumitelně vyjádřit. Určitě se už každý učitel setkal s výrokem „On tomu rozumí, ale nedovede to říct." Vyjadřování v planimetrii skutečně není pro žáky zcela snadné, zejména zpočátku, má-li být jednoduché a správné. Ale pozor, správné vyjadřování je sice důležité, ale na žebříčku zvládnutí pojmu je nevidím na vrcholu. To, že se žák dovede vyjádřit, musí být až důsledek skutečnosti, že pojmu porozuměl.

Připomeňme průběh zvládnutí nového pojmu; lze jej popsat těmito navzájem provázanými kroky:

(a) intuitivní zvládnutí pojmu,
(b) důsledné pochopení pojmu, správná představa souvislostí s jinými pojmy,
(c) znalost označení a zápisů,
(d) formální slovní formulace (definice) pojmu,
(e) dovednost používat tento pojem při řešení úloh.

Přitom zpravidla nejde o proces jednorázový, ale cyklický, v němž se daný pojem postupně upřesňuje, prohlubuje a upevňuje v mysli žáka.

1. Přímka a polopřímka

Zopakujme si některé pojmy a vyjádření. Ježto pojem *přímka* patří k základním matematickým pojmům, které nedefinujeme, odpadá (d). Správná představa (b) musí zahrnout tu samozřejmost, že přímka nemá nějaké konce, že její model v sešitě či na tabuli můžeme libovolně prodlužovat. Na displeji to bývá řešeno tak, že obraz přímky jde „od rámu obrázku po rám". Je třeba se věnovat bodu (c), k němuž [1] říká: „Přímky se obvykle značí malými písmeny latinské abecedy $p, q, r, \dots; \dots$ přímka určená body A, B se značí *přímka* AB nebo zkráceně AB, v zápisu konstrukce též $\leftrightarrow AB$". Stojí za to se zmínit o tom, že tutéž přímku lze označit též BA, i když v matematice dáváme obvykle přednost zápisu bodů podle abecedy. Tato rozmanitost označení přímek je sice účelná, ale žáci s ní mohou mít problémy. Proto je vhodné volit různé úlohy, kde se zcela přirozeně uplatní jednotlivé způsoby označení. Bez problémů žáci přijmou, že na každé přímce lze volit libovolný počet bodů, a že dvěma navzájem různými body prochází jediná přímka.

Školní definice polopřímky (b) vysvětluje, jak polopřímku získáme; např. ve [2] se říká: „Bod rozděluje přímku na dvě navzájem opačné polopřímky a je jejich společným počátkem." Označení: *polopřímka* PX (kde P je počátek polopřímky a X je její vnitřní bod), zkráceně PX, v zápisu konstrukce též $\mapsto PX$ (viz [1]). Žákům však rozumný učitel neklade otázku „Co je to polopřímka?"; protože na ni nelze rozumně odpovědět, zde nám stačí, když žáci vědí, jak polopřímka vznikne. Jeden kandidát učitelství kdysi při svém výstupu na školní praxi žákům tuto otázku položil a dostal od vyvolaného žáka odpověď, která je mottem tohoto článku. Můžeme se nad ní usmát, ale tento žák i při nevhodně položené otázce svou nevhodnou odpovědí prokázal, že pojem polopřímka intuitivně zná, že mu rozumí. Učitel matematiky by měl správné vyjadřování žáků podporovat tím, že klade jen takové otázky, na něž odpověď není příliš složitá, a hlavně, lapidárně řečeno, na něž sám zná jednoduchou odpověď, tedy ví, jakou odpověď může očekávat

2. Úsečka

Mladší žáci si zpočátku pletou a zaměňují pojmy *přímka – úsečka*, nejspíše možná z toho důvodu, že když narýsujeme přímku, tak je to vlastně obrázek úsečky. Proto nezapomínáme řádně vyznačovat krajní body úsečky a trváme na odlišení těchto pojmů. Žáci by se tak hned na počátku měli setkat s pojmy *krajní bod úsečky* a *vnitřní bod úsečky* (resp. i *vnitřek úsečky*). Označení úsečky je jednoduché – *úsečka* AB, avšak stojí za to se zmínit o tom, že tutéž úsečku lze označit i BA (možný zdroj neporozumění), i když, jak bylo už řečeno, v matematice dáváme zpravidla přednost zápisu krajních bodů podle abecedy. (Upozorníme, že taková záměna písmen A, B samozřejmě není možná u označení polopřímky.) Formální definici úsečky doplníme (se žáky objevíme) až po znalosti množinových operací – průniku. Později pak přibude *střed úsečky* a *osa úsečky.*

Pro upevnění správné představy těchto tří pojmů (přímka, polopřímka, úsečka) lze doporučit, aby učitel zadával jednoduché úlohy na jejich zobrazení v geogebře, protože ta umí tyto tři pojmy odlišit zcela zřetelně a názorně, a žákům se tak vtiskne do paměti správná představa a odlišení těchto pojmů.

Délka (nebo též *velikost*) *úsečky* je číselný údaj, ke kterému zpravidla přidáváme označení délkové jednotky, v níž je délka vyjádřena, např. „úsečka AB má délku 3 cm". Při řešení praktických úloh matematickým modelováním, v jejichž zadání jsou uvedeny např. cm, se stejné jednotky použijí zpravidla i ve výsledku (v „odpovědi"), ale v matematickém modelu nemají své místo, cm není matematický pojem.

Úloha 1 [2]

Vypočítejte poloměr kružnice, jejíž délka je o 7 cm větší než obvod pravidelného šestiúhelníku, který je této kružnici vepsán ($\pi \doteq 22/7$).

Komentované řešení. Zadané délkové jednotky jsou cm, takže výsledek bude vyjádřen v cm. Teď však centimetry opustíme a budeme počítat v jednotkách bez označení.

Poloměr kružnice označme r, tj. jeho velikost je r, v matematickém modelu nikoli cm, ale *abstraktních* délkových jednotek, které však během řešení neříkáme ani nezapisujeme. Délka kružnice je $2\pi r$, obvod pravidelného šestiúhelníku, který je této kružnici vepsán je $6r$. Platí tedy

$$2\pi r = 6r + 7,$$

odkud

$$r = \frac{7}{2\pi - 6} \doteq 24{,}7$$

(„abstraktních" délkových jednotek).

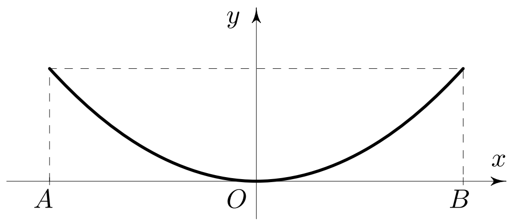
Přejdeme k odpovědi: Poloměr kružnice je 24,7 cm.

Takový postup je běžný např. i při řešení úloh, kde matematickým modelem je podmnožina analytická geometrie (viz [3]).

Úloha 2

Parabolické zrcadlo má průměr 0,72 m a hloubku 20 cm. Určete vzdálenost ohniska od vrcholu zrcadla. Ve vhodném měřítku sestrojte nákres.

Postup modelování. Zrcadlo má tvar rotačního paraboloidu. Jeho osou vedeme souřadnicovou rovinu, která tento paraboloid protíná v parabole, jež má vrchol ve vrcholu zrcadla. Osu paraboloidu volíme (např.) za osu y, počátek soustavy souřadnic volíme ve vrcholu paraboly (obr. 1). Zadané údaje převedeme na tutéž jednotku délky, např. na cm (tedy průměr zrcadla je 72 cm), a řešíme modelovou matematickou úlohu.



Obr. 1

Řešení. Užitím vrcholové rovnice paraboly

$$x^2 = 2py$$

najdeme parametr p a tím získáme požadovaný údaj o ohnisku.

Parabola má vrchol v počátku a prochází bodem $[36; 20]$. Dosadíme do předchozí rovnice

$$1296 = 2p \cdot 20 \Rightarrow p = \frac{1296}{40} = 32{,}4; \quad \frac{p}{2} = 16{,}2.$$

Vzdálenost ohniska od vrcholu zrcadla je 16,2 cm.

V [1, 12.3] najdeme toto upozornění: „Pokud nemůže dojít k nedorozumění, připouští se označení malými písmeny latinské abecedy (nejen pro přímku, ale i) pro úsečku i její délku.“ To jinými slovy říká např. i učebnice [2]. Takže řekneme-li „Trojúhelník o stranách a, b, c“, myslíme tím nejen to, že délky stran jsou a, b, c, ale také to, že jsou tak pojmenovány přímo tyto strany jakožto úsečky – jako bychom říkali (ale tak to neříkáme) „strana a má délku a“. Při vhodné příležitosti je dobré žákům připomenout, že tato „dvojznačnost“ označení pojmů $a, b, c, \ldots$ *není vadou matematického vyjadřování, ale předností*, která nám umožňuje vyjadřovat se jednodušeji. Na vhodných příkladech si žáci mají uvědomit, že osa strany trojúhelníku (osa úsečky) je přímka, osa úhlu polopřímka, výška a také těžnice trojúhelníku může být jak přímka, tak úsečka, tak velikost této úsečky [2].

Důležité je pochopit pojem shodnosti. Ve [2] se říká „Dva geometrické útvary budeme pokládat za shodné, když je lze přemístěním ztotožnit.“

Toto vyjádření vyhlíží značně jednoduše, ale na pochopení tak docela jednoduché není. Jakým přemístěním? Přece shodným! A co je to shodné přemístění? A už by byla definice v kruhu. Takže předchozí charakteristiku nelze považovat za definici, ale jen za názorné vysvětlení. Myslím, že by byla docela vhodná existence SW prostředku, kde by byla sada obrazců a uživatel by je mohl „shodně“ přemísťovat, pátrat po jejich shodnosti a přímo takto si upevňovat představu shodnosti.

Pojednávat o shodnosti přímek nebo polopřímek nemá samozřejmě smysl, i když žákům jistě neuškodí, když si uvědomí, že všechny přímky jsou navzájem shodné, i všechny polopřímky.

První smysluplné použití se nabízí u úseček, které můžeme porovnávat buď graficky nebo užitím jejich délky. Pro shodné úsečky platí

$$(AB \cong CD) \iff (|AB| = |CD|).$$

Žáci však patrně většinou považují vyjádření, že úsečky jsou shodné, za „školní vyjádření“ toho, že „úsečky jsou stejně dlouhé“. Vyjádření nerovnosti úseček [1] neřeší, dle [2] se používá jen označení pro délky úseček $|AB| < |CD|$, slovně „úsečka AB je menší než úsečka CD“. Podobně pro $|AB| > |CD|$ je doporučeno vyjádření „úsečka AB je větší než úsečka CD“. Jestliže nám však žák řekne, že úsečka AB je *delší* nebo že je *kratší* než úsečka CD (což je nakonec vyjádření názornější), nebudeme jej opravovat, pokud je jeho vyjádření *věcně* správné. Porovnávání úseček je natolik názorné, že není třeba se mu nějak více věnovat.

3. Rovina a polorovina

Pojem *rovina* patří (stejně jako bod a přímka) k základním matematickým pojmům, které nedefinujeme, v planimetrii postačí žákům jen (a), přičemž rovinu si představujeme jako povrch tabule, list v sešitu nebo obrazovku počítače. V rovině lze zvolit libovolný (i nekonečný) počet bodů nebo přímek.

Školní definice poloroviny opět jen vysvětluje, jak polorovinu získáme, např. ve [2] takto: „Přímka dělí rovinu na dvě navzájem opačné poloroviny a je jejich společnou hranicí neboli hraniční přímkou.“ Označení: *polorovina* pX (kde p je hranice poloroviny a X je vnitřní bod poloroviny), zkráceně pX, v zápisu konstrukce též $\mapsto pX$ (viz [1]). Je-li hraniční přímka AB, pak se polorovina značí *polorovina* ABX, zkráceně ABX nebo $\mapsto ABX$.

V obou případech se neptejme žáků „Co je to rovina?“ nebo „Co je to polorovina?“, pokud jim nedovedeme poradit, jak na takové otázky mají odpovědět. Těžko lze např. předpokládat, že žák řekne třeba „Polorovina pX je množina všech takových bodů M roviny, pro něž platí, že žádný bod přímky p není vnitřním bodem úsečky MX.“ Správné porozumění tomuto pojmu je vhodné trénovat na jednoduchých úlohách na průnik dvou polorovin (včetně případů rovnoběžných hraničních přímek).

4. Úhel

Tímto pojmem svou procházku po elementární geometrii ukončíme. Ve [2] se uvádí: „Dvě různé polopřímky *VA*, *VB* dělí rovinu na dva úhly AVB.“ Pak v krátkém sledu následují pojmy *ramena úhlu, vrchol úhlu, vnitřní bod* (jednoho z úhlů), *konvexní úhel, nekonvexní úhel.*

Dále se pokračuje: „Nejsou-li polopřímky opačné, je jeden úhel AVB průnikem polorovin VAB, VBA a nazývá se konvexní úhel AVB, značí se $\sphericalangle AVB$. Druhý úhel AVB vznikne sjednocením polorovin opačných k polorovinám VAB, VBA a nazývá se nekonvexní úhel AVB, značí se $\otimes\!\!< AVB$.“ V obou případech lze vedle AVB opět použít i označení BVA. Popsaný vznik nekonvexního úhlu není příliš názorný, ale snad bychom ho po žácích ani neměli chtít „odříkávat“, protože graficky je nekonvexní úhel docela názorný. Podobně ani slovní popis vzniku konvexního úhlu nepovažuji za potřebnou žákovu znalost, mám za to, že zvládnutí (a), (b), (c), (e) bohatě stačí. (Starší čtenáři ještě pracovali s pojmy „dutý úhel“ a „vypuklý úhel“; tyto pojmy byly opuštěny, i když byly pro žáky nějak jazykově lépe stravitelné, ale dostaly se později do slovního rozporu s definicí úhlu).

Všimněme si, že pro úhly nulové, přímé a plné se podle [1] před trojici bodů AVB neuvádí žádný symbol úhlu, ale pokud by jej tam žák uvedl, nepočítejme mu to jako chybu.

Pojem konvexní úhel navazuje na pojem konvexnosti geometrického útvaru [2]: „Geometrický útvar se nazývá konvexní, právě když úsečka s krajními body v libovolných dvou bodech útvaru je částí tohoto útvaru.“ Takže situace není pro žáky zcela jednoduchá, neboť:

- konvexní úhel je konvexním útvarem,
- nekonvexní úhel není konvexním útvarem,
- úhel přímý (i nulový a plný) není konvexním úhlem ani nekonvexním úhlem, ale je to konvexní útvar,

Co je to tedy *úhel*? Je to souhrnný název pro úhly konvexní, nekonvexní, přímé, nulové a plné, takže žákům raději takovou otázku nepokládejme. Když jsme snad už před 50 lety na jedné ZŠ ve skupince studentů na praxi debatovali o tom, jak nejjednoduševji zavést školákům pojem úhel (tehdy se ještě s množinami a průniky nepracovalo), překvapil nás tehdy svým přístupem jeden starší učitel-praktik. Vzal do ruky dřevěné učitelské kružidlo a řekl: „Já žádné komplikace nemám, prostě žákům řeknu“, a kružidlo částečně rozevřel – „toto je úhel.“ Všimněme si, že to nebylo zas až tak úplně nesmyslné, jednak tím žákům částečně nabídl představu – bod (a), a jednak předvedl nástroj, kterým bude i v příštích hodinách modelovat různé konkrétní úhly. Ale nedivme se, tento učitel učil matematiku již v době, kdy se např. v [5] žákům říkalo: „Úhel jest odchylka dvou ramen. Čím více jsou ramena úhlu od sebe vzdálena, tím je úhel větší. Čím jsou blíže k sobě, tím jsou menší. Malý úhel má ramena téměř u sebe.“ S tímto přístupem dnes už není třeba polemizovat, ale přisuďme mu také alespoň názornost

Pak vstupuje do hry shodnost úhlů a také konstrukční porovnávání úhlů (který ze dvou úhlů je větší), grafické sčítání a odčítání úhlů, jejich násobení a dělení vybranými přirozenými čísly, jsou to akce docela názorné, jen pozor, aby žáci nezačali ztotožňovat pojem úhel s tím obloučkem, který uvnitř úhlu vyznačují.

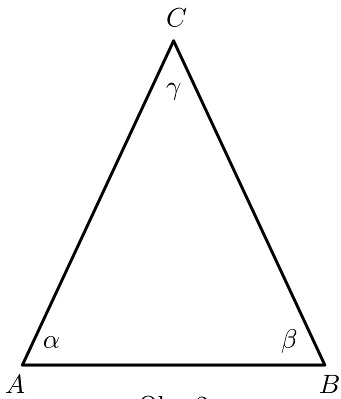
Korektní přechod k pojmu *velikost úhlu* není jednoduchý a ve [2] je řešen přímo šalomounsky, když se opírá o (jakoby předem daný) pojem „měření úhlu“: „Výsledkem měření úhlu je nezáporné reálné číslo nazvané *velikost úhlu*. Velikost úhlu AVB značíme $|\sphericalangle AVB|$, případně $|\otimes AVB|$. V míře obloukové je velikost reálné číslo z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$, v míře stupňové $\langle 0°; 360° \rangle$. Je-li velikost konvexního úhlu AVB číslo α, píšeme $|\sphericalangle AVB| = \alpha$ (úhlových jednotek). Někdy písmenem α označujeme přímo úhel.“

Je to řečeno zhuštěně a snad i proto to žákům mnoho neřekne. Sluší se ještě dodat upřesnění podle [1]: „Pokud nemůže dojít k nedorozumění, připouští se označení malými písmeny řecké abecedy pro úhel i jeho velikost.“ Zde je situace o něco složitější než při označování úseček malými písmeny.

Nepůjdeme dále do podrobností, jen si řekněme, že u *stupňové míry* je pro žáky patrně nejsrozumitelnější „klasický“ postup – úhlový stupeň $1°$ je velikost $1/90$ pravého úhlu [2] a velikost úhlu je číslo, které vyjadřuje, kolikrát je daný úhel větší než úhel o velikosti $1°$ (je to vyjádření názorné, úhly menší než $1°$ jistě neprotestují). Pro jednoduché vyjadřování je docela vhodné považovat např. údaj 60° nejen za velikost nějakého úhlu, ale přímo za tento úhel. Pak se může jednoduše říkat třeba: sestrojíme si úhel $\alpha = 60°$. Stupňovou míru procvičíme při konstrukci úhlů různých velikostí a v početních úlohách, zejména pak s goniometrickými funkcemi, kdy je vhodná příležitost na práci s menšími jednotkami – tj. úhlovými minutami a úhlovými vteřinami. Při počítání (na rozdíl od postupů v příkladech 1 a 2) ponecháváme v matematickém modelu označení stupňů, resp. i minut a vteřin, jsou to matematické pojmy a patří tam. Navíc by při vynechání označení stupňů mohlo dojít k omylům, protože v matematice platí dohoda, že když u velikosti úhlu není uvedena jednotka, pak je jednotkou radián.

Úloha 3.

Mějme rovnoramenný trojúhelník ABC s hlavním vrcholem C, kde je $\gamma = 50°$. Vypočtěte velikost zbývajících úhlů (obr. 2).



Obr. 2

Řešení. V daném trojúhelníku ABC platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, $\gamma = 50°$, $\beta = \alpha$. Po dosazení do 1. rovnice z druhých dvou máme

$$\alpha + \alpha + 50° = 180°,$$

$$2\alpha = 130°,$$

$$\alpha = \beta = 65°.$$

Výklad o obloukové míře je vhodné odložit až na dobu, kdy žáci již bezpečně pracují s mírou stupňovou a kdy to bude mít smysl, tj. až pro něj budou vytvořeny „znalostní podmínky“, jak je tomu v [2]. Za nejjednodušší a nejsrozumitelnější pro žáky považuji při výkladu o obloukové míře postup přes jednotkovou kružnici, např. takto:

V rovině AVB sestrojíme jednotkovou kružnici se středem v bodě V (a tedy s poloměrem $r = 1$). Velikostí úhlu AVB v obloukové míře rozumíme délku oblouku této jednotkové kružnice, který leží v úhlu AVB. Jednotkový úhel obloukové míry (i jeho velikost) se nazývá radián (značka rad). Při výpočtech zpravidla označení rad vynecháváme.

Tato informace žákům pro začátek stačí, probírání dalších vlastností obloukové míry je vhodné nechat až na dobu, kde se žáci seznamují s pojmem orientovaný úhel. Asi by se však neměla vynechat informace, že velikost pravého úhlu je $90°$, což odpovídá $\pi/2$ rad.

Literatura

[1] Názvy a značky školské matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1988.

[2] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia, Planimetrie. Prometheus, Praha, 1993.

[3] *Boček, L. – Kočandrle, M.*: Matematika pro gymnázia, Analytická geometrie. Prometheus, Praha, 1995.

[4] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia, Goniometrie. Prometheus, Praha, 1994.

[5] *Haník, J. S.*: Přijímací zkoušky do 1. třídy škol středních. ÚNKU, Praha, 1934.

Polibky kružnic: René Descartes a Alžběta Falcká

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Uvažujme tři kružnice, $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$, a $k_3(O_3; r_3)$, které se navzájem vně dotýkají. Jejich poloměry mohou být libovolné. Existují však nejvýš dvě kružnice $k_4(O_4; r_4)$, jež se dotýkají kružnic k_1, k_2 i k_3 (obr. 1),