a nejsrozumitelnější pro žáky považuji při výkladu o obloukové míře postup přes jednotkovou kružnici, např. takto:

V rovině AVB sestrojíme jednotkovou kružnici se středem v bodě V (a tedy s poloměrem $r = 1$). Velikostí úhlu AVB v obloukové míře rozumíme délku oblouku této jednotkové kružnice, který leží v úhlu AVB. Jednotkový úhel obloukové míry (i jeho velikost) se nazývá radián (značka rad). Při výpočtech zpravidla označení rad vynecháváme.

Tato informace žákům pro začátek stačí, probírání dalších vlastností obloukové míry je vhodné nechat až na dobu, kde se žáci seznamují s pojmem orientovaný úhel. Asi by se však neměla vynechat informace, že velikost pravého úhlu je 90°, což odpovídá $\pi/2$ rad.

Literatura

[1] Názvy a značky školské matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1988.

[2] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia, Planimetrie. Prometheus, Praha, 1993.

[3] *Boček, L. – Kočandrle, M.*: Matematika pro gymnázia, Analytická geometrie. Prometheus, Praha, 1995.

[4] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia, Goniometrie. Prometheus, Praha, 1994.

[5] *Haník, J. S.*: Přijímací zkoušky do 1. třídy škol středních. ÚNKU, Praha, 1934.

Polibky kružnic: René Descartes a Alžběta Falcká

PAVEL LEISCHNER

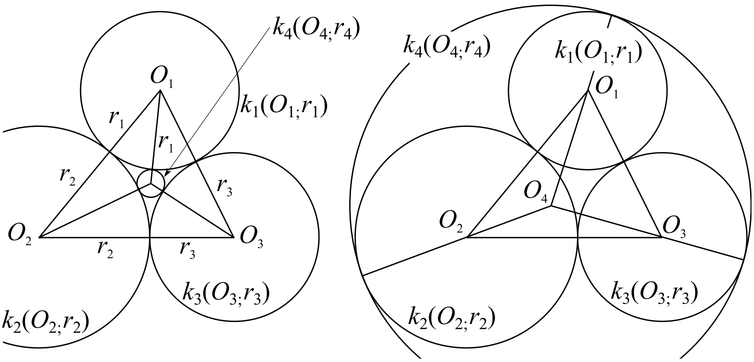
Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Uvažujme tři kružnice, $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$, a $k_3(O_3; r_3)$, které se navzájem vně dotýkají. Jejich poloměry mohou být libovolné. Existují však nejvýš dvě kružnice $k_4(O_4; r_4)$, jež se dotýkají kružnic k_1, k_2 i k_3 (obr. 1), a platí

$$2\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{r_i}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i}\right)^2. \tag{1}$$

Toto tvrzení se nazývá *Descartesova věta o kružnicích* podle svého objevitele, který ji roku 1643 uvedl bez důkazu v dopise české princezně *Alžbětě Falcké* (1618–1680). Nebyla to přímo rovnost (1), ale ekvivalentní vztah

$$\begin{aligned} r_1^2r_2^2r_3^2+r_1^2r_2^2r_4^2+r_1^2r_3^2r_4^2+r_2^2r_3^2r_4^2=2\bigl(r_1r_2r_3^2r_4^2+{}\\ +r_1r_2^2r_3^2r_4+r_1r_2^2r_3r_4^2+r_1^2r_2r_3^2r_4+r_1^2r_2r_3r_4^2+r_1^2r_2^2r_3r_4\bigr).\end{aligned} \tag{2}$$



Obr. 1 Dotyky kružnic, první situace

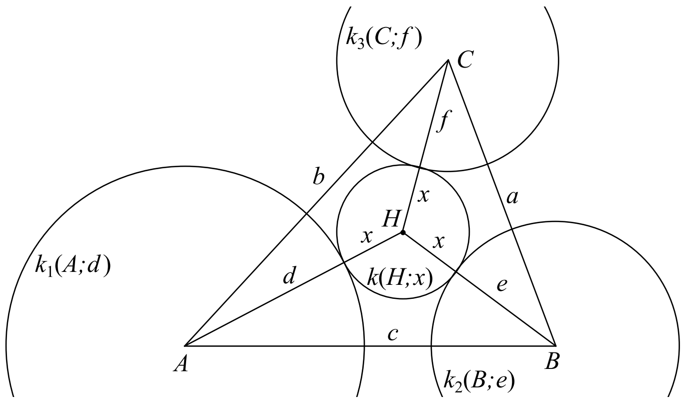
Rovnost (1) je výhodné uvádět ve tvaru

$$2\sum_{i=1}^{4}(\kappa_i)^2=\left(\sum_{i=1}^{4}\kappa_i\right)^2, \tag{3}$$

kde $\kappa_i=1/r_i$ ($i\in 1,2,3,4$) jsou *křivosti kružnic*. Vztahy (1) a (3) jsou symetrické. Aby platily pro všechny situace, je nutno přiřadit záporné znaménko poloměru (resp. křivosti) kružnice, která má s aspoň dvěma svými sousedy vnitřní dotyky. Pak není nutné předpokládat, že výchozí tři kružnice mají pouze vnější dotyky. Označení kružnic na obrázcích můžeme libovolně zaměnit a za předpokladu, že jsou pevně dány křivosti κ_1, κ_2 a κ_3, představuje vztah (3) kvadratickou rovnici s neznámou κ_4. Její kořeny jsou možné křivosti kružnice k_4. Kořenu $\kappa_4=0$ odpovídá přímka, společná tečna kružnic $k_1(O_1;r_1)$, $k_2(O_2;r_2)$, a $k_3(O_3;r_3)$.

V 19. století byla Descartesova věta několikrát znovu objevena a různými způsoby dokázána. Populární se stala teprve roku 1936, kdy ji britský chemik *Frederick Soddy* bez důkazu publikoval formou básně v časopise Nature [4].

Třebaže je historie vzniku vztahu (1) zajímavá, začíná u Archimeda a souvisí s našimi dějinami, v česky psané literatuře se prakticky nevyskytovala. V roce 2011 tuto mezeru částečně překlenul Miroslav Kotlas [2]. Seriál *Polibky kružnic* z jeho práce vychází a doplňuje ji o další poznatky. Dnes se zaměříme na příběh vzniku vztahu (2).



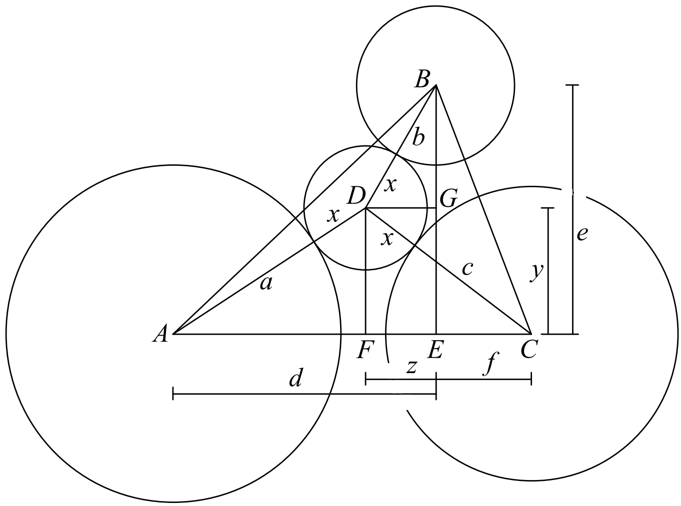
Obr. 2 K pravděpodobnému postupu princezny Alžběty

Alžběta Falcká byla dcerou „zimního krále“ Fridricha V. Falckého a Alžběty Stuartovny. V Holandsku jí bylo poskytnuto skvělé vzdělání. Ovládala šest jazyků, zabývala se filosofií, literaturou a přírodními vědami. V roce 1643 se v Haagu seznámila s *René Descartesem* (1596–1650) prostřednictvím jejich společného přítele, šlechtice Alphonse de Pollota. Nedlouho poté Descartes opustil Haag. S princeznou udržoval korespondenci. Pomáhal jí v dalším vzdělávání a mimo jiné navrhl, aby zkusila uplatnit své matematické dovednosti na výpočtu poloměru a polohy středu kružnice, která se dotýká tří daných kružnic.

Od Pollota se Descartes dozvěděl, že Alžběta řeší úlohu jinak, než si představoval. Hledala prý pouze poloměr kružnice, neboť střed pak již snadno sestrojí. Její řešení se nedochovalo. Existují však tři dopisy, které se k tomu vztahují. V prvním Descartes princeznu varoval před řešením, v němž by se poloměr x určoval při označení podle obr. 2 z rovnice

$$S_{ABC} = S_{ABH} + S_{BCH} + S_{CAH}$$

pro obsahy trojúhelníků. Když obsahy vyjádříme pomocí Heronova vzorce, získáme rovnici s jedinou neznámou x. Napsal, že řešení takové rovnice je kvůli několikanásobnému umocňování tak složité, že on by to stěží zvládl za tři měsíce. Navrhl jí zvolit jako dané hodnoty délky a, b, c, d, e, f vyznačené na obr. 3 a určit neznámé x, y a z pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníků na obrázku. Dokonce sestavil příslušnou soustavu rovnic (v níž se nevyskytovaly odmocniny) a poskytl návod, jak ji řešit.



Obr. 3 K Descartesovu řešení

Třebaže nabízený postup vede k jediné kvadratické rovnici s neznámou x, je velmi namáhavé soustavu obecně vyřešit. *Bos J. M. Henk* provedl v dodatku publikace [5] analýzu zmíněných dopisů. Řešení Descartesovy soustavy pomocí počítače jej přivedlo k algebraické rovnici o 87 sčítancích, z nichž každý je součinem šesti činitelů.[1] Nelze se proto Alžbětě divit, když nakonec poslala Descartesovi dopis, že se jí řešení jeho postupem nedaří dokončit. Požádala jej o radu, jak dovést k jednoduššímu výsledku její původní výpočet, který k dopisu přiložila. Text dopisu je znám, ale příloha se ztratila.

[1] V češtině s obsahem appendixu podrobněji seznamuje Kotlas [2].

Třetí ze zmíněných dopisů je Descartesova odpověď. V ní vysoce ocenil Alžbětinu práci. S potěšením konstatoval, že užívá metodu, kterou propagoval ve své *Geometrii.* Líbilo se mu, jak optimálně propojila syntetický a analytický přístup. Uvědomil si, že jím navrhovaný postup z prvního dopisu postrádá symetrii. Naproti tomu Alžbětin výběr konstant a proměnných vedl k symetrickým vztahům.

V závěru dopisu uvádí, že vzhledem k obtížnosti výpočtu bude snadnější předpokládat, že tři dané kružnice se navzájem dotýkají. Pak stačí jako dané hodnoty zvolit pouze jejich poloměry a nakonec princezna může dospět ke vztahu (2). Slovy zdůraznil symetrii výsledku: *Součet čtyř sčítanců, z nichž každý je součinem druhých mocnin tří poloměrů, je roven dvojnásobku součtu šesti sčítanců utvořených jako součiny dvou poloměrů s kvadráty zbývajících dvou.*

Jak princezna úlohu řešila, se zřejmě již nedozvíme. Pravděpodobně užila postup, před kterým Descartes ve svém prvním dopise varoval. Je to elementární, přirozená cesta, kterou jsem se i já před léty vydal, když jsem se poprvé seznámil se vztahem (2) z publikace [3]. Nakonec jsem dospěl k následujícímu důkazu.

Z Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku $O_2O_3O_4$ (obr. 1 vlevo) plyne

$$S_1 = \sqrt{r_2r_3r_4(r_2+r_3+r_4)} = \sqrt{r_1r_2r_3r_4}\cdot\sqrt{\frac{s}{r_1}-1}, \tag{4}$$

kde $s = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$. Analogicky vyjádříme obsahy S_2, S_3, S_4 trojúhelníků $O_3O_1O_4$, $O_1O_2O_4$, $O_1O_2O_3$, dosadíme do zřejmého vztahu

$$S_4 - S_1 = S_2 + S_3$$

a upravíme na tvar

$$\sqrt{\frac{s}{r_4}-1} - \sqrt{\frac{s}{r_1}-1} = \sqrt{\frac{s}{r_2}-1} + \sqrt{\frac{s}{r_3}-1}, \tag{5}$$

z nějž po umocnění obou stran a standardních algebraických úpravách plyne

$$\frac{s}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right) = \sqrt{\left(\frac{s}{r_4}-1\right)\left(\frac{s}{r_1}-1\right)} + \sqrt{\left(\frac{s}{r_2}-1\right)\left(\frac{s}{r_3}-1\right)}.$$

Po dalším umocnění a úpravě má rovnost tvar

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2 + V = 2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right), \tag{6}$$

kde

$$V = -\frac{4}{s}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)+\frac{8}{s^2}+ \\ +\frac{8}{s^2}\sqrt{\Big(\frac{s}{r_1}-1\Big)\Big(\frac{s}{r_2}-1\Big)\Big(\frac{s}{r_3}-1\Big)\Big(\frac{s}{r_4}-1\Big)}.$$

Nyní již stačí dokázat, že neplatí ani $V > 0$, ani $V < 0$. Provedeme to sporem: Předpoklad $V > 0$ je ekvivalentní se vztahem

$$\frac{s}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)-1 < \sqrt{\Big(\frac{s}{r_1}-1\Big)\Big(\frac{s}{r_2}-1\Big)\Big(\frac{s}{r_3}-1\Big)\Big(\frac{s}{r_4}-1\Big)},$$

jehož levá strana je kladná (má minimální hodnotu 7, jak plyne z úlohy 1). Odtud umocněním a dalšími ekvivalentními úpravami zjistíme, že

$$2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right) < \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2.$$

To je spor, neboť z podmínky $V > 0$ a vztahu (6) plyne obrácená nerovnost.

Analogicky lze ověřit, že nemůže platit ani $V < 0$. Je tedy $V = 0$ a tím je vztah [4] dokázán.

Další dílech seriálu se dozvíme, co bylo o polibcích kružnic zjištěno ve starověku a jak tyto poznatky využil *Jakob Steiner* (1796–1863) k obohacení syntetické geometrie o nové poznatky a k prvnímu známému odvození Descartesovy věty. Pokud se rozhodnete řešit následující úlohy, proveďte to nejprve bez aplikace vztahu (1) a pak pro kontrolu s jeho využitím. Výsledky (kromě první a poslední úlohy) i jiné řešené příklady naleznete v publikaci [2].

Úlohy

1. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla r_1, r_2, r_3 a r_4 platí $\left(\sum_{i=1}^{4} r_i\right) \cdot \sum_{i=1}^{4}(1/r_i) \geq 16$.

2. Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtěte poloměr kružnice m. Najděte všechna řešení. (55 MO, C-I-2)

3. Každá z kružnic k_1, k_2, k_3 se dotýká vně zbývajících. Kružnice k_1 má poloměr 1, kružnice k_2 má poloměr 2 a kružnice k_3 má poloměr 3. Vypočítejte poloměry kružnic, které se dotýkají všech třech kružnic k_1, k_2, k_3.

4. Kružnice $l(T; s)$ prochází středem kružnice $k(S; 2\,\mathrm{cm})$. Kružnice $m(U; t)$ se vně dotýká kružnic k a l, přičemž $US \perp ST$. Poloměry s a t vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Určete je. (59 MO, B-II-1)

5. Jsou dány kružnice k_1, k_2 s vnějším dotykem, křivostmi κ_1, κ_2 a společnou tečnou t, která neprochází bodem dotyku obou kružnic. Dokažte, že kružnice, které se dotýkají kružnic k_1, k_2 i tečny t mají křivosti jsou $(\sqrt{\kappa_1} - \sqrt{\kappa_2})^2$ a $(\sqrt{\kappa_1} + \sqrt{\kappa_2})^2$. Jak to souvisí se vztahem (3) a znaménkovou dohodou? (Nápovědu najdete v článku [6].)

Literatura

[1] *Elisabeth of Bohemia – Descartes, R.*: The Correspondence between Princes Elisabeth of Bohemia and René Descartes edited and translated by Lisa Shapiro. The University of Chicago Press, Chicago, 2007.

[2] *Kotlas, M.*: Polibky kružnic (diplomová práce). Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky, České Budějovice, 2011.

[3] *Levitin, K.*: Geometrická rapsódie. SNTL, Praha, 1991.

[4] *Soddy, F.*: The Kiss Precise. Dostupné na: http://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/packing_kiss/kiss.htm

[5] *Verbeek, T.*: The Correspondence of René Descartes 1643. Publications of the Department of Philosophy Utrecht University, Volume XLV, Utrecht, 2003.

[6] *Kanáliková, A. – Pócsová, J.*: Niekoľko príkladov k iracionálnym číslam. MFI, roč. 23 (2014), č. 5., s. 329–336.