# Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 4. 2015 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

### Úloha 211

Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n$ nabývá výraz

$$n^2\left(\frac{n^2+11}{12}\right)+n\left(\frac{3n^2+13}{2}\right)$$

celočíselnou hodnotu. *Stanislav Trávníček*

### Úloha 212

Kružnice $k(S; r=|SA|)$ a $l(A; s)$ se protínají v bodech $P$ a $Q$ $(P \neq Q)$. Nechť pro bod $M$ kružnice $k$ $(P \neq M \neq Q)$ přímka $PM$ protíná kružnici $l$ v bodě $P \neq R$. Pomocí podílu $r/s$ vyjádřete součet kosinů vnitřních úhlů trojúhelníku $MQR$. *Šárka Gergelitsová*

Dále uvádíme řešení úloh 207 až 208, jejichž zadání byla zveřejněna ve čtvrtém čísle loňského (24.) ročníku našeho časopisu.

### Úloha 207

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a$, $b$ platí

$$(a+9)\left(a^2+\frac{1}{a}+\frac{b^2}{8}\right) \geq (a+b+1)^2.$$

Kdy nastane rovnost? *Robert Geretschläger* (Graz)

*Řešení.* Užitím Cauchyho nerovnosti pro trojice čísel

$$\left(1, \sqrt{a}, \sqrt{8}\right) \quad \text{a} \quad \left(a, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{b}{\sqrt{8}}\right)$$

dostaneme

$$(1+a+8)\left(a^2+\frac{1}{a}+\frac{b^2}{8}\right) \geq (a+1+b)^2,$$

což je nerovnost ze zadání, která je splněna pro libovolná kladná reálná čísla $a$, $b$. Rovnost v této nerovnosti nastane, právě když

$$\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{a}}{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{\sqrt{8}}{\frac{b}{\sqrt{8}}},$$

tedy právě když $a=1$, $b=8$.

Správná řešení zaslali: *Jozef Mészáros* z Jelky, *Markéta Calábková*, *Jan Gocník* a *Marian Poljak*, všichni z GJŠ v Přerově, *Ondřej Kincl* z GOP v Praze 5, *Lucien Šíma* z PORG v Praze 8, *Radovan Švarc* z G v České Třebové a *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně.

**Úloha 208**

Dokažte, že ze sedmi libovolně zvolených přirozených čísel lze vybrat čtyři tak, že jejich součet je dělitelný číslem 4.

*Józef Kalinowski* (Kalety)

*Řešení podle Jozefa Mészárose.* Nejprve si uvědomíme, že z libovolné trojice přirozených čísel lze podle Dirichletova principu vybrat dvojici čísel stejné parity. To znamená, že součet vybrané dvojice je sudé číslo.

Tedy ze sedmi daných přirozených čísel lze vybrat dvojici $(a,b)$, jejíž součet je sudé číslo. Ze zbývající pětice opět lze vybrat dvojici čísel $(c,d)$, jejíž součet je sudé číslo. Nakonec ze zbývající trojice lze opět vybrat dvojici $(e,f)$, jejíž součet je sudé číslo.

Protože součty $a+b, c+d, e+f$ jsou sudá čísla, jejich zbytky při dělení čtyřmi jsou buď 0, nebo 2. Podle Dirichletova principu opět z těchto tří součtů lze vybrat dva se stejným zbytkem při dělení čtyřmi. Předpokládejme, že jsou to součty $a+b$ a $c+d$. Potom zbytek při dělení součtu $a+b+c+d$ čtyřmi je 0. Součet čísel $a$, $b$, $c$, $d$ je tedy dělitelný čtyřmi, a to jsme chtěli dokázat.

*Poznámka.* Snadno můžeme ověřit, že z šesti libovolných přirozených čísel obecně nelze vybrat čtyři čísla tak, aby jejich součet byl dělitelný čtyřmi. Stačí uvážit např. šestici 1, 1, 1, 4, 4, 4.

Správná řešení zaslali: *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jan Gocník* a *Marian Poljak*, oba z GJŠ v Přerově, *Ondřej Kincl* z GOP v Praze 5, *Radovan Švarc* z G v České Třebové a *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně.

Neúplné řešení zaslal *Lucien Šíma* z PORG v Praze 8,

*Pavel Calábek*