[3] *Benacka, J.*: Solving J. W. Kittinger's Excelsior III Jump in Excel. In: Spreadsheets in Education. 2011, vol. 5, no. 1. Available on Internet: <http://epublications.bond.edu.au/ejsie/vol5/iss1/1>.

[4] *Kittinger, J. W.*: The long, lonely leap. In: National Geographic. 1960, vol. 118, no. 6, 854–873. Available on Internet: <http://www.scribd.com/doc/36463945/The-highest-longest-and-fastes-free-fall-ever-The–Long-Lonely-Leap> [cit. 2012-03-15]

[5] US Standard Atmosphere 1976 [cit. 2012-0315]. Washington D.C. 1976. Available on Internet: <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19770009539_1977009539.pdf>

[6] *Vachek J. a kol.*: Fyzika pre 1. ročník gymnázia. SPN, Bratislava, 1984.

[7] Drag Coefficient. The Engineering Toolbox [cit. 2.1.2013]. Dostupné na internete: http://www.engineeringtoolbox.com/drag-coefficient-d_627.hmtl.

ZPRÁVY

6. Středoevropská matematická olympiáda

Šestý ročník Středoevropské matematické olympiády (Middle European Mathematical Olympiad – MEMO) se uskutečnil ve dnech 6. – 12. září 2012 ve švýcarském Solothurnu. Soutěže se letos zúčastnilo 60 soutěžících z deseti středoevropských zemí (Švýcarsko, Německo, Rakousko, Slovinsko, Chorvatsko, Maďarsko, Slovensko, Litva, Polsko a Česká republika). Každou zemi reprezentovalo šestičlenné družstvo. Do českého reprezentačního týmu byli pro tento soutěžní ročník vybráni nejúspěšnější účastníci ústředního kola 61. ročníku MO, kteří v uplynulém školním roce (2011/2012) nematurovali a současně v roce 2012 nebyli členy českého reprezentačního družstva na 53. IMO v Argentině.

Složení českého týmu na 6. MEMO bylo následující: *Lubomír Grund* (7/8 GChD Praha 5), *David Hruška* (7/8 G Plzeň, Mikulášské nám.), *Ondřej Hübsch* (7/8 G Praha 6, Arabská), *Štěpán Šimsa* (7/8 GJJ Litoměřice), *Ondřej Skácel* (6/8 G Šternberk) a *Jakub Vančura* (3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.*, z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci a pedagogickým vedoucím byl *doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.*, z Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Jedním z hlavních cílů MEMO je umožnit mladým talentovaným středoškolákům porovnat své matematické znalosti s vrstevníky ze zemí střední Evropy a poznat tak atmosféru mezinárodní matematické soutěže, která probíhá za podobných podmínek jako Mezinárodní matematická olympiáda (IMO). Na rozdíl od IMO, která je pojata jako soutěž jednotlivců (soutěž družstev není podle statutu soutěže považována za oficiální), je první soutěžní den na MEMO vyhrazen vždy soutěži jednotlivců a druhý soutěžní den pak soutěži družstev. V rámci soutěže jednotlivců jsou žákům předloženy vždy 4 soutěžní úlohy, na jejichž řešení mají soutěžící vyhrazeno 5 hodin, v soutěži týmů pak řeší šestičlenná družstva (všech deseti zúčastněných zemí) 8 úloh ve stejném časovém limitu. Na výběru všech dvanácti soutěžních úloh se letos podíleli švýcarští organizátoři společně s vedoucími jednotlivých delegací – členy mezinárodní jury. Je potěšitelné, že pro letošní ročník soutěže vybrala jury také dvě původní české úlohy (obě pro soutěž družstev), jejímiž autory byli *Jaroslav Švrček* (příklad T–1) a *Michal Rolínek* (příklad T–8).

V pátek 7. září zasedala mezinárodní jury, která provedla definitivní výběr všech 12 soutěžních úloh. Jejich texty pak vedoucí jednotlivých delegací přeležili do svých mateřských jazyků. Soutěž jednotlivců se konala v sobotu 8. září 2012, soutěž družstev pak proběhla o den později na jedné ze středních škol v Solothurnu. Každá soutěžní úloha byla přitom hodnocena nejvýše 8 body (s celočíselným bodovacím schématem v rozpětí 0–8 bodů). Následující dva dny probíhala koordinace soutěžních úloh za přítomnosti vedoucích národních týmů. Na poslední den pobytu ve Švýcarsku připravili organizátoři pro všechny účastníky soutěže jednodenní výlet do nedalekého Bernu, jehož závěr tvořila prohlídka Historického muzea, v němž se nachází také ojedinělá expozice věnovaná životu a dílu Alberta Einsteina.

Po návratu z Bernu byli na závěrečném slavnostním večeru oficiálně vyhlášeni vítězové soutěže jednotlivců i soutěže družstev. Vzhledem k tomu, že v letos byly vybrány pro soutěž jednotlivců poměrně obtížné úlohy, udělila jury pouze 2 zlaté, 10 stříbrných a 18 bronzových medailí. Zlaté medaile obdrželi *Kamil Rychłewicz* z Polska se ziskem 25 bodů a *Attila Szabó* z Maďarska, který získal 24 bodů. Tři naši reprezentanti si ze Solothurnu přivezli domů bronzové medaile, a to *Štěpán Šimsa, David Hruška a Lubomír Grund.* V soutěži týmů stanovila jury následující pořadí: 1. Polsko (56 b.), 2. Maďarsko (46 b.), 3. Chorvatsko (45 b.), 4. Slovensko (42 b.), 5. Německo (40 b.), 6. *Česká republika* (39 b.), 7. Litva (32 b.), 8. Rakousko (24 b.), 9. Švýcarsko (23 b.) a 10. Slovinsko (17 b.). Náš tým se tak letos zařadil k silnému středu tabulky.

Na závěr přikládáme přehled všech soutěžních úloh. V závorce je uvedena země, která úlohu navrhla.

Soutěž jednotlivců

(8. září 2012)

Příklad I–1

Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že rovnost

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$$

platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$.

(*Chorvatsko*)

Příklad I–2

Nechť N je přirozené číslo. Množinu $S \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ nazveme *dobrou*, jestliže neobsahuje tři navzájem různá čísla a, b, c, taková, že a dělí b a současně b dělí c. Určete největší možný počet prvků, který může mít dobrá množina S.

(*Maďarsko*)

Příklad I–3

Je dán lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB. Přímka BD je osou úhlu ADC. Rovnoběžka s AD, která prochází bodem C, protíná úsečky BD a AB po řadě v bodech E a F. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku BEF. Předpokládejme, že $|\sphericalangle ACO| = 60°$. Dokažte rovnost

$$|CF| = |AF| + |FO|.$$

(*Chorvatsko*)

Příklad I–4

Posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je definována vztahy: $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ a

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1}$$

pro všechna přirozená čísla n. Určete všechna prvočísla p, pro něž existuje přirozené číslo m takové, že p je dělitelem $a_m - 1$.

(*Švýcarsko*)

Soutěž družstev

(9. září 2012)

Příklad T–1

Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 2x^3 + 1 &= 3zx, \\ 2y^3 + 1 &= 3xy, \\ 2z^3 + 1 &= 3yz. \end{aligned}$$

(*Česká republika*)

Příklad T–2

Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, jejichž součin je roven 1. Dokažte, že platí nerovnost

$$\sqrt{9 + 16a^2} + \sqrt{9 + 16b^2} + \sqrt{9 + 16c^2} \geq$$
$$\geq 3 + 4(a + b + c).$$

(*Německo*)

Příklad T–3

Nechť n je přirozené číslo. Uvažujme slova délky n, která jsou vytvořena písmeny z množiny $\{M, E, O\}$. Označme a počet všech slov obsahujících sudý počet (uvažujte také 0) bloků ME a sudý počet (uvažujte také 0) bloků MO. Podobně označme b počet všech slov obsahujících lichý počet bloků ME a lichý počet bloků MO. Dokažte, že $a > b$.

(*Polsko*)

Příklad T–4

Nechť $p > 2$ je prvočíslo. Pro každou permutaci $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(p))$ prvků množiny $S = \{1, 2, \ldots, p\}$ nechť $f(\pi)$ značí počet všech násobků prvočísla p, které se vyskytují mezi následujícími p čísly

$$\pi(1), \pi(1)+\pi(2), \ldots, \pi(1)+\pi(2)+\ldots+\pi(p).$$

Určete průměrnou hodnotu $f(\pi)$ uvažovanou pro všechny permutace π prvků množiny S.

(*Maďarsko*)

Příklad T–5

Nechť K je střed strany AB daného trojúhelníku ABC. Označme L a M po řadě body na jeho stranách AC a BC, pro něž platí $|\sphericalangle CLK| = |\sphericalangle KMC|$. Dokažte, že kolmice ke stranám AB, AC a BC, které procházejí po řadě body K, L a M, se protínají ve společném bodě.

(*Polsko*)

Příklad T–6

Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, který nemá rovnoběžné protilehlé strany, v němž platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA|$. Dále nechť průsečíky os všech dvojic sousedních vnitřních úhlů daného čtyřúhelníku $ABCD$ tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníku $EFGH$. Označme K průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $EFGH$. Dokažte, že přímky AB a CD se protínají na kružnici opsané trojúhelníku BKD.

(*Chorvatsko*)

Příklad T–7

Určete všechny trojice (x, y, z) přirozených čísel vyhovující soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x^y + y^x &= z^y, \\ x^y + 2012 &= y^{z+1}. \end{aligned}$$

(*Litva*)

Příklad T–8

Pro každé přirozené číslo n označme $d(n)$ počet všech jeho kladných dělitelů. Rozhodněte, zda existují přirozená čísla a a b taková, že $d(a) = d(b)$, $d(a^2) = d(b^2)$ a současně $d(a^3) \neq d(b^3)$.

(*Česká republika*)

Příští (7.) ročník MEMO se bude konat na základě oficiálního pozvání od 22. do 28. srpna 2013 v maďarském Veszprému.

Jaroslav Švrček