MATEMATIKA

Stavby z kostek

OLDŘICH ODVÁRKO – JARMILA ROBOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Při výuce budoucích učitelů matematiky se řadu let setkáváme s tím, že studenti mívají problémy s pochopením a znázorňováním prostorových situací. Jde například o načrtnutí možných poloh tří rovin v prostoru, o sestrojení řezů jehlanů či o zakreslení sítě „složitějšího" mnohostěnu. Přitom se již běžně předpokládá, že uvedené dovednosti získali žáci na základní a střední škole.

S cílem zlepšit přípravu budoucích učitelů na MFF UK v Praze jsme se rozhodli inovovat některé didakticko-metodické předměty tak, aby byly vytvořeny optimální podmínky pro prohlubování geometrické představivosti našich studentů. Naší snahou je dát jim dostatečné základy k tomu, aby byli v budoucnu ve své pedagogické praxi schopni systematicky rozvíjet představivost svých žáků. Tyto snahy jsou podpořeny rozvojovým projektem MŠMT *Inovace didaktické přípravy v studijním oboru „Matematika zaměřená na vzdělávání"*.

Z pohledu psychologů jsou pro rozvoj geometrické představivosti důležitá především období předškolního a mladšího školního věku. I později lze ale geometrické myšlení a prostorovou představivost studentů rozvíjet, i když jde o pomalejší a dlouhodobější proces, ve kterém se využívá především logické myšlení jedince. Pro rozvoj představivosti je důležitý vlastní prožitek a zkušenost. Je proto nezbytné, aby žák pracoval v hodinách geometrie s prostorovými objekty, např. s modely těles včetně jejich sítí, a modeloval si prostorové situace.

V přijímacích zkouškách na víceletá gymnázia i na čtyřleté střední školy se vyskytují úlohy na obarvování stěn krychle, jak ukazuje následující ilustrační příklad.

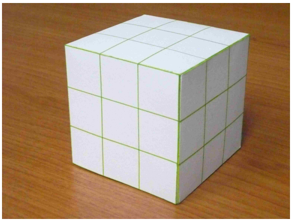
Krychle je obarvena na bílo a rozřezána na 27 shodných krychliček (obr. 1).

a) Kolik z nich bude mít bílou právě jednu stěnu?

b) Kolik z nich bude mít bílé právě dvě stěny?

c) Kolik z nich bude mít bílé právě tři stěny?

d) Kolik z nich nebude mít obarvenou ani jednu stěnu?



Obr. 1

Obr. 2

Uvedený příklad činí obtíže těm žákům, kteří vycházejí pouze z obrázku a nepředstaví si dané těleso. V tom případě uvažují často jen krychličky ve třech viditelných stěnách zobrazené krychle. Úloha d) je ze zadaných úkolů nejtěžší; častá odpověď zní *nula*.[1]

Skládání a obarvování krychlí

Ukážeme si jednu z možností, jak lze žáky přivést k úspěšnému řešení příkladů na obarvování krychlí s podporou modelů. Při práci může učitel pro demonstrační účely používat papírové modely krychle a pohádkové kostky (obr. 2). Pokud pohádkové kostky přinesou i žáci z domova, mohou s nimi pracovat ve skupinách v lavicích. V další části článku předpokládáme tuto variantu.

Nejdříve se budeme zabývat jednou kostkou, na které si žáci zopakují počty stěn, počty hran a počty vrcholů krychle. Odpověď na otázku, kolik stěn této krychle je třeba obarvit, je v tomto případě velmi jednoduchá.

Pokračujeme následujících úkolem: *Sestavte krychli, která je složena z většího počtu kostek. Kolik kostek je k tomu potřeba nejméně?*

Úkol můžeme modifikovat tak, že k jedné kostce přiložíme druhou kostku (obr. 3) a žáci mají doplnit toto těleso tak, aby vznikla krychle složená z co nejmenšího počtu kostek. (Lze očekávat, že někteří žáci v tomto případě vytvoří v první chvíli těleso-kvádr složené z $2 \times 2 \times 1$ kostek.) Získali jsme

[1] To potvrdilo i šetření mezi žáky základních a středních škol, které jsme realizovali společně s RNDr. Ivou Malechovou, CSc. v roce 2002.

krychli, která je složena z $2\times2\times2$ kostek, stručně krychli $2\times2\times2$ (obr. 4). Žáci by si měli všimnout, že počet vrcholů, hran a stěn výsledné krychle se nemění.

Obr. 3

Obr. 4

Následuje další úkol: *Představte si, že bychom celou tuto krychli (obr. 4) natřeli bílou barvou. Kolik bíle obarvených stěn budou mít jednotlivé kostky, ze kterých je krychle složena? Nezapomeňte na dolní podstavu krychle.*

I zde je snadná odpověď – každá kostka má právě tři stěny obarvené bílou barvou. Uvedený úkol můžeme doplnit otázkou, jak by se situace změnila, pokud bychom dolní podstavu krychle nenatírali.

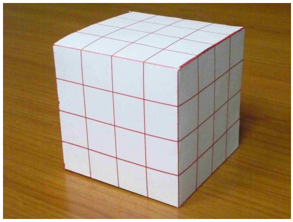
Zadaný úkol dále rozvíjíme. Žáci mají nyní doplnit krychli složenou z $2\times2\times2$ kostek tak, aby opět vznikla krychle a byl použit co nejmenší počet kostek. Můžeme také postupovat tak, že k již vytvořené krychli (obr. 4) přidáme jednu kostku (obr. 5) a požadujeme na žácích, aby řešili stejný úkol. V obou případech získají krychli složenou z 27 kostek (obr. 6).

Obr. 5

Obr. 6

Úloha na obarvení krychle $3\times3\times3$ je již zajímavější. Můžeme zadávat žákům stejné úkoly, jako jsou v úloze na začátku článku. Za vhodnější variantu však považujeme začít tím, jaký je největší možný počet obarvených stěn na jedné kostce v krychli a kolik takových kostek v krychli je. Pak lze zjišťovat, kolik kostek v krychli má menší počet obarvených stěn, jaké jsou možnosti a počty obarvených stěn na jedné kostce. Žáci by tak postupně měli určit, kolik kostek má obarvené 3 stěny, 2 stěny a 1 stěnu. Důležité pro úspěšné řešení je, aby žáci nezapomněli na kostky v dolní podstavě krychle; k tomu lze např. využít papírový model krychle s naznačenými řezy (obr. 1). Klíčovou otázkou je, zda každá kostka má aspoň jednu stěnu obarvenou, tj. zda žáci sami přijdou na to, že jedna taková kostka uvnitř krychle existuje. O tom se mohou přesvědčit rozebráním krychle (obr. 7).

Obr. 7

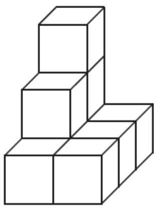


Obr. 8

Lze vytvořit řadu dalších úkolů, ve kterých klademe na krychli $3 \times 3 \times 3$ další požadavky – neobarvíme jednu stěnu krychle, případně dvě stěny, nebo odebereme ze stavby některé kostky a řešíme opět úlohy na počty obarvených stěn kostek v dané stavbě. Takovým tělesům budeme v tomto článku říkat *krychlová tělesa*, přičemž mezi ně počítáme i krychli.

Navazující příklad krychle složené ze $4 \times 4 \times 4$ kostek je už obtížné reálně modelovat vzhledem k počtu 64 potřebných kostek. Můžeme však použít papírový model krychle s naznačenými řezy (obr. 8) a řešit obdobné úkoly jako pro krychli $3 \times 3 \times 3$. Žáci by postupně měli určit, že právě tři obarvené stěny má 8 kostek u vrcholů krychle, právě dvě obarvené stěny má 24 kostek (u každé hrany krychle jsou 2 takové kostky) a právě jednu obarvenou stěnu má 24 kostek (v každé stěně krychle jsou 4 takové kostky). Nejtěžší na představivost je úkol, kolik kostek nemá žádnou stěnu obarvenou. V tomto případě žákům může opět pomoci naznačený model z kostek (obr. 9), aby dospěli k závěru, že takových kostek je 8.

Obr. 9



Obr. 10

Uvedené úlohy jsou vhodné pro 6. ročník základní školy nebo pro odpovídající ročník víceletého gymnázia. Obtížnost úloh se stupňuje s rostoucím počtem kostek, ze kterých krychli vytváříme. V tématu o algebraických výrazech, které bývá zařazeno v 8. ročníku, lze řešit úlohu na obarvení krychle, která je složena z $n \times n \times n$ kostek, kde n je libovolné přirozené číslo. Pro větší n si žáci tuto situaci jen obtížně představí, mohou však vycházet například ze zkušenosti s krychlí $4 \times 4 \times 4$. Počet kostek v krychli, které mají obarvené právě tři stěny je stále stejný, a to 8; jedná se o kostky u vrcholů krychle. Počet kostek, které mají obarvené právě dvě stěny, je $12(n-2)$; tyto kostky se vyskytují u každé hrany krychle mimo „vrcholových" kostek. Kostky s právě jednou obarvenou stěnou tvoří „vnitřky stěn krychle" bez „hraničních" kostek; v každé stěně je jich $(n-2)^2$, celkem $6(n-2)^2$. Kostky, které nemají žádnou stěnu obarvenou, tvoří vnitřní „jádro" ve tvaru krychle o délce hrany $n-2$ kostek; celkem tedy „jádro" obsahuje $(n-2)^3$ kostek.

A zde je velmi pěkná příležitost pro úpravy algebraických výrazů. Žáci by měli zkontrolovat, že součet počtů uvedených kostek dává n^3 a že tedy platí

$$8 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-2)^3 = n^3.$$

Pokud žáci neznají vzorec pro třetí mocninu dvojčlenu, lze výraz na levé straně vytýkáním upravit na tvar

$$8 + (n-2)\big[12 + 6(n-2) + (n-2)^2\big].$$

Žáci mohou také zpětně ověřit, že pro $n = 2, 3, 4$ je skutečně počet kostek v „jádru" krychle roven

$$(n-2)^3.$$

Můžeme pokračovat úkolem, aby žáci vyjádřili počet kostek, které je třeba doplnit ke krychli $n \times n \times n$ tak, aby vznikla krychle $(n+1) \times (n+1) \times (n+1)$:

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

Ze získaného výsledku je vidět, že se přidává vždy lichý počet kostek.

Črtání a rýsování krychlových těles

Pří skládání a obarvování krychlí je účelné vést žáky k črtání a rýsování příslušných prostorových útvarů. Používáme přitom volné rovnoběžné promítání, kdy kolmice k nákresně zobrazujeme nejčastěji jako přímky s odchylkou 45° od vodorovného směru a délky na nich zkracujeme na polovinu.

Jedná se zejména o vyznačení vedení řezů na krychli $3 \times 3 \times 3$ a krychli $4 \times 4 \times 4$ (obr. 1, obr. 8). Pokud žáci tyto úlohy zvládnou, je možné věnovat se dalším úkolům. Předloží se náčrtek stavby z kostek (obr. 10) a žáci k němu sestavují reálný model. Dále lze pokračovat v črtání a rýsování těles, která vznikla odebráním několika kostek z původní krychle; přitom mají žáci vyznačit i hrany těch kostek, které jsou po odebrání vidět.

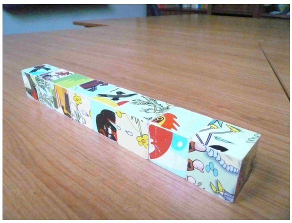
Výpočty povrchů krychlových těles

Při vytváření krychlových těles z kostek se zcela přirozeně nabízejí úlohy na výpočty jejich povrchů.

Pro ilustraci si ukážeme několik úloh.

Které z uvedených krychlových těles (obr. 11, 12, 13, obr. 4) sestavených z 8 kostek má největší povrch? (Krychlové těleso na obr. 12.) *A které z nich má nejmenší povrch?* (Krychle $2 \times 2 \times 2$ na obr. 4.)

Obr. 11



Obr. 12

Obr. 13

Z krychle $2 \times 2 \times 2$ *odebereme jednu kostku. Je povrch vzniklého krychlového tělesa větší, stejný, nebo menší než povrch dané krychle?* (Povrch je stejný.)

Odeberte z krychle $2 \times 2 \times 2$ *právě 2 kostky tak, aby povrch vzniklého tělesa byl roven povrchu dané krychle.* (Viz obr. 14.)

Z krychle $3 \times 3 \times 3$ *odeberte jednu kostku tak, aby povrch výsledného krychlového tělesa byl větší než povrch krychle.* (Viz např. obr. 15.)

Další úlohy na črtání a rýsování krychlových těles a na výpočty jejich povrchu lze nalézt v uvedené literatuře.

Obr. 14

Obr. 15

L i t e r a t u r a

[1] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika [3] pro 6. ročník základní školy. Prometheus, Praha, 2011.

[2] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Pracovní sešit z matematiky pro 6. ročník základní školy. Prometheus, Praha, 2011.

Polibky kružnic: Archimedes

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Z arabských překladů Thabita ibn Qurry (836–901) jsou známy dvě práce, v nichž Archimedes (387–212 př. n. l.) zkoumal vlastnosti různých konfigurací kružnic a přímek. První z nich, *Kniha o dotycích kruhů*, je dostupná snad jen z Rozenfeldova překladu [1, s. 422–440] do ruštiny. Na konci článku z ní uvedeme několik úloh. Druhý spis, *Kniha lemmat* ([5, s. 301–318] nebo [1, s. 391–400]), byl doplněn arabským učencem Almochtassem Abilhasanem Hali Ben Ahmadem. Nelze v něm přesně rozlišit, co je původní a co bylo přidáno později. Není však pochyb, že poznatky o arbelu (obuvnickém noži) pochází od Archimeda. Seznámíme se s nimi.

Věta L1[1]

Mají-li kružnice $m(M; r_1)$ a $n(N; r_2)$ s vnitřním dotykem v bodě T rovnoběžné průměry AB a CD (označené v souladu s obr. 1), pak bod

[1] Písmenem L označujeme věty z Knihy lemmat a písmenem K věty z Knihy o dotycích kružnic. Číslo odpovídá pořadovému číslu věty v příslušné publikaci. Texty vět a důkazů, i symboly, jsem upravil do dnešní formy vyjadřování, obsah je zachován.