Obr. 14

Obr. 15

Literatura

[1] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika [3] pro 6. ročník základní školy. Prometheus, Praha, 2011.

[2] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Pracovní sešit z matematiky pro 6. ročník základní školy. Prometheus, Praha, 2011.

Polibky kružnic: Archimedes

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

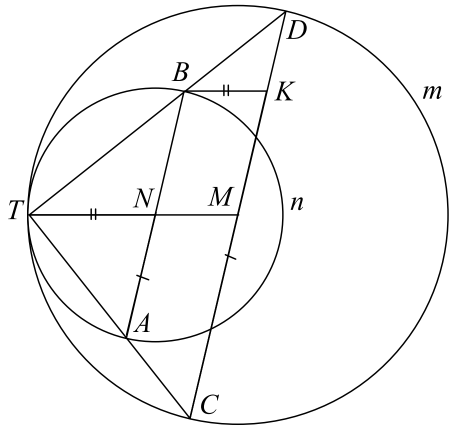
Z arabských překladů Thabita ibn Qurry (836–901) jsou známy dvě práce, v nichž Archimedes (387–212 př. n. l.) zkoumal vlastnosti různých konfigurací kružnic a přímek. První z nich, *Kniha o dotycích kruhů*, je dostupná snad jen z Rozenfeldova překladu [1, s. 422–440] do ruštiny. Na konci článku z ní uvedeme několik úloh. Druhý spis, *Kniha lemmat* ([5, s. 301–318] nebo [1, s. 391–400]), byl doplněn arabským učencem Almochtassem Abilhasanem Hali Ben Ahmadem. Nelze v něm přesně rozlišit, co je původní a co bylo přidáno později. Není však pochyb, že poznatky o arbelu (obuvnickém noži) pochází od Archimeda. Seznámíme se s nimi.

Věta L1[1]

Mají-li kružnice $m(M; r_1)$ a $n(N; r_2)$ s vnitřním dotykem v bodě T rovnoběžné průměry AB a CD (označené v souladu s obr. 1), pak bod

[1] Písmenem L označujeme věty z Knihy lemmat a písmenem K věty z Knihy o dotycích kružnic. Číslo odpovídá pořadovému číslu věty v příslušné publikaci. Texty vět a důkazů, i symboly, jsem upravil do dnešní formy vyjadřování, obsah je zachován.

B leží na přímce TD a bod A na přímce TC. Analogické tvrzení platí i tehdy, když mají kružnice vnější dotyk.



Obr. 1 K důkazu věty L1

Z dnešního pohledu je věta zřejmým důsledkem stejnolehlosti kružnic. Archimedes ji dokázal výpočtem velikosti úhlu TBD. Využil rovnoběžník $KBNM$ a podobnost rovnoramenných trojúhelníků BTN a DBK (obr. 1).

Arbelos

Je-li AB úsečka s vnitřním bodem C, pak útvar ohraničený polokružnicemi m, n a k umístěnými po řadě nad průměry AB, AC a CB v téže polorovině s hraniční přímkou AB nazveme *arbelos* ABC.

Věta L5

Jestliže v arbelu ABC označíme t společnou tečnu kružnic k a n s bodem dotyku C (obr. 2), pak kružnice vepsané do útvarů ohraničených čarami m, n, t a m, k, t jsou shodné.

Důkaz. V souladu s obr. 2 označme u a v vepsané kružnice, HE průměr kružnice u rovnoběžný s úsečkou AB a F, G body dotyku kružnice u s polokružnicemi m, n. Podle věty L1 jsou (A, H, F), (B, E, F), (A, G, E) a (C, G, H) kolineární trojice bodů.

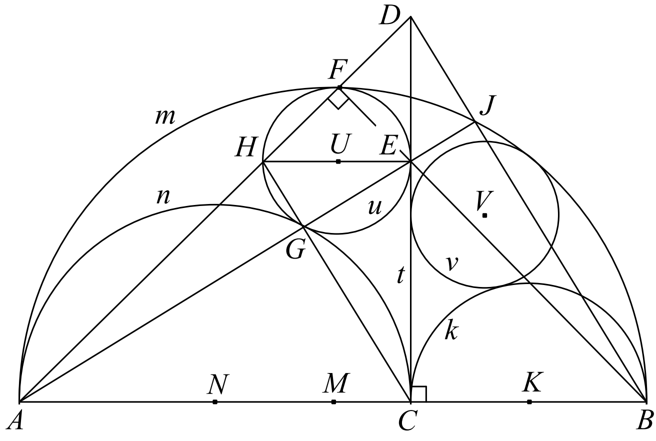
Nechť je dále D průsečík přímky AF s tečnou t a J průsečík polokružnice m s přímkou AE. Bod E je ortocentrum trojúhelníku ABD, neboť je průsečíkem jeho výšek BF a DC. Je tedy $AE \perp BD$. Podle Thaletovy věty je pravý i úhel AJB. To znamená, že bod J leží na přímce BD a $BD \parallel CH$. Odtud a z faktu, že i $AC \parallel HE$, plyne

$$|AB| : |BC| = |AD| : |DH| = |AC| : |HE|$$

a pro průměr $d = |HE|$ kružnice u dostáváme

$$d = \frac{|AC| \cdot |CB|}{|AB|}. \tag{1}$$

Ze symetrie vztahu je zřejmé, že totéž platí pro průměr d' kružnice v. Kružnice u a v jsou shodné. $\square$



Obr. 2 K důkazu věty L5

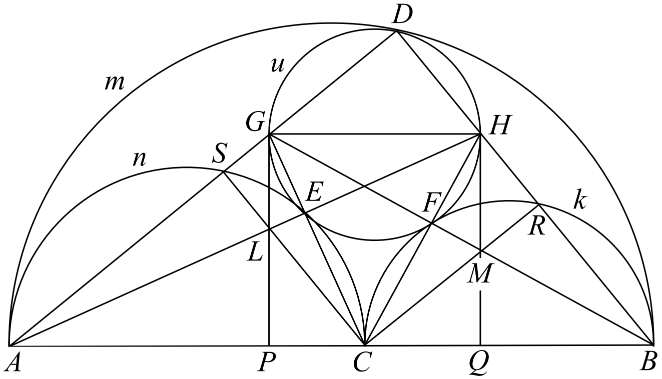
Problém L6

V arbelu ABC je $|AC| : |CB| = 3 : 2$ (nebo jiný poměr). Určete poměr $|GH| : |AB|$, kde GH je průměr kružnice u vepsané do arbelu.

Řešení. Nechť $GH \parallel AB$ a D, E, F jsou po řadě body dotyku kružnice u s polokružnicemi m, n, k (obr. 3). Podle věty L1 jsou (D, G, A), (D, H, B), (E, A, H), (E, C, G), (F, B, G) a (F, C, H) kolineární trojice bodů.

Označme ještě R průsečík úsečky BD s polokružnicí k, S průsečík úsečky AD s polokružnicí n a L, M, P, Q průsečíky přímek CS a AE, CR a BF, GL a AB, HM a AB (v uvedeném pořadí).

Podle Thaletovy věty jsou úhly AEC, ASC, CFB a CRB pravé, tedy L je ortocentrem trojúhelníku ACG a M ortocentrem trojúhelníku CBH. Přímky GL a HM jsou kolmé na AB a platí $GP \parallel HQ$.



Obr. 3 K řešení problému L6

Z faktů $CS \parallel BD$ a $GP \parallel HQ$ dostáváme

$$|AC| : |CB| = |AL| : |LH| = |AP| : |PQ| \tag{2}$$

a ze vztahů $CM \parallel AG$ a $HQ \parallel GP$ analogicky plyne

$$|BC| : |CA| = |BM| : |MG| = |BQ| : |QP|. \tag{3}$$

Vztahy (2) a (3) vedou k rovnosti

$$|AP| : |PQ| = |PQ| : |QB|. \tag{4}$$

Délky $|AP|$, $|PQ|$ a $|QB|$ jsou tedy po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem

$$q = \frac{|AP|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{3}{2}.$$

(Archimedes napsal, že úsečky AP, PQ a QB jsou v *souvislém poměru*.) Odtud plyne

$$|BQ| : |QP| : |PA| : |AB| = 4 : 6 : 9 : 19,$$

resp. pro

$$|AC| : |CB| = \lambda : 1$$

dostaneme

$$|BQ| : |QP| : |PA| : |AB| = 1 : \lambda : \lambda^2 : \bigl(1 + \lambda + \lambda^2\bigr).$$

Závěr. Platí

$$|GH| = |PQ| = \frac{6}{19}|AB|, \quad \text{resp.} \quad \frac{|GH|}{|AB|} = \frac{\lambda}{1 + \lambda + \lambda^2}.$$

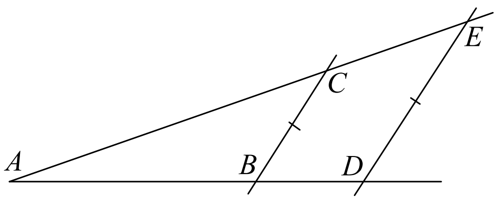
Komentář. Když v daném pořadí označíme r_1, r_2 a x poloměry kružnic n, k a u, má kružnice m poloměr $r_1 + r_2$ a $\lambda = r_1/r_2$. Výsledek problému L6 pak můžeme upravit na tvar

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^3 - r_2^3} \cdot r_1 r_2. \tag{5}$$

Uvádí se, že Thales z Milétu (624–547 př. n. l.) určoval výšky pyramid a vzdálenosti lodí na moři pomocí podobnosti trojúhelníků. Jestliže je ABC trojúhelník a D, E body, které leží po řadě na přímkách AB, AC a zároveň na rovnoběžce s přímkou AB, pak platí

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}. \tag{6}$$

Toto tvrzení se v řadě zemí nazývá *Thaletova věta*. Bylo jedním z klíčových bodů Archimedovy argumentace. Odvolával se na rovnoběžnost přímek, nikoliv na podobnost trojúhelníků. Dnes bychom užili rčení, že *rovnoběžné promítání zachovává poměry odpovídajících si úseků na přímkách různoběžných se směrem promítání.*



Obr. 4 Thaletova věta o podobnosti

V obou postupech Archimedes nejprve uplatnil větu o průsečíku výšek trojúhelníku k důkazu rovnoběžnosti vhodných přímek a pak našel potřebné vztahy pomocí rovnoběžných průmětů. Brilantní úvahy, jimž neubylo na svěžesti ani po dvou tisíciletích.

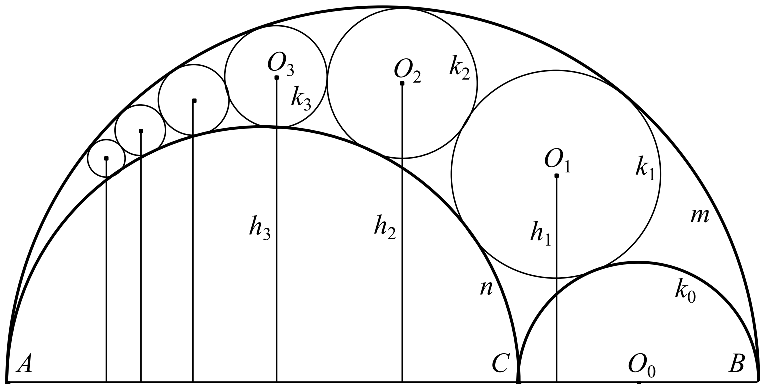
Občas se můžeme setkat z názorem, že věta o průsečíku výšek v trojúhelníku nebyla ve starověkém Řecku známa, protože se nevyskytuje v Euklidových Základech. Archimedes ji znal a má se za to, že ji odvodil. Podle [8] pocházejí její první známé korektní důkazy až ze 17. století a ortocentrum trojúhelníku se ve starších publikacích nazývá *Archimedův bod.*

Ve čtvrtém století Archimedovy poznatky obdivuhodně doplnil Pappos Alexandrijský. Dokázal zřejmě již starší hypotézu o řetězci kružnic vepsaných do arbelu.

Pappova věta o kružnicích

Do daného arbelu ABC vepišme kružnici k_1, aby se dotýkala hraničních polokružnic m, n a k_0. Dále vepíšeme kružnici k_2 do útvaru ohraničeného čarami m, n a k_1 a postup analogicky opakujeme. Vytvoříme tak řetězec kružnic $k_1, k_2, k_3, \ldots$ (obr. 5). Jsou-li $O_1, O_2, O_3, \ldots$ po řadě středy kružnic řetězce a h_1, h_2, $h_3, \ldots$ vzdálenosti těchto středů od přímky AB, platí

$$h_1 = d_1, h_2 = 2d_2, h_3 = 3d_3, \ldots . \tag{7}$$

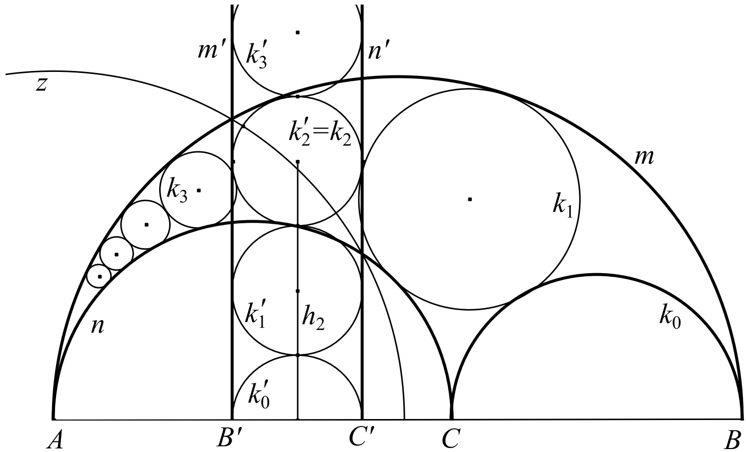


Obr. 5 Řetězec kružnic vepsaných do arbelu

Důkaz. V komentovaném překladu [7] čtvrtého dílu Pappovy Sbírky pokrývá důkaz věty o kružnicích 16 stránek. Dnes ji umíme zdůvodnit jediným obrázkem, k němuž znalec kruhové inverze snad ani nepotřebuje následující komentář.

V kruhové inverzi, jejíž základní kružnice z má střed v bodě A a navíc je ortogonální k j-té kružnici Pappova řetězce (obr. 6 pro $j = 2$), se kružnice k_j zobrazí na sebe. Kružnice m a n se inverzí zobrazí na tečny m' a n'

kružnice k_j, přičemž $m' \perp AB$ a $n' \perp AB$. Kruhová inverze zachovává body dotyku. Obrazy ostatních kružnic tedy vytváří v pásu $m'n'$ řetězec kružnic shodných s kružnicí k_j. Zřejmě je $h_j = 2jr_j = jd_j$. □



Obr. 6 Důkaz užitím kruhové inverze

Některé další poznatky o arbelu najde čtenář v článcích [4] a [10]. O Archimedovi a Descartesovi se lze více dozvědět v publikacích [2] a [3].

Z úloh uvedených níže jsou poslední čtyři převzaty z Archimedova spisu *O dotycích kruhů*. Úloha K21 má úzký vztah ke kruhové inverzi, podle Rozenfelda známé již Apolloniovi z Pergy (262–190 př. n. l.), a k tzv. Apolloniově kružnici, kterou používal Aristoteles (384–322 př. n. l.) při zdůvodňování kruhového tvaru duhy [9, s. 113–116]. S úlohou K22 souvisí některé novodobé poznatky z geometrie trojúhelníku (viz např. [6, s. 1–16]).

Úlohy

1. Nechť AB je úsečka s vnitřním bodem C a m, n, k jsou po řadě kružnice s průměry AB, AC, CB. Poloměry menších dvou kružnic označíme r_1 a r_2. Pomocí Descartesovy věty (viz vztah (1) z předchozího dílu seriálu) dokažte, že poloměr x každé kružnice, která se dotýká kružnic m, n a k je dán vztahem (5) z tohoto článku.
2. (L4) V arbelu ABC označme D průsečík největší hraniční polokružnice se společnou tečnou menších polokružnic sestrojenou v bodě C. Dokažte, že obsah arbelu je roven obsahu kruhu o průměru CD.

3. (K1) V rovině je dáno několik kruhů se středy na téže přímce a každý z nich se se vně dotýká svých sousedů. Dokažte, že všechny tyto kruhy mají společnou tečnu, právě když jsou jejich poloměry po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.
4. (K8) V rovině je dána úsečka AB s vnitřním bodem C, kružnice m s průměrem AC a kružnice n s průměrem CB. Tečna z bodu A se dotýká kružnice n v bodě D a tečna z bodu B se dotýká kružnice m v bodě E. Dokažte, že pro obsahy kruhů ohraničených kružnicemi platí $S_m : S_n = |AD|^4 : |BE|^4$.
5. (K21) V rovině je dána kružnice k s průměrem CD a uvnitř polopřímky opačné k polopřímce CD je zvolen bod A. Tečna z bodu A ke kružnici k má bod dotyku T a pata kolmice z bodu T na přímku CD je označena B. Dokažte, že
$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|}.$$
6. (K22) Nechť C je vnitřní bod oblouku AB dané kružnice. Pak pata kolmice ze středu tohoto oblouku na delší z tětiv AC a CB dělí lomenou čáru ACB na dvě části stejné délky. Dokažte.

Literatura

[1] *Archimed*: Sočiněnija. Dostupné na: http://www.math.ru/lib/book/djvu/klassik/arhimed.djvu

[2] *Bečvář, J.*: René Descartes. Prometheus, Praha, 1998.

[3] *Bečvář, J. – Štoll, I.*: Archimedes. Prometheus, Praha, 2005.

[4] *Bečvář, J. – Švrček, J.*: Arbelos. MFI, roč. 14, č. 9, s. 513–523.

[5] *Heath, T. L.*: The Works of Archimedes. Cambridge University Press, Cambridge, 1897. Dostupné na: https://archive.org/details/worksofarchimede029517mbp

[6] *Honsberger, R.*: Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. The Mathematical Association of America, Washington, 1995.

[7] *Pappus of Alexandria*: Book 4 of the Collection. Edited With Translation and Commentary by Heike Sefrin-Weis. Springer, London, 2010.

[8] *Ostermann, A. – Wanner, G.*: Geometry by Its History. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2012.

[9] *Rozenfeld, B. A.*: Apollonij Pergskij. MCNMO, Moskva, 2004. Dostupné na: http://www.math.ru/lib/book/pdf/ap_of_pe.pdf

[10] *Švrček, J.*: Archimedův arbelos. Sborník podzimní školy MAKOS'04, JČMF, Ústí nad Labem, 2005.