Dělení úsečky

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V tomto článku se budeme zabývat sadou geometrických úloh, které jsou tematicky podobné. Liší se jen hodnotou jednoho parametru.

Budeme zde hledat postup, jak sestrojit bod, který dělí úsečku AB v poměru $1 : (k-1)$, kde k je přirozené číslo, $k > 1$.

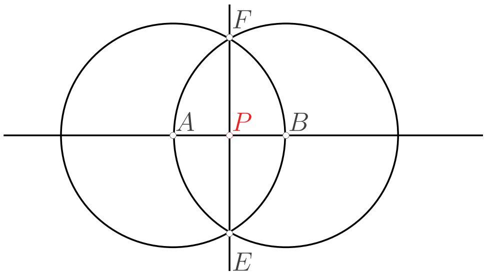
Při konstrukcích budeme používat pouze pravítko (bez měřítka), tedy přímku určenou dvěma body, a kružítko, tedy kružnici danou středem a poloměrem získaným jako vzdálenost nějakých dvou již sestrojených bodů. Půjde tedy o ryze eukleidovské konstrukce. Vzdáváme se tak obvykle využívaných nástrojů „dva trojúhelníky“ či „trojúhelník s ryskou“, takže elementární konstrukce nejsou ani rovnoběžka s danou přímkou vedená daným bodem, ani kolmice k dané přímce vedená daným bodem.

Budeme se přitom snažit, aby tyto konstrukce byly co nejkratší. Délkou konstrukce rozumíme počet kroků a za jeden *krok konstrukce* budeme považovat sestrojení jedné kružnice nebo přímky a všech jejích průsečíků s dosud sestrojenými přímkami a kružnicemi. Abychom obrázky nezaplnili nepotřebnými informacemi, vyznačíme v nich vždy jen ty průsečíky, které v dalších krocích konstrukce opravdu využijeme, nebo jsou hledaným výsledkem konstrukce.

Jedna polovina

Sestrojit bod, který dělí (nenarýsovanou) úsečku AB v poměru $1 : 1$, tj. její střed, je snadné. Stačí sestrojit dvě kružnice, z nichž každá má střed v jednom z krajních bodů úsečky a prochází druhým (obr. 1). Tyto kružnice se jistě protnou a přímka určená jejich průsečíky protíná přímku určenou body A, B v bodě P, který je střed úsečky AB. Tento postup, který vidíme na obr. 1, tedy vyžaduje sestrojení dvou přímek a dvou kružnic, má proto délku 4.

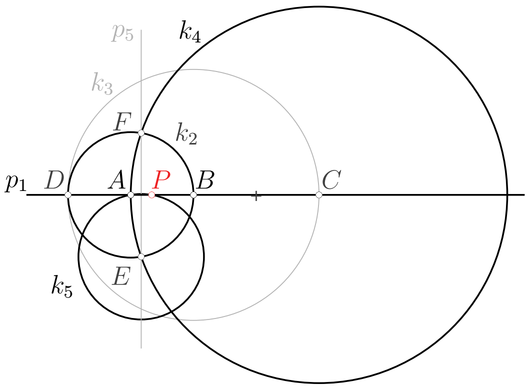
Tato konstrukce je snadná. Co kdybychom ale chtěli sestrojit bod, který dělí danou úsečku ne na polovinu, ale v nějakém jiném poměru? Dokážeme to? A kolik k tomu budeme potřebovat kroků?



Obr. 1 Konstrukce jedné poloviny

Jedna třetina a obecný postup

Konstrukci bodu v jedné třetině úsečky AB vidíme na obr. 2. Stačí k tomu pět kroků.



Obr. 2 Konstrukce jedné třetiny

Indexy v označení přímek a kružnic udávají pořadí kroku, ve kterém budou v konstrukci sestrojeny. Pokud bude z obrázku patrné, jak jsou přímky či kružnice určeny, nebudeme postup konstrukce zapisovat.

Kružnice k_4, která je předposledním krokem konstrukce, bude mít analogii v několika dalších konstrukcích. Pro přehlednost budeme středy těchto „předposledních" kružnic všude značit shodně písmenem C.

Navíc je z obr. 2 zřejmé, že sestrojíme-li v pátém kroku konstrukce místo kružnice k_5 přímku $p_5 = EF$ (zobrazena tenkou čarou), protne přímku $p_1 = AB$ v bodě, který leží v jedné šestině úsečky AB. Přímka EF je totiž osou souměrnosti úsečky AP.

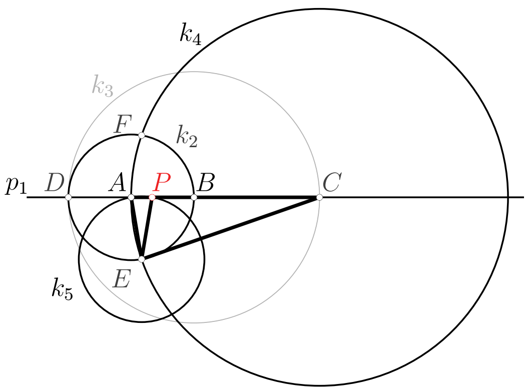
Správnost uvedené konstrukce snadno dokážeme. Důkaz ilustruje obr. 3. Budeme předpokládat (i v dalších důkazech), že úsečka AB má jednotkovou délku. V důkazu využijeme podobnosti rovnoramenných trojúhelníků.

Předně si uvědomme, že trojúhelníky PAE, AEC jsou rovnoramenné. Vzhledem k tomu, že $|\sphericalangle PAE| = |\sphericalangle CAE|$, mají oba trojúhelníky při vrcholu A, který je společný oběma jejich základnám, shodný úhel α, jsou tedy podobné a platí $|AE| = |AB| = 1$, $|AC| = 3$. Proto

$$\frac{|AP|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|AC|},$$

tedy

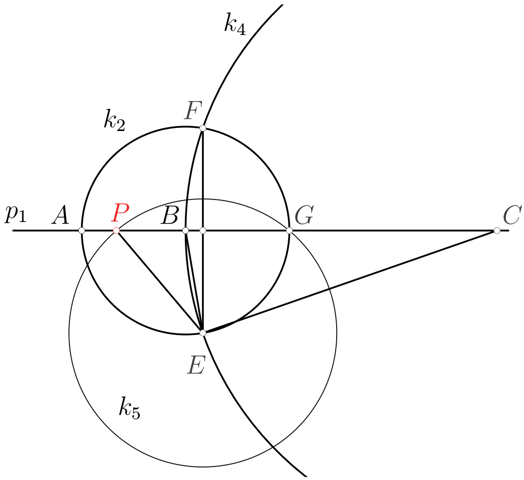
$$|AP| = \frac{1}{3}.$$



Obr. 3 Důkaz konstrukce jedné třetiny

Jiná konstrukce bodu ve třetině úsečky (která má také pět kroků) vychází z toho, že přímka EF na obr. 2 protne přímku AB v bodě, jehož vzdálenost od bodu A je $\frac{1}{6}$. Upravíme postup a sestrojíme takové body E, F, aby přímka EF protínala polopřímku AB v $\frac{1}{6}$ úsečky BG, kde G je druhý průsečík kružnice k_2 s přímkou AB. $|BG| = 1$, $|BC| = 3$. Konstrukci vidíme na obr. 4. (Nepojmenované úsečky nejsou součástí konstrukce.)

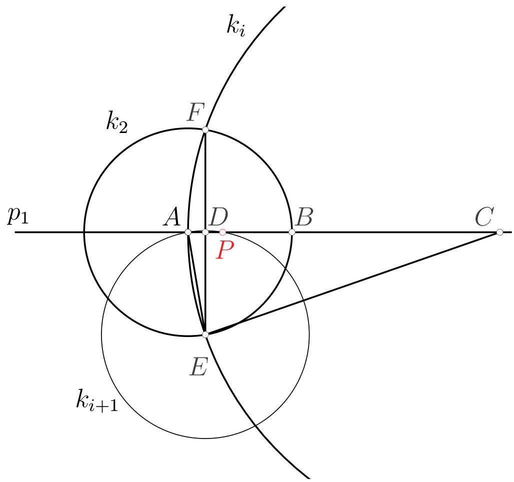
Místo přímky EF ale sestrojíme kružnici k_5 se středem v bodě E, která prochází bodem G. Je zřejmé, že její druhý průsečík P s přímkou AB je bod ležící v jedné třetině úsečky AB.



Obr. 4 Jiná konstrukce jedné třetiny

Obecná konstrukce pro přirozené k ($k > 1$)

Uvedené konstrukce umíme snadno zobecnit pro konstrukci bodu, který dělí úsečku AB v poměru $1 : (k-1)$ pro libovolné přirozené k, $k > 1$. Konstrukce je naznačena na obr. 5 a nepojmenované úsečky nejsou její součástí.



Obr. 5 Konstrukce jedné k-tiny

Pokud zobecníme konstrukci na obr. 2 a sestrojíme bod C na polopřímce AB takový, že $|AC| = k$, pak platí pro podobné rovnoramenné trojúhelníky PAE, AEC v obr. 5 rovnosti $|AE| = |AB| = 1$, $|AC| = k$. Proto

$$\frac{|AP|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|AC|}, \qquad \text{tedy } |AP| = \frac{1}{k}.$$

Počet kroků konstrukce závisí na tom, kolik kružnic potřebujeme k sestrojení zmíněného bodu C polopřímky AB, aby platilo $|AC| = k$.

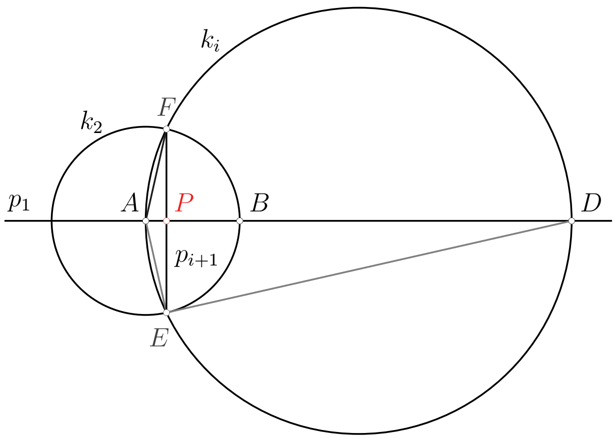
Na obr. 5 dále vidíme, že přímka EF je osa úsečky AP, proto pro její průsečík D s úsečkou AB platí

$$|AD| = |DP| = \frac{1}{2k}.$$

Je-li k sudé, můžeme konstrukci hledaného dělicího bodu provést postupem uvedeným na obr. 6 a k důkazu využít podobnost pravoúhlých trojúhelníků.

Zdůvodnění. Je-li AD průměr kružnice k_i, jsou pravoúhlé trojúhelníky AED, APE, EPD podobné. $|AB| = |AE| = 1$, $|AD| = k$. Proto

$$|AP| : |AB| = |AP| : |AE| = |AE| : |AD| = 1 : k.$$



Obr. 6 Konstrukce jedné k-tiny pro sudé k

Při pozorném pohledu na obr. 5 však vidíme, že jde o týž postup, kdy přímka EF protíná úsečku AB a dělí ji v poměru $1 : (m-1)$, kde $m = 2k$.

Kratší konstrukce

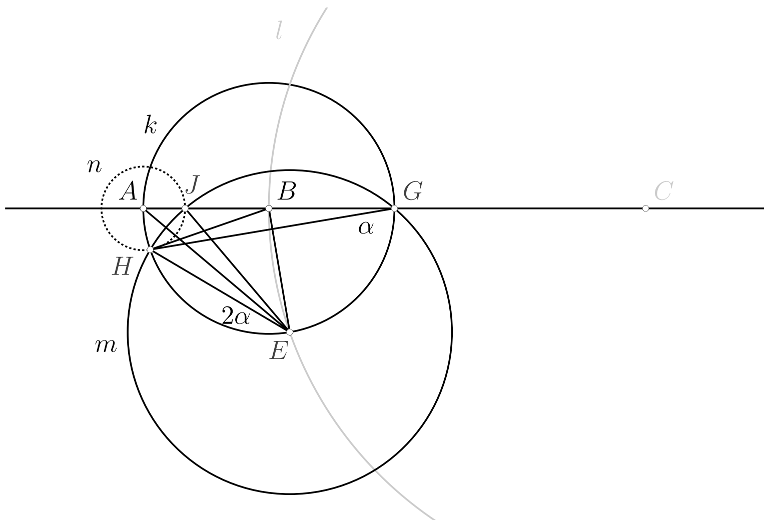
Výše uvedené obecné konstrukce jsou jistě elegantní a snadno jsme je dokázali. Jsou známé, lze je najít i na různých internetových fórech. Nejsou však ani jediné možné, ani nemusí být nejkratší. Uvedeme dva příklady.

Jedna devítina

Pokud bychom sestrojovali bod v jedné devítině úsečky AB obecným postupem uvedeným na obr. 5, museli bychom sestrojit bod C polopřímky AB takový, aby $|AC| = 9$, tedy $|BC| = 8$. K tomu potřebujeme alespoň tři pomocné kružnice, a tak má taková konstrukce sedm kroků. Mohlo by nás také napadnout sestrojit „třetinu třetiny“. Ke konstrukci jedné třetiny sice potřebujeme pět kroků, ale některé z přímek a kružnic sestrojených v prvé části jistě využijeme i v následné konstrukci. To je opravdu možné, musíme však nejprve dokázat pomocné tvrzení.

Lemma

Nechť AG je průměr kružnice $k(B; |BA|)$ a E její bod, $E \neq A, E \neq G$ (obr. 7). Potom kružnice $m(E; |EG|)$ protíná přímku AB v dalším bodě J a kružnici k v dalším bodě H, pro něž platí $|AH| = |AJ|$.



Obr. 7 Důkaz pomocného tvrzení

Důkaz. Přímky AG, HG vytínají obvodový úhel AGH na kružnici k a také obvodový úhel JGH na kružnici m. Platí tedy $|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle JGH|$.

Úhel JEH je středový úhel odpovídající na kružnici m témuž oblouku JH, proto při označení $|\sphericalangle AGH| = \alpha$ platí

$$|\sphericalangle JEH| = 2\,|\sphericalangle JGH| = 2\alpha.$$

Úhly AGH, AEH jsou obvodové úhly odpovídající na kružnici k témuž oblouku AH, proto $|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle AEH| = \alpha$. Přímka AE je tedy osa úhlu $|\sphericalangle JEH|$ a protože $|JE| = |HE|$ (H, J jsou body kružnice m), je i $|AJ| = |AH|$. Platí tedy, že průsečíkem H kružnic k, m prochází i kružnice $n(A; |AJ|)$. Protože

$$|\sphericalangle EBG| = 2\,|\sphericalangle EAG| = |\sphericalangle HAJ|$$

(středový a obvodový úhel v kružnici k), jsou trojúhelníky AHJ, BEG podobné. Koeficient podobnosti je roven poměru

$$|AJ| : |BG| = |AJ| : |AB|.$$

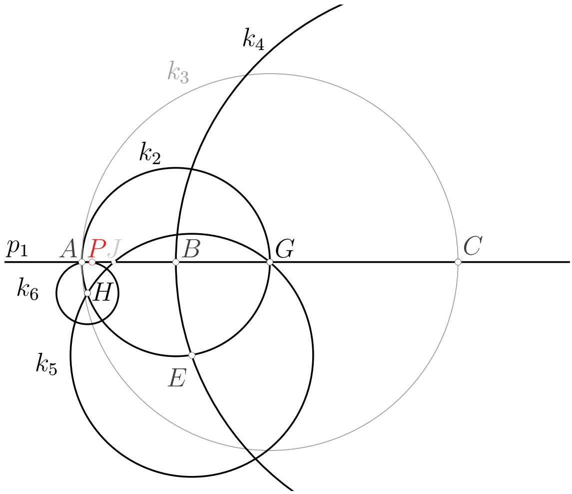
V souvislosti s našimi konstrukcemi tedy platí, že je-li bod E bodem kružnice l se středem v bodě C polopřímky AB, protíná kružnice m přímku AB v bodech G, J, kde

$$|AJ| = |AB| \cdot \frac{1}{|BC|}$$

a trojúhelníky AHJ, BEG jsou podobné s poměrem podobnosti $1 : |BC|$, stejně jako kružnice n, k a k, l.

Výše uvedené pomocné tvrzení a uvedený postup dělení úsečky v poměru $\frac{1}{k}$ tedy stačí k důkazu konstrukce, kterou sestrojíme bod v $\frac{1}{9}$ úsečky AB v šesti krocích. Konstrukce je uvedena na obr. 8. Je v ní použita nejprve konstrukce, kterou jsme ukázali na obr. 4, a poté konstrukce z obr. 2, upravená pro základní úsečku délky $\frac{1}{3}$.

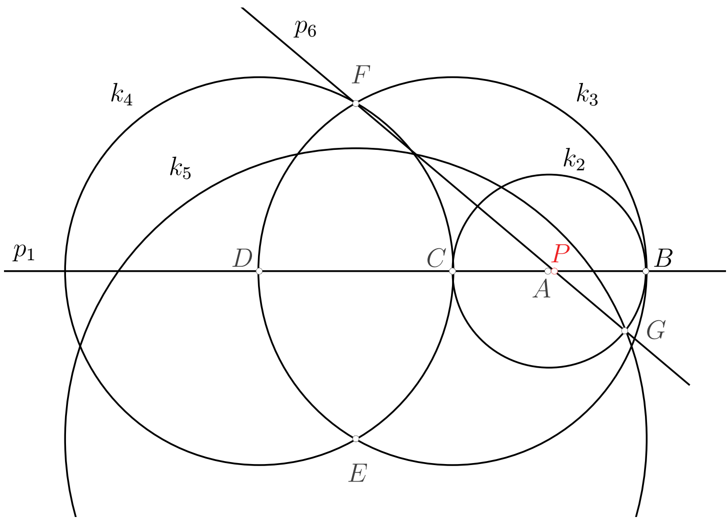
Stejně jako v předchozích obrázcích udávají dolní idexy u názvů přímek a kružnic jejich pořadí v konstrukci. Kružnice k_3 se středem G je pomocná, slouží k sestrojení bodu C, $|BC| = 3$. Z výše dokázaného lemmatu víme, že $|AH| = \frac{1}{3}$, a tudíž kružnice k_6 se středem H procházející bodem A protíná přímku AB kromě bodu A navíc v jedné třetině úsečky AJ, kde $|AH| = |AJ|$ (na obr. 8 je bod J vyznačen slabě, není pro konstrukci třeba), tedy v jedné devítině úsečky AB.



Obr. 8 Konstrukce jedné devítiny

Jedna devatenáctina

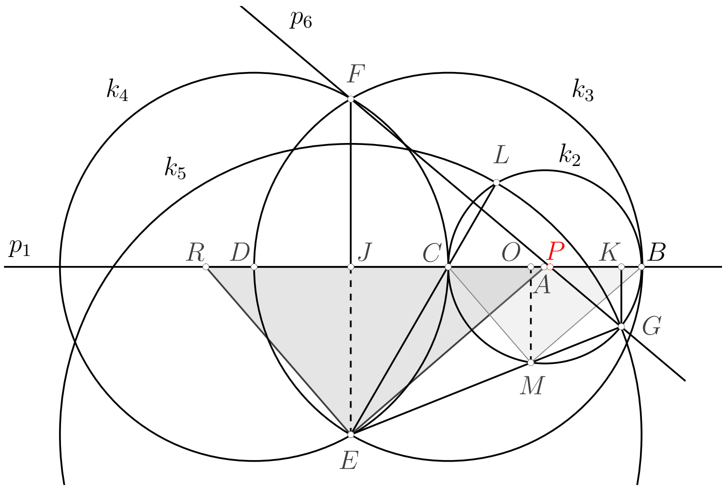
Pomocí následující konstrukce (obr. 9) sestrojíme bod P úsečky AB, pro který platí $|AP| : |AB| = 1 : 19$.



Obr. 9 Konstrukce jedné devatenáctiny

Kružnice k_5 má střed E a poloměr $|AD|$ a protíná kružnici k_2, jeden z průsečíků je bod G (druhý průsečík – bod L – doplníme pro účely důkazu do obr. 10). Bod F je jeden z průsečíků shodných kružnic k_3, k_4. Přímka p_6 je určena body G, F a protíná přímku AB v hledaném bodě P. Konstrukce má šest kroků.

Důkaz tohoto tvrzení bychom snadno mohli provést pomocí analytické geometrie (metodou souřadnic). Např. volbou souřadnic $A[0;0]$, $B[1;0]$. V našem důkazu zůstaneme u planimetrických úvah, využijeme podobnost. Při úvahách a výpočtech budeme předpokládat, že úsečka AB je jednotková, tedy že $|AB| = 1$. Nejprve si všimneme stejnolehlosti kružnic.



Obr. 10 Důkaz konstrukce jedné devatenáctiny

Pozorování 1. Kružnice k_4, k_2 jsou stejnolehlé, k_4 je obrazem k_2 ve stejnolehlosti se středem v bodě dotyku kružnic C, s koeficientem stejnolehlosti -2. Proto přímka EC protíná kružnici k_2 v druhém bodě L takovém, že $|EC| = 2$, $|CL| = 1$, který je tudíž jedním z průsečíků kružnic k_5, k_2.

Pozorování 2. Přímka EG protíná kružnici k_2 v dalším bodě M. Přímka AE je středná kružnic k_5, k_2, úsečky CL, MG jsou tudíž jedna obrazem druhé v osové souměrnosti s osou AE a trojúhelníky CEM, LEG jsou rovnoramenné podobné.

Pozorování 3. Sestrojíme-li paty kolmic z bodů F, G na přímku AB (po řadě body J, K), jsou pravoúhlé trojúhelníky FJP, GKP podobné. Bod P proto dělí úsečku JK v poměru $|JP| : |KP| = |FJ| : |KG|$.

Potřebujeme proto určit délku $|JK|$ a poměr délek $|KG| : |JF|$.

Sestrojme pomocný pravoúhlý trojúhelník AER s pravým úhlem při vrcholu E a vrcholem R na přímce p_1. Délku úsečky JR určíme například pomocí Eukleidovy věty o výšce: $|JA| \cdot |JR| = |JE|^2$, protože J je střed společné tětivy EF kružnic k_3, k_4; $|JF| = |JE| = \sqrt{3}$. Dále víme, že $|JA| = 2$, tudíž $2\,|JR| = 3$. Odtud plyne $|JR| = \frac{3}{2}$, $|AR| = \frac{7}{2}$.

K určení poměru délek užijeme podobné pravoúhlé trojúhelníky BMC, AER. Poměr jejich výšek $|OM| : |JE|$ je roven poměru délek jejich přepon $|BC| : |AR|$, tedy

$$|OM| : |JE| = 2 : \frac{7}{2} = 4 : 7.$$

Tedy $|OM| = (1 - \frac{3}{7})|JE|$. Protože $|EG| = \frac{3}{2}|EM|$, je

$$|KG| = \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{7}\right)|JE| = \frac{5}{14}\,|JE|.$$

Bod P tedy dělí úsečku JK v poměru $|JP| : |PK| = |JE| : |KG| = 14 : 5$.

Délku $|AK|$ snadno určíme například z pravoúhlého trojúhelníku AKG. $|AG| = 1$ a $|KG| = \frac{5}{14}|JE| = \frac{5}{14}\sqrt{3}$, tudíž

$$|AK| = \sqrt{1 - \frac{75}{196}} = \sqrt{\frac{121}{196}} = \frac{11}{14}.$$

Tedy

$$|JK| = \frac{39}{14}, \quad |JP| = \frac{14}{19}|JK| = \frac{14}{19} \cdot \frac{39}{14} = \frac{39}{19} = 2 + \frac{1}{19}.$$

Proto $|AP| = \frac{1}{19}$.

Závěr

V článku jsme se zabývali problémem, jak pravítkem a kružítkem (tedy eukleidovsky) určit bod, který leží v jedné k-tině úsečky AB.

Ukázali jsme postupy, kterými můžeme nalézt 1/2, 1/3, 1/6, 1/9 a 1/19 délky dané úsečky, a k tomu dva obecné postupy pro libovolné k, i když konstrukce využívající takový obecný postup nemusí být nejkratší, měřeno počtem narýsovaných čar.

Pokud sami dokážete najít nějaký postup řešící tuto úlohu pro nějaká přirozená k, zašlete svá řešení na adresu redakce našeho časopisu a k tématu se vrátíme v některém z dalších čísel. Pro $k < 20$ by vám mělo stačit pouze 6 kroků.