Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 6. 2015 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 213

Najděte největšího lichého dělitele čísla

$$\left(\binom{2017}{2}+\binom{2017}{5}+\binom{2017}{8}+\dots\right)-\left(\binom{2015}{1}+\binom{2015}{4}+\binom{2015}{7}+\dots\right).$$

Radek Horenský

Úloha 214

Nechť k je kružnice opsaná ostroúhlému trojúhelníku ABC. Označme I střed kružnice jemu vepsané. Dále nechť P je střed oblouku BC kružnice k, který neobsahuje bod A, a Q je střed oblouku AC kružnice k, který neobsahuje bod B. Přímka PQ protíná strany AC a BC po řadě v bodech K a L. Dokažte, že $CKIL$ je kosočtverec.

Jozef Mészáros

Dále uvádíme řešení úloh 209 a 210, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle loňského (23.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 209

Je dána úsečka AK s vnitřním bodem B a čtverce $ABCD$ a $BKLM$ v téže polorovině s hraniční přímkou AK. Dokažte, že se přímky AC, DL a KM protínají v jediném bodě.

Pavel Leischner

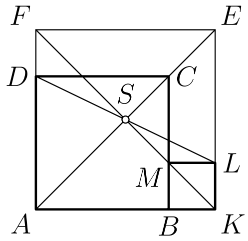
Řešení. Uvažujme čtverec $AKEF$, který leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AK jako čtverce $ABCD$ a $KLMN$, a označme S jeho střed.

Čtverce $ABCD$ a $AKEF$ jsou zřejmě stejnolehlé se středem v bodě A, přímka AC je tedy shodná s přímkou AE a prochází bodem S. Podobně jsou stejnolehlé čtverce $BKLM$ a $AKEF$ se středem v bodě K, přímka

KM je tak shodná s přímkou KF a prochází také bodem S. Protože

$$|DF| = |AF| - |AD| = |AK| - |AB| = |BK| = |KL|,$$

jsou body D a L souměrně sdružené podle středu S čtverce $AKEF$, přímka DL proto bodem S prochází.



Přímka AC zřejmě neprochází ani bodem K, ani bodem D, podobně přímka KM neprochází ani bodem A, ani bodem L. Přímky AC, KM a DL jsou tak navzájem různé. Navíc všechny procházejí bodem S, proto se tyto přímky protínají v jediném bodě, což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslali: *Ondrej Bínovský* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich,

Neúplné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Úloha 210

Pro libovolná reálná čísla $p \neq -1$ a q dokažte: Rovnice

$$x^2 + px + q = 0$$

má v oboru reálných čísel dva (ne nutně různé) kořeny, z nichž jeden je číslo opačné k druhé mocnině druhého kořene, právě když platí

$$\big(p^2 - q\big)(p + q) = (p + 1)^2 q.$$

Jaromír Šimša

Řešení. Reálná čísla x_1 a x_2 jsou kořeny dané kvadratické rovnice, právě když platí rovnosti

$$x_1 + x_2 = -p \qquad \text{a} \qquad x_1 x_2 = q. \tag{1}$$

Dokazované tvrzení je ekvivalence, je proto třeba dokázat následující implikace:

a) Dokážeme implikaci: Jestliže daná kvadratická rovnice má reálné kořeny x_1, x_2 takové, že $x_1 = -x_2^2$, potom platí

$$\big(p^2 - q\big)(p+q) = (p+1)^2 q. \tag{2}$$

Dosazením x_2 do dané kvadratické rovnice dostaneme $x_2^2 + px_2 + q = 0$, tedy $x_1 = px_2 + q$. Z první rovnosti v (1) plyne

$$(px_2 + q) + x_2 = -p, \quad \text{neboli } (p+1)x_2 = -p - q,$$

odkud (s přihlédnutím k podmínce $p \neq -1$) vychází

$$x_2 = -\frac{p+q}{p+1}, \quad \text{a proto } x_1 = px_2 + q = -\frac{p(p+q)}{p+1} + q = \frac{q-p^2}{p+1}.$$

Z druhé rovnosti v (1) proto plyne

$$q = x_1 x_2 = \frac{q-p^2}{p+1} \cdot \frac{-(p+q)}{p+1} = \frac{\big(p^2-q\big)(p+q)}{(p+1)^2},$$

odkud po vynásobení číslem $(p+1)^2$ obdržíme již rovnost, kterou jsme chtěli dokázat.

b) Nyní dokážeme opačnou implikaci: Jestliže pro koeficienty $p \neq -1$, q dané kvadratické rovnice platí (2), potom tato rovnice má dva reálné kořeny, z nichž jeden jeden je číslo opačné k druhé mocnině druhého kořene.

Uvažujme následující dvojici reálných čísel

$$x_1 = \frac{q-p^2}{p+1} \quad \text{a} \quad x_2 = -\frac{p+q}{p+1}.$$

Tato čísla jsou kořeny dané kvadratické rovnice, pokud splňují rovnosti (1). Jejich ověření provedeme dosazením:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{q-p^2}{p+1} + \frac{-(p+q)}{p+1} = \frac{q-p^2-p-q}{p+1} = -p, \\ x_1 x_2 &= \frac{q-p^2}{p+1} \cdot \frac{-(p+q)}{p+1} = \frac{\big(p^2-q\big)(p+q)}{(p+1)^2} = q, \end{aligned}$$

kde v závěru druhého výpočtu jsme využili předpokládanou rovnost.

Zbývá ukázat, proč platí $x_1 = -x_2^2$. Protože už víme, že číslo x_2 je kořenem rovnice (1) a tudíž platí $-x_2^2 = px_2 + q$, stačí zdůvodnit rovnost $x_1 = px_2 + q$. To jsme však již učinili algebraickým výpočtem výrazu $px_2 + q$ v části a).

Tím je celý důkaz ukončen.

Jiné řešení (podle Antona Hnáta). Nechť pro kořeny x_1 a x_2 dané rovnice platí $x_1 = -x_2^2$. Z Viètových vztahů (1) plyne

$$p = -(x_1 + x_2) = x_2(x_2 - 1) \quad \text{a} \quad q = -x_2^3.$$

Dosazením za p, q ověříme dokazovanou rovnost. Platí

$$\begin{aligned}(p^2 - q)(p + q) &= \left[x_2^2(x_2 - 1)^2 + x_2^3\right]\left[x_2(x_2 - 1) - x_2^3\right] = \\ &= (x_2^2 - x_2 + 1)^2(-x_2^3) = (p + 1)^2 q.\end{aligned}$$

Nechť naopak x_1 a x_2 jsou kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$. Potom pro ně platí Viètovy vztahy (1). Dosazením za p a q do rovnice

$$(p^2 - q)(p + q) = (p + 1)^2 q$$

dostaneme po úpravě

$$(x_1^2 + x_2)(x_1 + x_2^2) = 0.$$

Odtud buď $x_2 = -x_1^2$, nebo $x_1 = -x_2^2$. Pokud ukážeme, že jsou to reálná čísla, bude dokázána i druhá implikace.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 = -x_2^2$. Ze vztahů (1) navíc platí $x_1 = -p - x_2$, tedy $x_2^2 = x_2 + p$. Číslo x_2 je kořenem dané kvadratické rovnice, proto $x_2^2 + px_2 + q = 0$. Porovnáním posledních dvou rovnic dostaneme $x_2(p+1) = -(p+q)$. Jelikož $p \neq -1$, je x_2 (a tedy i x_1) reálné číslo, což nám stačilo dokázat.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Neúplné řešení zaslal *Jozef Mészáros* z Jelky.

Těsně po uzávěrce minulého čísla jsme ještě obdrželi správná řešení obou úloh **207** a **208** od *Martina Raszyka* z ETH Zürich a *Antona Hnátha* z Moravan. Tímto je s mírným zpožděním zařazujeme mezi úspěšné řešitele těchto úloh.

Pavel Calábek