

# MATEMATIKA

## Člověk a matematika

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Matematické kompetence (matematická gramotnost) byly na úrovni EU vyhodnoceny jako jedna z klíčových kompetencí nezbytných pro osobní naplnění, aktivní občanství, sociální začlenění a zaměstnatelnost ve znalostní společnosti 21. století. Přitom matematickou gramotností se rozumí *schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana* (OECD 2003) [1].

V těchto podkladech se jedná o pěti oblastech kompetencí: zvládnání základních dovedností a postupů, porozumění matematickým pojmům a principům, uplatnění matematiky v prostředí reálného života, komunikace o matematice a matematické uvažování.

Matematika ovšem není nějaký maják na opuštěném ostrově, ale díky jejím schopnostem teoreticky modelovat nejrůznější problémy věd, techniky, ekonomiky i dalších oblastí je propojena prakticky se všemi stránkami života lidské společnosti, proto i výše uvedené kompetence je třeba chápat širěji. Některá spojení jsou známá velmi dobře, jiná méně.

Při vzdělávání mládeže v matematice je proto třeba vidět, že nejde jen o řešení rovnic a konstrukci trojúhelníků, ale i o respektování propojení matematiky se životem, i když to řešení rovnic a konstrukce trojúhelníků jsou samozřejmě důležitými prvky matematiky. Vyjádření dělat dobře podložené úsudky uvedené v materiálech EU nelze zužovat na řešení matematických úloh, ale ve spojení s výrokem o aktivním občanství nás nabádá, nebýt pasivními občany, kteří berou, co se jim předkládá, ale uvažovat v širších souvislostech.

O jednom druhu propojení se pojednává v [2], kde jsou analyzovány různé reálné situace a ukazuje se, jak je matematika modeluje a přispívá k řešení položených problémů. Existuje však i jiná stránka vztahu matematiky k životu člověka a o té pojednáváme zde.

Připomeneme některé okolnosti, které ukazují, že matematika velmi ovlivňuje a vždycky ovlivňovala život lidí, i ten obyčejný život obyčejných lidí. Přitom nebudeme zvlášť uvádět, kdy (ve kterém věku) se mohou žáci s těmi či oněmi jevy při výuce matematiky setkat, to záleží na úvaze učitele tak, aby to bylo přiměřené věku žáků a zapadalo to do výuky organicky.

## 1. Čísla v lidském životě

Děti samy mohou uvádět, kdy a s jakými čísly se setkávají. Jistě mezi nimi bude datum narození, jejich věk, míra a hmotnost, dnešní datum, rodné číslo, telefonní číslo, číslo občanského průkazu, číslo domu v adrese, poštovní směrovací číslo, poznávací číslo auta, PIN, stránkování knihy, číslo sedadla v biografu, tlak krve, počet hlasů ve volbách a všechny možné ceny, rozměry, hmotnosti a vzdálenosti.

Můžeme také vzpomenout na běžná vyjádření, kde se vyskytují čísla, a současně ověřovat, že děti těmto vyjádřením rozumějí, jako: tváří se, jakoby neuměl do pěti napočítat; jeden za osmáct, druhý bez dvou za dvacet; má tisíc výmluv; zachránili jsme to za pět minut dvanáct; páté kolo u vozu; jsi jednička, jsi nula; do třetice všeho dobrého; třináctá komnata; stoprocentní (podmínky, úspěch, muž), ale také fifty-fifty a další.

Děti mohou dále hledat příklady, kdy nějakou skutečnost vyjádříme jen číslem a přece je zřejmé, oč jde. Např. naše jedenáctka vyhrála, protože kopala dvě desítky; závody čtyřky s kormidelníkem proběhnou zítra; má samé jedničky; k tržnici se dostaneš sedmičkou, a další. V této souvislosti lze připomenout, že square je náměstí i čtverec a co je to Pentagon, to víme.

Čísla provázela život prostých lidí odedávna, toho důkazem je i použití čísel v národních písních, a opět mohou dostat děti za úkol objevit co nejvíce písní, kde se nějaké číslo vyskytuje. U dvojky vzpomeňme: Já do lesa nepojedu (sekyra je za dva zlatý); Jaké je to hezké, dva kováři v městě; Sly panenky silnicí (a potkaly dva myslivce); Když jsem já šel tou Putimskou branou (dívaly se dvě panenky za mnou), k číslu tři máme např.: Já jsem z Kutný Hory (mám v Praze tři domy); Okolo Hradce (rostou v zahrádce tři růže); k číslu čtyři např.: Čtyři koně ve dvoře; A já mám konička vraného (na čtyři noženky kutého). Ale třeba v písni Když jsem

já sloužil je plno čísel, avšak jsou i méně obvyklá, např. v jedné slovenské písni šlo na zboj jedenáct zbojníků a v jiné písni se chlubí dívka, že její konkurentka měla 70 sukní „a preca sa nevydala“. Někde objevíme i něco jiného, např. v písni Pod dubem, za dubem se užitím matematiky řeší jeden praktický problém s jablíčky a velmi známá je písnička Kdyby byla Morava, používaná jako cvičení na výrokovou logiku.

Geometrie je na tom hůř, nepočítáme-li „udělej kolečko, moja galánečko“. Přidejme trochu humoru a uvažme, že v některé písni můžeme objevit i trojúhelník. Když u panského dvora zavolal Vitoušek na svou milou, tak se dozvěděl, že ona už má jiného, hocha upřímného. Stejně tak v jiné písni informuje dívka: „Janíčku bloudíš, že za mnou chodíš, já už mám jiného, ty o něm nevíš“. V reálném světě takový trojúhelník nebývá humorný, ale v písni se mu usmát můžeme.

Mám za to, že taková neformální spojení matematiky s běžným životem a s citovou výchovou mohou přinést něco dobrého i pro výuku matematiky, například mohou pozitivně ovlivnit vnitřní motivaci dětí.

## 2. Magie čísel

Kdysi dávno byla čísla ještě spojena s počítanými předměty. Když se pak osvobodila, získala tu podivuhodnou a tajemnou vlastnost, že mohla skákat z předmětu na předmět. Máme tři mamuty stejně jako tři prsty nebo tři výkřiky. Lidé získali pocit, že číslo ovlivňuje bytí věci a že operace s čísly ovlivňuje přímo i ty počítané věci.

Různá čísla pak získala zvláštní magické postavení. Je to například trojka:

- v křesťanství je trojjediný Bůh: otec, syn a duch svatý, Petr třikrát zapřel Krista, Kristus třetího dne vstal z mrtvých;
- v pohádkách: tři sourozenci, tři úkoly, tři kouzelné předměty, tři havrani.

Číslo 7 získalo pověst, že je šťastné a 13, že je nešťastné, i když u některých národů je právě třináctka šťastná. Někteří lidé mají i svá osobní čísla, která považují za šťastná, žije se jim s nimi lépe.

Také je zajímavé, že lichá čísla mají v historii dobrou pověst (Platon, Vergilius, Shakespeare) a sudá pověst špatnou. Např. Vergilius říkal, že Bůh se raduje z lichého čísla, což se mohlo vyložit i tak, že Bůh je jeden (a to je liché číslo) a je trojjediný (a to je také liché).

Speciálním odvětvím mystiky čísel je numerologie, která vychází z tisícileté historické mystiky, ale upravila si ji, zjednodušila a naplnila tajemnými výpočty. Jednotlivým číslovkám přiřazuje určité charakterové vlastnosti a

říká, že z čísel ve vašem datu narození se dají poznat vaše vlastnosti a chování.

Pokud se odvoláváme na logiku myšlení v realitě, nevidíme, proč by měl existovat nějaký vztah mezi čísly v datu narození a vlastnostmi člověka, ostatně ty se v průběhu života někdy mění velmi podstatně. Také uvažme, že datum narození je odvozeno od 1. ledna, který je do přírodního běhu roku zasazen zcela uměle, to kdosi kdysi jen vymyslel, nemá nijaké přirozené osudové postavení, jako třeba zimní slunovrat, a rovněž délka měsíců a počet jejich dní je lidským výmyslem a nikoli něčím přírodním (vzpomeňme, co provedl Octavianus Augustus). Také je otázka, proč zrovna desítková číselná soustava by měla mít takovou magickou sílu, když za přirozenější lze možná považovat soustavu osmičkovou.

Numerologie nemá s matematikou, s její určitostí a přesností, společného vůbec nic, tedy jen to, že používá čísla. Kdo chce, nechť jí věří, ale bylo by patrně nepředložené dělat na základě jejích výsledků nějaké fatální životní rozhodnutí. Pokud ji bereme jako druh zábavy nebo společenskou hru, pak není škodlivá, někomu i pomáhá, že část své odpovědnosti může přenést na „osud“; v tomto smyslu ani určitá víra v osud není škodlivá.

### 3. Nenechejme se podvádět

Jak už to bývá, všechno se dá zneužít, i matematika. Připomeňme jeden z neznámějších podvodů, který je znám jako hra pod jménem Lavina. Oč v nejjednodušším případě jde Dostanete lístek (ale někdy je použit internet) s pěti adresami a textem: „Na 1. adresu v seznamu pošli 100 Kč a v seznamu ji vynechej, připiš svou adresu na poslední 5. místo, opiš tento text i s novým seznamem adres a pošli jej 5 různým adresátům. Nepřerušuj řetěz! Zakrátko dostaneš 300 000 Kč.“

Nedůvěřivý, ale naivní adresát si to ověří a říká si: Na pátém místě budu pětkrát, na čtvrtém  $5^2$ krát, na třetím  $5^3$ krát, na druhém  $5^4$ krát a na prvním  $5^5 = 3125$ krát, takže dostanu 312 500 Kč, a zapojí se do hry.

Ale uvědomme si, že se po matematicky gramotných chce *dělat dobře podložené úsudky*. Ale úsudek, že mi za 100 Kč dá někdo jen tak 300 000 Kč, není dobře podložený; podívejme se proč – projděme si jednotlivá kola hry.

- 0. kolo – původce laviny,
- 1. kolo – 5 nových účastníků,
- 2. kolo – 25 nových účastníků,
- ⋮

- 8. kolo – 390 625 nových účastníků,
- 9. kolo – 1 953 125 nových účastníků,
- 10. kolo – 9 765 625 nových účastníků,

takže celkový počet všech účastníků hry je větší než počet obyvatel ČR. Co to znamená? Že ve vyšších kolech už není komu posílat sdělení, hra končí a k penězům přijde jen původce laviny a několik účastníků dalších málo kol (za nepravděpodobného předpokladu, že nikdo řetěz nepřeruší). Jde tedy o podvodnou hru, neboť láká od lidí peníze za slib, který nelze dodržet.

Existují i jiné verze této hry, některé jsou spojeny s určitým obchodním řetězcem (když obstaráte 2, 3, 4 naše zákazníky, tak budete atd.). Některé verze nejsou nebezpečné, ale jen hloupé, chtějí, abyste vykonali nějaký úkon, a vyzvali k tomu i 5 dalších lidí.

#### 4. Neposuzujte život jen podle průměrů

Aritmetický průměr je velmi významný statistický ukazatel a žáci se učí průměry počítat. Ale chápou je správně? Neměli by vědět ještě něco navíc? Tedy u jakých souborů průměr solidně informuje (u normálních) a u jakých předstírá nebo lže, pokud si jej špatně interpretujeme. Uvedme dva takové příklady.

1. Pan Albert měl dnes k obědu půl grilovaného kuřete a po obědě si dal dvě piva. Pan Bohouš zůstal dnes nějak bez oběda.

Tedy: V průměru měl každý z nich k obědu čtvrt kuřete a pivo, a proto jsou určitě oba spokojeni (?).

2. V podniku ABCD pracuje manažér, jeho zástupce a 18 dělníků. Měsíční platy (mzdy) jsou:

manažer: 150 000 Kč,

zástupce manažera: 108 000 Kč,

dělníci: 14 000 Kč,

celkem  $150\,000 + 108\,000 + 18 \times 14\,000 = 510\,000$  Kč,

průměrný plat je  $510\,000 : 20 = 25\,500$  Kč

Pak došlo ke změně:

manažer: 175 000 Kč,

zástupce manažera: 111 000 Kč,

dělníci: 13 000 Kč,

celkem  $175\,000 + 111\,000 + 18 \times 13\,000 = 520\,000$  Kč,

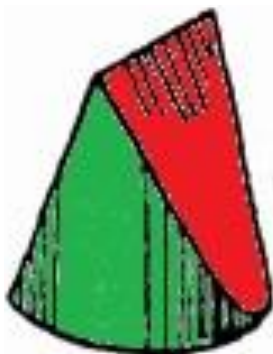
Průměrný plat je  $520\,000 : 20 = 26\,000$  Kč.

Sláva (?), podnik prosperuje, vzrostl v něm průměrný plat a lidé jsou spokojeni (?); ale většině pracovníků se přitom mzda snížila, takže dostáváme falešný obrázek.

Závěr: jsme-li informováni o nějakém průměru a jeho vývoji, tak uvažme, jde-li o zpracování normálního souboru údajů nebo o soubor, který obsahuje velký počet mimořádností. V takových případech závěrům z vývoje průměru nelze věřit (bez dalších doplňujících informací).

## 5. Můžeme věřit tomu, co vidíme?

K odpovědi na tuto otázku si opět přizveme matematiku, tedy jedno zvláštní těleso, které je známé jako zátka pro tři otvory. Jestliže si tuto zátku vhodně umístíme do souřadnicového systému v prostoru, pak se podle jedné osy bude jevit jako zelený trojúhelník, podle jiné jako červené kolečko a podle třetí jako strakatý čtvereček.



A teď si představme tři skupiny pozorovatelů, z nichž se každá dívá podél jedné z os. Už vidíme ty rozpory? Každá skupina vidí něco úplně jiného, než ty ostatní a tvrdí, že to *je* zelený trojúhelník, červené kolečko či strakatý čtvereček, protože jsou přesvědčení, že jak to vidí, tak to opravdu je, že mají pravdu. Nevědí, že ten objekt má více dimenzí než dovedou při svém pohledu chápat, a vlastně žádná z těch tří skupin nemá *pravdu*, nedovede *objektivně* vyhodnotit danou skutečnost.

Naši žáci jistě pochopí, že u situací v reálu jsou podobné problémy, jen těch os a souřadnic je tu více, takže každý máme při pohledu na posuzovanou situaci jakýsi svůj *vektor pohledu*, na základě něhož si vytváříme svůj názor, tj. „jak to vidíme“. Tento vektor pohledu je ovlivněn mnoha faktory, jež si můžeme představit i jako hodnoty určitých souřadnic, přičemž

těmito souřadnicemi je všechno to, v čem jsme stejní nebo v čem se lišíme; uvedme si některé: věk, pohlaví, zdravotní stav, vzdělání (obor, hloubka, šíře), sociální původ, zaměstnání a postavení, rodinné zázemí, bohatství, náboženství, osobní záliby a zájmy, psychické a morálně-volní vlastnosti, zkušenosti (vlastní, rodinné, ze širšího okolí), informace zevnějšku (pravdivé či nepravdivé), přírodní podmínky, politické a sociální ovzduší, a další. To všechno jsou souřadnice přirozené. Někteří lidé však přidávají složku „co je pro mne výhodné vidět“, ale to už bychom byli v politice.

U složitějších situací nemá nikdo všechny „souřadnice“ na takové úrovni, aby viděl do všech podrobností, vidí jen jakýsi průmět, takže by neměl říkat „tak to je“, ale jen „tak to vidím“. Naše zkušenost se zátkou by nás měla vést ke skromnosti a k úvaze, že realita má více rozměru, než jsme schopni chápat, a že *uznání oprávněnosti různých pohledů je jediné rozumné východisko, jak si lidé mohou porozumět, pochopit se, a jak se mohou v klidu a míru dohodnout a žít.*

## 6. Formule demagogie

V citovaných materiálech EU se mj. říká, že těžištěm výuky matematiky mají být širší nosné myšlenky („big ideas“) a interdisciplinární témata, jež pomohou vytvořit propojení s každodenním životem a s ostatními předměty. K tomu každodennímu životu patří okolnost, že jsme občané a že jsme sdělovacími prostředky a internetem trvale zavalováni množstvím informací, v nichž bychom se měli umět správně orientovat. Zde nám může být nápomocné modelování informací užitím množin a výrokové logiky. Začneme definicí, na to jsme v matematice zvyklí, abychom věděli, o čem přesně je řeč. Slovník říká, že demagogie je: *Působivé a klamné sdělení využívané k získání vlivu, podpory a moci. Místo věcného zdůvodňování navazuje na předsudky, emoce, formální a nepodstatné souvislosti; slouží k tomu polopravdy, překroucené argumenty, falešné názvy, logické klamy, vyvolávání a šíření strachu, atd.*

Ve snaze vylepšit si obraz o sobě využívají a vždycky využívaly určité prvky demagogie vlády snad ve všech dobách a zemích a zprostředkovávali je hlavně jejich spříznění novináři. V našich příkladech se však vyhneme politickému pozadí a uvedeme jen zcela jednoduché příklady z jiných oblastí, i když takové příklady jsou jen ilustrující.

### Jednostranné (tendenční) informace

Mějme celek, který se skládá (např.) ze dvou částí, nemusí být pod-

statné, jsou-li disjunktní nebo ne, takže použijeme zápis  $A = A_1 \cup A_2$ ; nechť  $A_1$  má vlastnost  $V$  (i když ani to není u demagogů jisté).

Formule demagogie říká:  $A_1$  má vlastnost  $V \implies A$  má vlastnost  $V$  (přesun vlastnosti jedné složky na celek).

*Příklad*

Nová silnice = povrch + trvanlivost. Reklamní tvrzení: Tato silnice má výborný povrch, je tedy výborná.

Ale vraťme se ještě k části 5. Něco vidíte, ale nevíte přesně, co. Sdělovací prostředky vám říkají, že vidíte zelený trojúhelník. Možná to tak je, něco zeleného vidíte. Ale jste aktivní občané a zajímá vás, jestli „to“ nemá více rozměrů, tak zjišťujete i jiné pohledy a nakonec můžete dojít k závěru, že to není zelený trojúhelník, ale barevná zátka. Proč vám však sdělovací prostředky neřekly, že vidíte barevnou zátku, to matematika nevysvětlí.

### **Přenášení vlastností z jedné části celku na druhou část**

Východisko je podobné, máme opět celek  $A = A_1 \cup A_2$ .

Formule demagogie říká:  $A_1$  má vlastnost  $V \implies A_2$  má vlastnost  $V$ .

*Příklad*

Divadelní představení = divadelní hra + výkony herců. Výkony herců byly špatné  $\implies$  divadelní hra je špatná. (Možná ta hra špatná je, neplyne to však ze špatných výkonů herců.)

### **Přenášení vlastností z jednoho celku na jiný na základě podobnosti jedné části**

Mějme dva celky  $A, B$ ; nechť  $A = A_1 \cup C, B = B_1 \cup C$ .

Formule demagogie říká:  $A$  má vlastnost  $V \implies B$  má vlastnost  $V$  (což zaručuje společná část  $C$ ).

*Příklad*

$A$  = životní moudrost + tituly,  $B$  = jisté vzdělání + tituly; úvaha dle uvedeného vzorce:  $A$  je moudrý člověk  $\implies B$  je moudrý člověk (protože má také tituly).

### **Porovnávání na základě jedné vybrané vlastnosti**

Mějme dva celky  $A, B$ ; nechť  $A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$ .

Formule demagogie říká: Jelikož  $A_1$  je lepší (horší) než  $B_1$ , je  $A$  lepší (horší) než  $B$ .



### *Příklad*

Zpráva z tisku: Naše společnost za posledních 25 let velmi zbohatla. Například za průměrnou mzdu si dnes můžeme koupit o 13 košil více než před čtvrt stoletím. Možná to tak je, ale z toho výroku to neplyne, neboť v těch  $A_1$ ,  $B_1$  jsou košile, ale v  $A_2$  a  $B_2$  jsou nájmy, energie, voda, léky, doprava a další, kde jistě tu třináctku nenajdeme. Navíc má dnešní soubor mezd a platů zcela jiné rozložení (viz bod 4) než měl před 25 lety.

### **Popírání dimenzí**

Navážeme opět na část 5 a její závěry. Poslední náš příklad nazývám *filozofie housenky na stéble*, ta zná jen dvě volby, buď leze nahoru nebo dolů.

Formule demagogie říká: Má jiný názor než my, takže je podplacen našimi nepřáteli a lže.

### *Příklad*

My říkáme, že je to zelený trojúhelník a kdo říká, že vidí něco jiného, tak (viz výše).

Jsou i **další vzorce**, které vystihují jiné významné a často používané demagogické metody, ale snad toto jako ukázka stačí.

## **7. Záležitosti a jevy ekonomické**

Studenti na odborných školách se jistě natolik vzdělávají, aby ekonomickým záležitostem a jevům dobře porozuměli a dovedli s nimi pracovat. Avšak jisté prvky by měly proniknout i do vzdělání základního a středního všeobecného, aby občané nebyli v postavení lidí ekonomicky negramotných. Takže i matematické vzdělávání by si mohlo bez nějakého probírání ekonomických teorií všimnout některých jevů a spočítat si, co vlastně znamenají.

Nemá však smysl zadávat starobylé úlohy typu: „Pan  $N$  si uložil do banky 20 000 Kč na 5% roční úrok, kolik bude mít za 5 let?“, protože dnes to je všechno jinak a děti by dostaly mylnou informaci o finančním světě. Reálnější by už byla úloha: „Pan  $N$  by si za své úspory uložené v bance mohl koupit 100 knih po 200 Kč. Kolik knih si může koupit za rok, je-li 3% inflace a 1% úrokování vkladu?“

Samozřejmě ekonomické záležitosti nejsou zas až tak jednoduché, podle některých ekonomických škol mohou být účinky inflace i pozitivní, ale občan vidí raději konkrétní přesvědčivé výsledky a chce se přesvědčit, že to tak opravdu je. V každém případě by bylo zdravé podívat se i v matematice

nějakými vhodně a pravdivě formulovanými úlohami na ekonomické jevy, o nichž žáci slyší v rozhlase a v televizi. Řešení takové úlohy může být i podnětem, aby se žáci o věci blíže informovali na internetu.

## 8. Matematika a ICT

Vztah matematiky a ICT se zdá bezproblémový. Studie o využití ICT při výuce matematiky docházejí k různým závěrům, které zde však nebudeme komentovat, pravidelně o nich píše i infromatická rubrika MFI. Přidejme jen jednu myšlenku. Domnívám se, že existují odborné pastviny, na které se příliš nechce ani matematikům (jsou příliš infromatické), ani infromatikům (jsou příliš matematické). Že tedy spolupráci těchto dvou oborů při výuce by bylo možné a vhodné rozšířit o další prvky, ale to je námět na jiný článek. Například matematická (programová) analýza některých matematických úloh je pro pěstování a zvyšování myšlenkové úrovně řešitele velmi přínosná, kdy si např. matematik pod vlivem infromatiky uvědomí, o co přesně v dané matematické úloze jde a jak dojít efektivně k řešení. Jako příklad odkážeme na článek [3], kde najdeme velice výrazné myšlenkové cvičení při odvozování kontroly syntaxe vyčíslovaného výrazu.

Nakonec ještě k jednomu pojmu z materiálů EU, jehož uplatnění mi matematicky nepřipadá úplně srozumitelné a jehož celospolečenský význam by potřeboval v těchto materiálech bližší objasnění. Jako jeden z cílů zvyšování kvality vzdělávání (i v matematice) je postulováno a zdůrazňováno zvyšování konkurenceschopnosti. Z osobního hlediska, tedy pro vzdělávané jedince, je to cíl velmi žádoucí, to je zřejmé, je výhodný i pro zaměstnavatele, neboť jim zajišťuje co nejlepší uchazeče a pracovníky, aniž by s tím měli nějaké výdaje. Avšak není nijak zmíněn jeho celospolečenský sociální význam, protože bez hlubšího rozboru se situace jeví tak, že když jsem více konkurenceschopný, tak např. dostanu požadované zaměstnání, což však současně znamená, že je nedostane jiný, méně konkurenceschopný člověk, takže celková nezaměstnanost ve společnosti se tím nezměnila.

## Literatura

- [1] [europa.cz/rapid/press-release\\_IP-12-1358\\_cs.htm](http://europa.cz/rapid/press-release_IP-12-1358_cs.htm).
- [2] *Trávníček, S.:* Pojďme na to s matematikou (a někdy i s počítačem). Vydavatelství UP Olomouc, 2013.
- [3] *Trávníček, S.:* Vyčíslení aritmetického výrazu. MFI, roč. 14 (2004/05), č. 6, s. 363–367.