Překlady v kombinatorice

PAVEL ŠALOM – MICHAL ROLÍNEK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

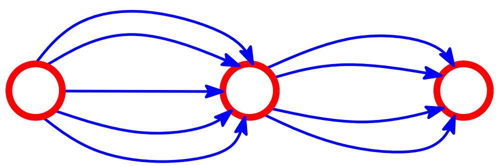
Combinatoria, combinatorică, kombinatorika, kombinatorikk, kombinatoriikka – to je „kombinatorika“ přeložená postupně do italštiny, rumunštiny, chorvatštiny, estonštiny a finštiny. Možná, že když se řekne „překlad“, vybavíme si právě překlady mezi různými jazyky. V tomto článku půjde o trochu jiné překlady. I když vlastně záleží na úhlu pohledu.

Ukážeme několik úloh, které jsou součástí chystaného výukového materiálu středoškolské kombinatoriky. V těchto materiálech je naší snahou přenést těžiště práce ke studentům. Upřednostňujeme proto objevování před procvičováním. Přejeme si, aby se určité jevy a pojmy vyskytly nejdříve v úlohách a až následně se pojmenovaly. Úlohy jsou žákům předkládány v různých skupinách obsahujících například úlohy o počítání cest nebo úlohy o turnajích. Žáci vyřeší řadu úloh týkajících se počítání cest a v momentě, kdy umí v tomto kontextu použít např. kombinatorické pravidlo součinu, je naší snahou, aby tuto schopnost přenesli do jiného kontextu. Právě k tomu slouží skupina úloh o překladech. Podívejme se na ukázky.

Začneme jednoduchým překladem, na kterém ukážeme, co slovem překlad míníme a o čem článek pojednává.

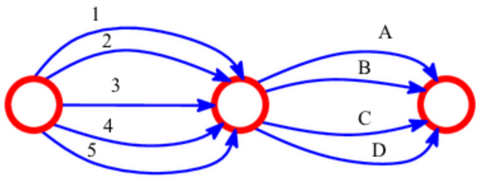
Úloha 1

a) Určete počet různých cest z nejzápadnějšího města (na obr. vlevo) do nejvýchodnějšího (na obr. vpravo).



b) Na základní škole je v rámci 1. stupně pět ročníků. V každém z nich jsou čtyři třídy označeny písmeny A, B, C, D. Kolik tříd je na 1. stupni?

Komentář. Možná si řeknete, že obě úlohy jsou velmi jednoduché. Žáci však nejsou požádáni o vyřešení úloh. Místo toho je jejich úkolem přeložit jednu úlohu na druhou. Překladem zde myslíme myšlenkový proces, při kterém se objekty z jedné úlohy vhodně zamění za objekty z druhé úlohy a odhalí se vnitřní souvislosti mezi oběma úlohami. Překlad pomocí obrázku by mohl vypadat například takto:



Výběr jedné z pěti linek mezi prvním a druhým městem odpovídá výběru jednoho z pěti ročníků. Podobně výběr jedné ze čtyř linek mezi druhým a třetím městem odpovídá výběru jednoho z písmen A, B, C, D. Z toho je vidět, že cesta ze západu na východ jednoznačně určuje třídu a naopak.

Úloha 2

a) Na večírku se sešlo 5 lidí. Každý z nich si jednou přiťukl s každým dalším účastníkem. Kolik ťuknutí proběhlo?

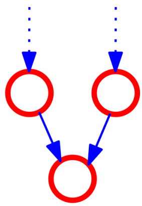
b) Ve skupině florbalového turnaje se utkalo 5 týmů. Každý sehrál s každým jedno utkání. Kolik zápasů se celkově hrálo?

Komentář. Překlady vlastně vybízejí žáky ke konstrukci bijekcí. To považujeme v kombinatorice za velmi důležitý nástroj, na který někdy nebývá kladen důraz. Přitom když vyřešíme například část b) předchozí úlohy „nasazením vzorce“, tak – pokud jsme nehádali – v našich myšlenkách velmi pravděpodobně právě proběhla konstrukce bijekce (překlad) na výběr 2 prvků z 5prvkové množiny; dospějeme tak k výsledku $\binom{5}{2}$.

V této úloze stejně jako ve všech ostatních není výsledek nejpodstatnější. Pokud zaměníme účastníky večírku za florbalové týmy a přiťuknutí za utkání, je vidět, že úlohy jsou ve své podstatě stejné.

Možná vás napadlo, že zadání úloh o překladech mají jeden zásadní problém – učitel nemůže jednoduše zjistit, zda žák překlad opravdu provedl. V připravovaných materiálech zadáváme úlohy jinak. Z úloh 1 a 2 je vytvořena jediná úloha s podúlohami a) až d) a úkolem žáků je rozdělit jednotlivé podúlohy do dvou skupin tak, že podúlohy lze v rámci jedné skupiny na sebe navzájem přeložit. Počet podúloh ve skupině ani v celé úloze není pevně dán a v některých případech patří dokonce všechny podúlohy do jedné skupiny.

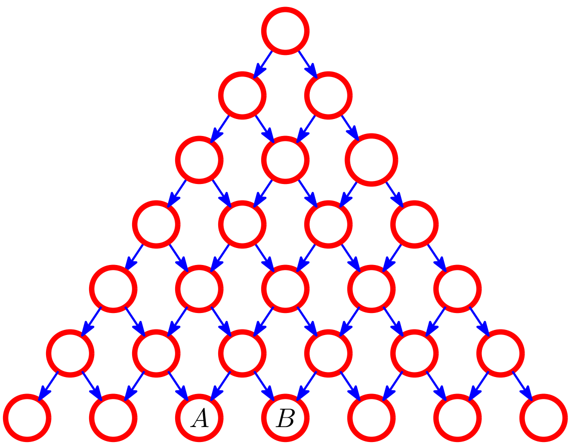
Překladů využíváme k přenosu znalostí ze situací známých do situací nových. Tímto způsobem můžeme například prezentovat Pascalův trojúhelník. Následující úlohu už uvedeme v podobě, v jaké jsme ji použili při vyučování. V té době už žáci měli bohaté zkušenosti s počítáním cest vedoucích mezi městy, která jsou různým způsobem propojena dopravními linkami. Mnohokrát předtím řešili podúlohu tohoto typu: Počty cest vedoucích do dvou horních měst jsou známy; najděte počet cest vedoucích do dolního města.



Žáci tak mají rozmyšleno, že počet cest vedoucích do dolního města je součtem počtů cest vedoucích do horních měst.

Úloha 3

a) Kolik cest vede z nejsevernějšího města (na obr. nahoře) do města A?



b) Kolik cest vede z nejsevernějšího města do města B?

c) Kolik nápisů délky šest lze sestavit ze dvou znaků $\searrow$ a čtyř znaků $\swarrow$? (Např. $\swarrow\swarrow\swarrow\swarrow\searrow\searrow$ nebo $\swarrow\swarrow\searrow\swarrow\swarrow\searrow$.)

d) Jaký je význam čísla $\binom{6}{2}$?

Komentář. Cílem této úlohy je propojit počítání cest s kombinačním číslem. Tato souvislost je vidět poté, co každou cestu zakódujeme pomocí šipek. Při řešení úlohy se předpokládá, že žáci jsou již obeznámeni s významem kombinačního čísla. Ze způsobu zadání části d) je vidět, že skutečně nejde o to, aby žáci jednotlivé části počítali, ale jde o to, aby uvedenému číslu přiřadili kombinatorický význam a byli schopni jej propojit s jinou částí úlohy.

Dokonce jsme při vlastním vyučování zkusili žákům říct, že $\binom{6}{2}$ je počet způsobů, kterým lze ze skupiny 6 lidí vybrat 2 reprezentanty a záměrně jsme jim nesdělili, jakým způsobem kombinační číslo vypočítat. K našemu překvapení přibližně 75 % žáků s touto interpretací velmi dobře pracovalo a byli schopni ji překládat do jiných kontextů. Přibližně čtvrtině žáků bylo nepříjemné pracovat s něčím, co neumějí spočítat a nechtěli pokračovat, dokud se pro ně kombinační číslo nestane více konkrétní.

Po vyřešení této úlohy je již jen malý krok k tomu, aby žáci dospěli ke vztahu mezi kombinačními čísly. Jsou nyní připraveni porozumět vztahu

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

pomocí ryze kombinatorických úvah a není nutné, aby upravovali, dokonce ani aby znali, výrazy s faktoriály. Použijí myšlenku zmíněnou před úlohou 3. Když budou vědět, že počet cest vedoucích do jednoho města je roven $\binom{n}{k}$ a počet cest vedoucích do sousedního města je roven $\binom{n}{k+1}$, budou už vědět, že počet cest vedoucích do města pod nimi je součtem těchto dvou čísel. Zároveň si v předchozí úloze rozmysleli, že tento počet je $\binom{n+1}{k+1}$.

Ukážeme si ještě kombinatorický „důkaz“ binomické věty. Nebudeme dělat skutečný důkaz. Místo toho ukážeme překlad, který jsou schopni žáci vymyslet a od něhož už je jen krůček k obecnému důkazu.

Úloha 4

a) V testu je 10 otázek a každá nabízí odpověď ANO a NE. Kolika způsoby jej lze vyplnit tak, že 7krát je vybrána odpověď ANO a 3krát odpověd NE?

b) Hokejové utkání skončilo výsledkem 7 : 3. Kolika způsoby se mohlo skóre vyvíjet?

c) Kolik tříprvkových množin lze vybrat z desetiprvkové množiny?

d) Metoděj si z každé závorky vybere buď čtverec, nebo trojlístek (z každé závorky tedy vybere přesně jeden symbol). Kolika způsoby si může vybrat 3 čtverce a 7 trojlístků? Na obrázku jsou naznačeny dva takové výběry.

	$(\clubsuit\square)$	$(\clubsuit\square)$	$(\clubsuit\square)$	$(\clubsuit\square)$	$(\clubsuit\square)$	$(\clubsuit\square)$	$(\clubsuit\square)$	$(\clubsuit\square)$	$(\clubsuit\square)$	$(\clubsuit\square)$
1. výběr:	$\clubsuit$	$\square$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\square$	$\square$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$
2. výběr:	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\square$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\square$	$\square$

e) Kolikrát se objeví člen a^7b^3 při roznásobení výrazu

$$\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)}_{10}?$$

Komentář. V tomto případě lze libovolnou část úlohy přeložit na libovolnou jinou část. Cílem je rozmyslet si, že především části c), d), e) počítají totéž, takže koeficient před a^7b^3 je $\binom{10}{3}$. Předpokládá se, že část b) už žáci řešili dříve, a tak propojení například s částí c) je pro ně snadné.

Věříme, že úlohy, jako je tato, vedou žáky k porozumění vnitřním souvislostem a k celkovému nadhledu v matematice.

Obtížnější úloha

Znáte vztah pro součet $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$? Nepochybujeme o tom, že někteří čtenáři vědí, že

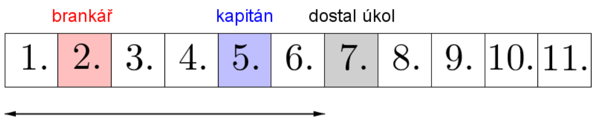
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a že by uměli tuto rovnost dokázat například užitím principu matematické indukce či jinak. Domníváme se však, že podstatně méně čtenářů ví, že

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}.$$

Ke druhému vztahu lze dospět pomocí překladů podobných těm, o kterých byla řeč. Tentokrát nebudeme ukazovat příbuznost dvou různých úloh, ale jednu úlohu vyřešíme dvěma různými způsoby.

Řešení. Představme si, že máme tým $n+1$ fotbalistů. Všechny je postavíme do řady tak, že každý má nějaké spoluhráče před sebou a nějaké spoluhráče za sebou (tedy přesněji každý kromě prvního a posledního). Jeden z fotbalistů dostane za úkol vybrat kapitána a brankáře. Vybírat mu dovolíme jen z hráčů, kteří stojí v řadě před ním. Brankář a kapitán může být tatáž osoba.



Pokud úkol dostane například 7. hráč v řadě, může kapitána zvolit 6 způsoby. Pro volbu brankáře má také 6 možností, může tedy vybrat kapitána a brankáře celkem 6^2 způsoby. Podobně uvažujeme, pokud úkol dostane kterýkoliv jiný hráč: k-tý hráč může vybírat $(k-1)^2$ způsoby, což celkem dává $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ možností, jak tímto způsobem vybrat kapitána a brankáře.

Na celou situaci se můžeme podívat i z jiného úhlu pohledu. Po splnění úkolu máme většinou 3 důležité fotbalisty. Ten z trojice, který stál v řadě nejdál, dostal úkol a vybral dva hráče před sebou. Dvěma způsoby jim mohl přidělit role kapitána a brankáře. To dává $2\binom{n+1}{3}$ možností, jak mohl být úkol splněn. Mohlo se však stát i to, že při splnění úkolu hráli důležitou roli pouze 2 fotbalisté. Ten, který stal v řadě dále, dostal úkol a toho před sebou vybral jako kapitána a brankáře zároveň. To je dalších $\binom{n+1}{2}$ možností, jak mohl být úkol splněn. Žádnou další možnost pravidla úkolu nepřipouštějí.

Doufáme, že nejen poslední úloha naznačuje, že překlady nabízejí elegantní cestu, jak se lze dívat na celou plejádu situací v kombinatorice. Naším přáním je, aby se na podobné cesty nevydávali jen čtenáři časopisů, ale i žáci v běžných hodinách matematiky.

Výzkum byl podpořen Grantovou agenturou Univerzity Karlovy v Praze (projekt č. 1250213).

Literatura

[1] *Olšák, M.*: Kombinatorické (ne)počítání. 2013. Dostupné na: http://iksko.org/files/sbornik2.pdf/

[2] *Rolínek, M. – Šalom, P.*: Cestou necestou ke kombinatorice. MFI, roč. 23 (2014), č. 4.