Polibky kružnic: Intermezzo

PAVEL LEISCHNER

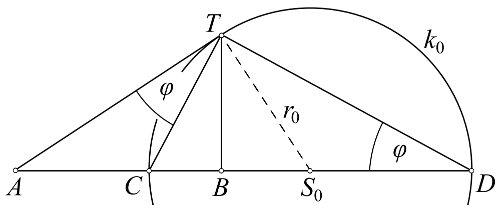
Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Věta 21 z Archimedovy *Knihy o dotycích kruhů* zmíněná v předchozím dílu seriálu byla inspirací k tomuto původně neplánovanému příspěvku. Ukážeme, jak ji Archimedes dvěma způsoby dokázal a zamyslíme se nad jejími důsledky.

Věta 1 (Archimedes)

V rovině je dána kružnice $k_0(S_0; r_0)$ s průměrem CD a uvnitř polopřímky opačné k polopřímce CD bod A. Jestliže je T bod dotyku tečny z bodu A ke kružnici k_0 a B pata kolmice z bodu T na přímku CD, pak

$$\frac{|DA|}{|CA|} = \frac{|DB|}{|CB|}. \tag{1}$$



Obr. 1 Ilustrace k prvnímu Archimedovu důkazu

První Archimedův důkaz. Při označení podle obr. 1 jsou trojúhelníky DAT a TAC podobné, neboť mají společný úhel při vrcholu D a obvodový úhel ADT je shodný s úsekovým úhlem ATC. Platí

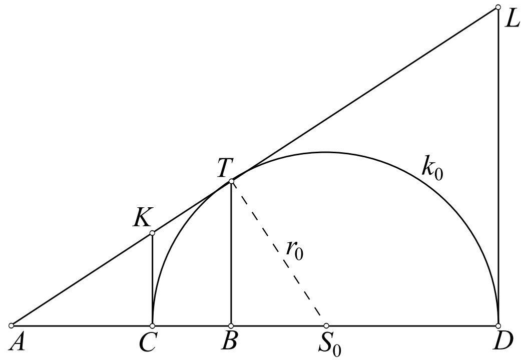
$$\frac{|DA|}{|TA|} = \frac{|TA|}{|CA|} = \frac{|DT|}{|CT|}, \quad \text{a tedy i} \quad \frac{|DA|}{|CA|} = \left(\frac{|DT|}{|CT|}\right)^2, \tag{2}$$

protože délky $|DA|$, $|TA|$ a $|CA|$ tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků DBT a TBC analogicky zjistíme

$$\frac{|DB|}{|TB|} = \frac{|TB|}{|CB|} = \frac{|DT|}{|CT|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|DB|}{|CB|} = \left(\frac{|DT|}{|CT|}\right)^2. \tag{3}$$

Ze vztahů (2) a (3) pak plyne (1). □

Druhý Archimedův důkaz. Označme K a L průsečíky tečny AT s tečnami ke kružnici k_0 v bodech C a D (obr. 2).



Obr. 2 Ilustrace k druhému Archimedovu důkazu

Užitím věty o délkách tečen zjistíme $|CK| = |TK|$ a $|DL| = |TL|$. Z podobnosti trojúhelníků ADL, ACK, posledních dvou vztahů a vlastností rovnoběžného promítání plyne

$$\frac{|DA|}{|CA|} = \frac{|DL|}{|CK|} = \frac{|TL|}{|TK|} = \frac{|DB|}{|CB|}. \qquad \square$$

Starověkým učencům asi neušlo, že i trojúhelník AS_0T na obr. 2 je pravoúhlý a platí

$$|AS_0| \cdot |BS_0| = |S_0T|^2 = r_0^2. \tag{4}$$

Pro každý bod X kružnice k_0 odtud dostáváme

$$|AS_0| \cdot |BS_0| = |S_0X|^2,$$

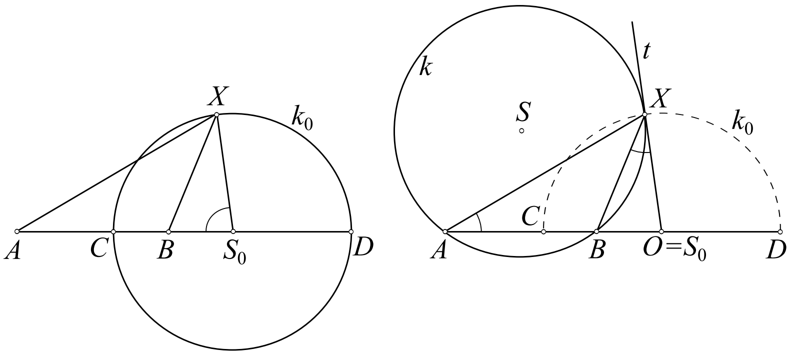
neboli

$$\frac{|AS_0|}{|XS_0|} = \frac{|XS_0|}{|BS_0|}.$$

Pokud $X \notin \{C, D\}$ (obr. 3 vlevo), jsou trojúhelníky S_0AX a S_0XB podobné podle věty sus. Z podobnosti plyne

$$\frac{|AS_0|}{|XS_0|} = \frac{|XS_0|}{|BS_0|} = \frac{|AX|}{|BX|} = \lambda, \tag{5}$$

přičemž poměr $\lambda = |AS_0|/r_0 = r_0/|BS_0|$ nezávisí na poloze bodu $X \in k_0$.



Obr. 3 K odvození Apolloniovy kružnice

Zafixujme nyní body A, B ($A \neq B$) a zvolme pevně kladné číslo $\lambda \neq 1$. Pak na přímce AB existuje právě jedna dvojice bodů C a D taková, že bod C leží uvnitř a bod D vně úsečky AB, a platí

$$\lambda = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Body C, D lze snadno sestrojit a k nim i kružnici k_0 nad průměrem CD. Víme již, že pro každý bod $X \in k_0$ platí (5). Obráceně, když $X \notin \{C, D\}$ a platí $|AX|/|BX| = \lambda$, můžeme trojúhelníku ABX opsat kružnici k a v bodě X k ní vést tečnu t (obr. 3 vpravo), která protne přímku AB v bodě O. V analogii s prvním důkazem věty 1 lze z podobnosti trojúhelníků AOX a XOB zjistit

$$\frac{|AO|}{|XO|} = \frac{|XO|}{|BO|} = \frac{|AX|}{|BX|} = \lambda$$

Odtud a ze vztahu (5) plyne

$$\frac{|AO|}{|BO|} = \lambda^2 = \frac{|AS_0|}{|BS_0|},$$

neboli $O = S_0$. Platí tedy následující věta.

Věta 2 (Apolloniova kružnice)

Nechť jsou v rovině dány dva různé body A, B a kladné číslo $\lambda \neq 1$. Množinou všech bodů X dané roviny, pro něž platí $|AX| : |BX| = \lambda$, je kružnice k_0 sestrojená nad průměrem CD, kde C a D jsou body přímky AB splňující vztah $|AC| : |BC| = |AD| : |BD| = \lambda$.

Kružnice z věty 2 se dnes nazývá *Apolloniova kružnice*, třebaže ji přibližně sto let před Apolloniem popsal Aristoteles. Ale to jsme již zmínili minule.

Každá čtveřice (A, B, C, D) navzájem různých kolineárních bodů A, B, C a D, pro niž platí

$$|AC| : |BC| = |AD| : |BD| \tag{6}$$

a tedy i ekvivalentní vztah (1), se nazývá *harmonická čtveřice bodů.*

Z dnešního hlediska popisuje úvodní část (Archimedovy) věty 1 konstrukci bodu B jako obrazu bodu A v kruhové inverzi určené základní kružnicí k_0 a rovnicí (4).

Když se vrátíme k situaci z pravé části obr. 3, zobrazuje daná inverze bod X na sebe, bod A na bod B a bod B na A. Kružnice k opsaná trojúhelníku ABX je body A, B a X jednoznačně určená. Každá kružnice, jež neprochází středem inverze, se inverzí zobrazí na kružnici. Je tedy k v inverzi samodružná.

Povšimněme si ještě, že k a k_0 jsou *ortogonální kružnice* (jejich tečny v průsečíku X jsou na sebe kolmé). A tak poslední úvahy potvrzují známý poznatek, že každá kružnice kolmá k základní kružnici se v inverzi zobrazí na sebe. Z úvah plyne věta:

Věta 3 (Harmonická čtveřice bodů a inverze)

Je-li (A, B, C, D) harmonická čtveřice bodů, pak inverze se základní kružnicí k_0 sestrojenou nad průměrem CD zobrazuje bod A na bod B. Všechny kružnice s tětivou AB jsou v této inverzi samodružné (a kolmé ke k_0).

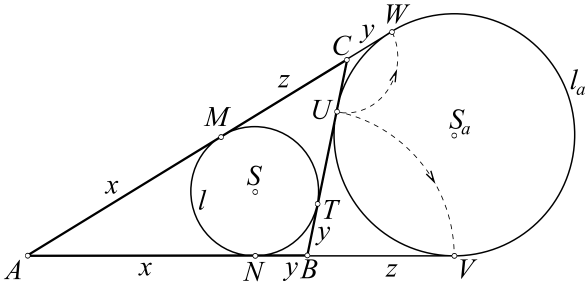
Dále se budeme zabývat kružnicemi z geometrie trojúhelníku. Větou o délkách tečen, kterou Archimedes elegantně využil v druhém důkazu věty 1, zdůvodníme i následující tvrzení.

Věta 4

Jestliže se strana BC trojúhelníku ABC dotýká vepsané a připsané kružnice v bodech T a U, pak $|BT| = |CU|$ (a $|CT| = |BU|$).

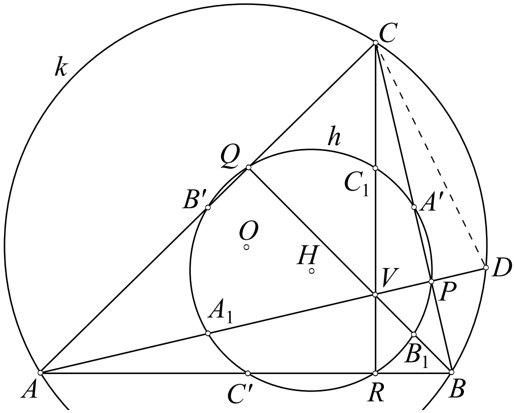
Důkaz. Nechť se polopřímka AB dotýká vepsané kružnice l v bodě N, připsané kružnice l_a v bodě V a polopřímka AC má s kružnicemi l a l_a body dotyku M a W (obr. 4). Vzhledem k větě o délkách tečen můžeme označit $x = |AN| = |AM|$, $y = |BN| = |BT|$ a $z = |CM| = |CT|$. Pro polovinu s obvodu trojúhelníku ABC platí $s = x + y + z$. Také však je

$s = |AV| = |AW|$, jak napovídají čárkované oblouky s šipkami na obrázku. Z uvedených vztahů plyne $|BV| = z$ a $|CU| = |CW| = y = |BT|$. $\square$



Obr. 4 K dotykům vepsané a připsané kružnice

Označme $k(O; r)$ kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Její obraz ve stejnolehlosti s koeficientem $\frac{1}{2}$ a středem v ortocentru V trojúhelníku je kružnice h, která se nazývá *kružnice devíti bodů*, resp. *Feuerbachova kružnice* (obr. 5).



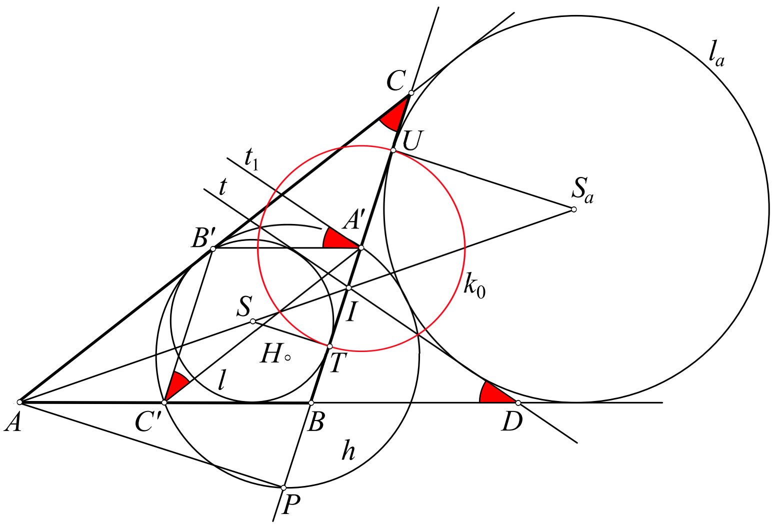
Obr. 5 Kružnice devíti bodů

Z definice ihned plyne, že kružnice h má střed H ve středu úsečky OV, poloměr $r/2$ a obsahuje středy A_1, B_1, a C_1 úseček, jež spojují ortocentrum trojúhelníku s jeho vrcholy a jimž se říká *Eulerovy body*. Podle tvrzení z úlohy 4 na ní leží také paty výšek trojúhelníku. Trojúhelníky ABC, ABV, BCV a CAV mají stejné paty výšek P, Q a R. Proto mají i společnou kružnici devíti bodů. Přitom v každém z posledních tří trojúhelníků jsou dvě úsečky, jež spojují jeho ortocentrum s vrcholem, totožné s některými stranami trojúhelníku ABC. Odtud plyne, že na kružnici h leží i středy A', B' a C' stran trojúhelníku ABC.

Naše úvahy uzavřeme důkazem věty 5, kterou (v poněkud nepřesné formulaci[1]) uvedl a dokázal *Karl Feuerbach* (1800–1834), bratr filozofa *Ludwiga Feuerbacha*. Jeho poměrně složitý trigonometrický důkaz se opíral o poznatek, že dvě kružnice se dotýkají, právě když je vzdálenost jejich středů rovna buď součtu, nebo absolutní hodnotě rozdílu jejich poloměrů. Zde uvedeme nepočetní důkaz, který vychází z předchozích poznatků a publikace [4].

Věta 5 (Feuerbachova)

Kružnice h se dotýká kružnic trojúhelníku připsaných i kružnice vepsané, pokud s ní nesplývá. Dotyk s připsanými kružnicemi je vnější a s vepsanou kružnicí vnitřní.



Obr. 6 Kružnice devíti bodů

Důkaz. Je zřejmé, že v rovnostranném trojúhelníku je kružnice h totožná s kružnicí trojúhelníku vepsanou a dotýká se připsaných kružnic ve středech stran trojúhelníku. Omezíme se tedy na nerovnostranný trojúhel-

[1] Základním objektem původní věty [3, str. 38] je kružnice, která prochází patami výšek trojúhelníku. Ta není pro pravoúhlý trojúhelník jednoznačně určena.

ník ABC znázorněný s kružnicí $h(H; |HA'|)$ na obr. 6. Dvě stejnolehlosti převádí vepsanou kružnici $l(S; r_1)$ na kružnici $l_a(S_a; r_2)$ trojúhelníku připsanou ke straně BC. Středem první stejnolehlosti je bod A, druhé pak průsečík I společných vnitřních tečen BC a t kružnic. Absolutní hodnota koeficientů obou stejnolehlostí je

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{|AS_a|}{|AS|} = \frac{|IS_a|}{|IS|}.$$

Vidíme, že (A, I, S, S_a) je harmonická čtveřice bodů. Stejně tak i čtveřice (P, I, T, U), jež je kolmým průmětem čtveřice (A, I, S, S_a) do přímky BC. Úsečky TU a BC mají společný střed A' (věta 4). Podle věty 3 zobrazuje kruhová inverze se základní kružnicí $k_0(A'; |A'T|)$, bod $P \in h$ na bod I. Kružnici h, jež prochází středem A' inverze, zobrazuje na přímku kolmou k úsečce $A'H$ a tedy rovnoběžnou s tečnou t_1 sestrojenou v bodě A' ke kružnici h. Ukážeme, že touto rovnoběžkou je přímka t. Stačí pouze ověřit, že $t \parallel t_1$.

Tečna t_1 svírá s tětivou $A'B'$ úsekový úhel shodný s obvodovým úhlem $A'C'B'$. Ten je shodný s protilehlým úhlem $A'CB'$ rovnoběžníku $A'CB'C'$. Ze souměrnosti podle přímky SS_a dostaneme $|\sphericalangle A'CB'| = |\sphericalangle IDA|$. Odtud a z relace $B'A' \parallel AB$ plyne $t \parallel t_1$. Obrazem kružnice h je tedy přímka t. Kružnice l a l_a jsou kolmé ke kružnici k_0 a proto v dané inverzi samodružné. Jestliže se jich dotýká tečna t, pak se jich dotýká i její vzor, kružnice h.

Typy dotyků jsou zřejmé z definic kružnic a pro ostatní připsané kružnice je důkaz analogický. □

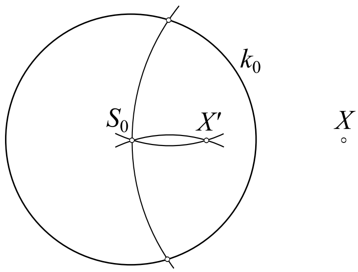
Tím končí naše krátká procházka napříč staletími. Jejím cílem bylo upozornit na úzkou souvislost tří tematických celků: Apolloniovy kružnice, kruhové inverze a mocnosti bodu ke kružnici. V tradičních učebnicích bývají uváděny odděleně, což může nepříznivě ovlivňovat kvalitu získaných poznatků.

K procvičení dvou základních metod, využívání podobnosti trojúhelníků a věty o délkách tečen, je určena většina níže uvedených úloh.

Úlohy

1. Jestliže V je ortocentrum trojúhelníku ABC, který není pravoúhlý, pak jsou kružnice opsané trojúhelníkům ABC, BCV, CVA a VAB shodné. Dokažte.

2. Na obr. 7 je znázorněna konstrukce obrazu X' bodu X v inverzi se základní kružnicí k_0 provedená pouze kružítkem. Popište ji a dokažte.



Obr. 7 Sestrojení obrazu bodu v kruhové inverzi kružítkem

3. Jestliže se tři shodné kružnice protínají v bodě D a body C, B, A (různé od D) jsou průsečíky vždy dvou z těchto kružnic, pak D je ortocentrum trojúhelníku ABC a kružnice tomuto trojúhelníku opsaná je shodná s prvními třemi. Dokažte.

4. Dokažte, že obraz ortocentra trojúhelníku v souměrnosti podle jeho strany leží na kružnici trojúhelníku opsané. (Dokažte shodnost trojúhelníků CPV a CPD na obr. 5.)

5. V pravoúhlém trojúhelníku ABC je Q pata výšky, ρ_1, ρ_2 a ρ poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům AQC, BQC a ABC. Dokažte, že platí: a) $\rho = (a + b - c)/2$, b) $\rho_1 + \rho_2 + \rho = v$.

6. Označme ρ a ρ_c poloměr kružnice vepsané a připsané přeponě AB trojúhelníku ABC. Dokažte, že trojúhelník ABC má přeponu délky $c = \rho_c - \rho$ a obsah $S = \rho \cdot \rho_c$.

Literatura

[1] *Archimed*: Sočiněnija. Dostupné na: http://www.math.ru/lib/book/djvu/klassik/arhimed.djvu.

[2] *Boček, L. – Zhouf, J.*: Planimetrie. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha, 2009.

[3] *Feuerbach, K.*: Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch die bestimmten Linien und Figuren. Riegel und Wiesner, Nürnberg, 1822.

[4] *Pedoe, D.*: Circles: A Mathematical View. The Mathematical Association of America, USA, 1995.