Mocnost bodu ke kružnici v důkazech

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Cílem tohoto článku je ukázat, jak nám může geometrický vztah, který se nazývá *mocnost bodu ke kružnici*, pomoci při důkazech.

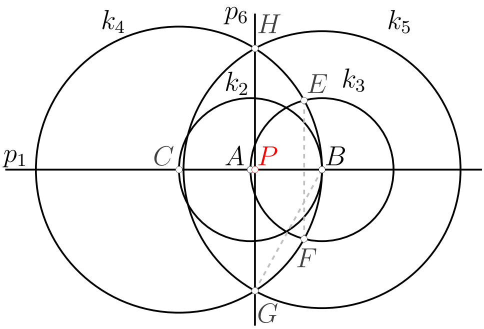
V článku [3] jsme uvedli několik postupů jak sestrojit bod, který dělí úsečku AB v daném poměru, a využitím známých geometrických vztahů jsme ověřovali jejich správnost. Zde předvedeme několik dalších konstrukcí, jejichž správnost ověříme využitím mocnosti bodu ke kružnici. Ve všech důkazech budeme danou úsečku AB považovat za jednotkovou.

Abychom nezamlžili hlavní myšlenku, nebudeme některé snadné výpočty rozepisovat do úplných podrobností. Buď nám tedy věřte nebo (lépe) si ke čtení vezměte tužku a papír.

Podívejme se nejprve na jednu konstrukci, jejíž správnost ověříme pomocí známých planimetrických vět.

Jedna šestnáctina

Konstrukcí na obr. 1 sestrojíme bod P v jedné šestnáctině úsečky AB, tedy bod úsečky, pro který platí $|AP| : |PB| = 1 : 15$.



Obr. 1 Konstrukce bodu v jedné šestnáctině úsečky

Středy a poloměry kružnic k_2, k_3, k_4 jsou zřejmé z obr. 1, kružnice k_5 má střed B a poloměr $|EF|$.

Důkaz. Správnost konstrukce snadno dokážeme využitím pravoúhlých trojúhelníků. Bod P je středem společné tětivy GH kružnic k_4, k_5. Středy kružnic jsou body C, B, poloměr kružnice k_4 je 2, zbývá tedy spočítat poloměr kružnice k_5, tedy délku úsečky EF, která je společnou tětivou kružnic k_3, k_4.

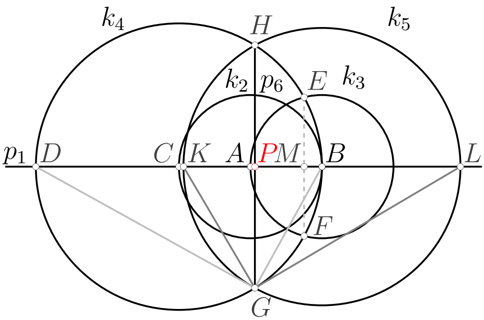
Je-li M střed úsečky EF (obr. 2), dostáváme z pravoúhlých trojúhelníků CMF, BMF, v nichž je úsečka FM odvěsnou,

$$|CF|^2 - |CM|^2 = |FM|^2 = |BF|^2 - |BM|^2, \quad \text{kde } |CM| = |CB| - |BM|,$$

tedy

$$4 - (2 - |BM|)^2 = 1 - |BM|^2, \quad \text{odkud } |BM| = \frac{1}{4}.$$

Odtud již (například z Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku BMF) dostáváme $|FM| = \frac{\sqrt{15}}{4}$ a $|EF| = \frac{\sqrt{15}}{2}$.



Obr. 2 Důkaz konstrukce jedné šestnáctiny

Jednou z možností, jak určit polohu bodu P na úsečce AB, je užití Eukleidovy věty o výšce. Úsečka GP je výškou pravoúhlého trojúhelníku DGB i pravoúhlého trojúhelníku KGL, kde K, L jsou průsečíky kružnice k_5 s přímkou p_1 (obr. 2). Proto

$$|PD| \cdot |PB| = |GP|^2 = |PK| \cdot |PL|, \tag{M1}$$

kde

$$|PD| = |AD| + |AP|, \ |PB| = |AB| - |AP|,$$
$$|PL| = |BL| + |PB|, \ |PK| = |BK| - |PB|,$$

tj.

$$|PD| = 3 + |AP|, \qquad |PB| = 1 - |AP|,$$
$$|PL| = \tfrac{\sqrt{15}}{2} + |PB|,\ |PK| = \tfrac{\sqrt{15}}{2} - |PB|,$$

tedy označíme-li $|AP| = d$

$$(3 + d) \cdot (1 - d) = \left(\frac{\sqrt{15}}{2} + (1 - d) \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{15}}{2} - (1 - d) \right).$$

Odtud po úpravě a vyřešení rovnice (které ponecháváme čtenáři) $d = \dfrac{1}{16}$.

Vztah ($M1$), který jsme odvodili ze vztahů v pravoúhlých trojúhelnících, je speciálním případem geometrického vztahu známého jako *mocnost bodu ke kružnici*. Najdeme ho v učebnicích planimetrie i v mnoha internetových výukových kurzech (např. [4]), zde si ho připomeneme.

Mocnost bodu ke kružnici

Definice

Pro každý bod M a každou kružnici $k(S, r)$ definujeme *mocnost bodu* M ke kružnici k jako číslo $m = |MS|^2 - r^2$.

Poznámka. Z definice plyne, že $m \in \left\langle -r^2, +\infty \right)$.

Věta 1

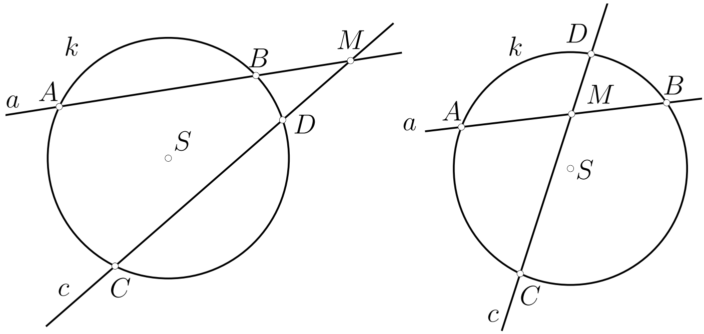
Pro libovolnou přímku procházející bodem M a protínající kružnici k v bodech K, L platí

$$m = \begin{cases} |KM| \cdot |LM| & \text{pro každý bod } M \text{ vně kružnice } k \\ -|KM| \cdot |LM| & \text{pro každý bod } M \text{ uvnitř kružnice } k \\ \hfill 0 & \text{pro každý bod } M \text{ kružnice } k \end{cases}$$

Pro $K = L$ je přímka tečnou kružnice a $m = |MK|^2$.

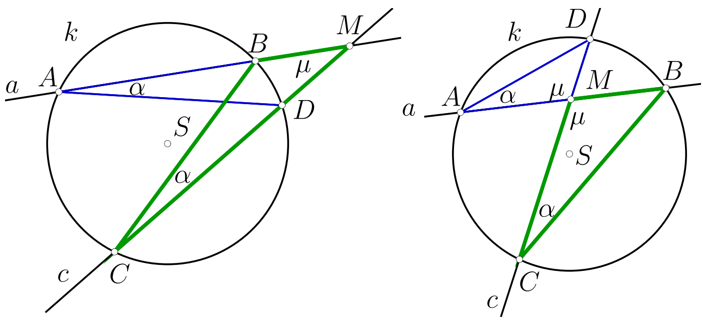
Důkaz ekvivalence výše uvedených tvrzení a definice najde čtenář ve většině středoškolských učebnic planimetrie, v [2] a v další literatuře. Zde přímo dokážeme pouze tvrzení, které budeme dále využívat a které je důsledkem této věty.

Důsledek 1. Jsou-li a, c dvě různé sečny kružnice k procházející bodem M, $a \cap k = \{A, B\}$, $c \cap k = \{C, D\}$, platí $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$ (obr. 3, vlevo pro bod M vně kružnice, vpravo pro bod M uvnitř kružnice).



Obr. 3 Důsledek věty o mocnosti

Zdůvodnění. I bez znalosti výše uvedených vztahů vidíme, že trojúhelníky MAD, MCB v každé z ilustrací na obr. 4 jsou podobné. Mají totiž shodný úhel μ při vrcholu M a úhly při vrcholech A, C jsou shodné proto, že jsou to obvodové úhly v kružnici k nad obloukem BD.
Proto $|MA| : |MD| = |MC| : |MB|$, a tudíž $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$.



Obr. 4 Důkaz důsledku věty o mocnosti

Chordála

Z výše uvedeného důsledku plyne, že pokud se kružnice k, l protínají (označme průsečíky K, L), má každý bod přímky KL stejnou mocnost k oběma kružnicím. Platí obecné tvrzení, že taková přímka existuje pro libovolné nesoustředné kružnice. Uvádíme ho bez důkazu:

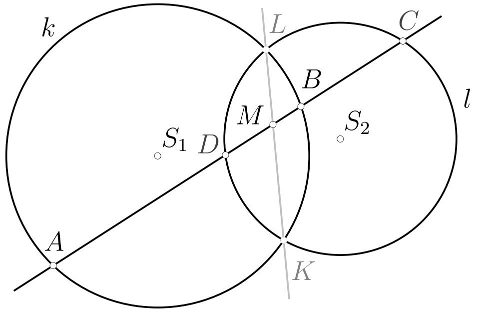
Věta 2

Množina všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma různým nesoustředným kružnicím, je přímka kolmá na střednou daných kružnic.
Poznámka. Tato přímka se nazývá *chordála* daných kružnic. Pro soustředné kružnice chordálu nedefinujeme.

Důsledek 2 – Sečna dvou kružnic. Vedeme-li z libovolného bodu M na chordále nesoustředných kružnic k, l (kde M není průsečíkem kružnic) přímku, která protíná kružnici k v bodech A, B a kružnici l v bodech C, D (obr. 5), platí

$$|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD| \qquad (M2).$$

Tento vztah je přímou aplikací vlastností bodu chordály a využijeme ho při důkazech v následujících příkladech. Vztah $(M1)$, který jsme odvodili v důkazu správnosti konstrukce jedné šestnáctiny v úvodu tohoto článku, je jeho variantou pro sečnu, která je střednou daných kružnic. Na obr. 5 je ilustrace pro bod chordály M uvnitř kružnic, vztah platí i pro bod M vně kružnic a kružnice se nemusí protínat.



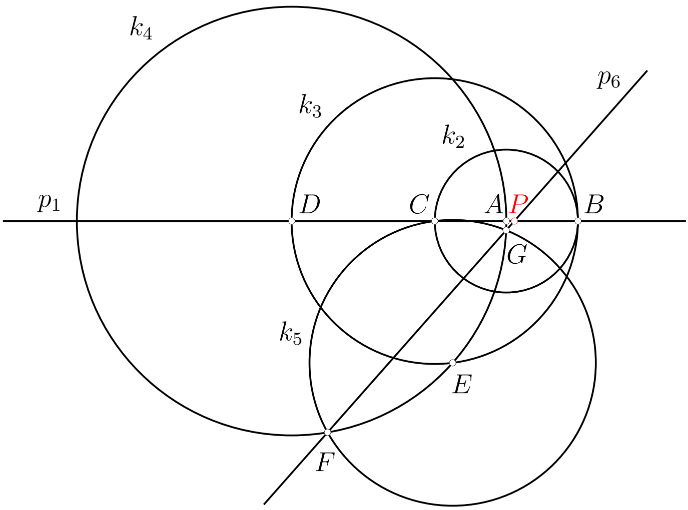
Obr. 5 Délky na sečně, M uvnitř kružnic

Jedna devítina poprvé

Konstrukcí na obr. 6 sestrojíme bod P v jedné devítině úsečky AB, tedy bod úsečky, pro který platí $|AP| : |PB| = 1 : 8$. Kružnice k_5 má střed v průsečíku E kružnic k_3, k_4 a prochází bodem C.

Hledaný bod P je průsečíkem přímky FG s přímkou AB. Přímka FG je *chordálou* (společnou tětivou) kružnic $k_4(D, |DA|)$, $k_5(E, |EC|)$. Hledanou délku $|AP|$ tedy určíme pomocí vztahu $(M2)$, pokud najdeme druhé průsečíky kružnic k_4, k_5 s přímkou AB a vhodně vyjádříme délky několika úseček na přímce AB.

Pro bod K – druhý průsečík kružnice k_4 s přímkou AB – platí $|DK| = 3$.



Obr. 6 Prvá konstrukce jedné devítiny

Je-li L druhý průsečík přímky AB s kružnicí k_5 a M střed úsečky CL (obr. 7), určíme polohu bodu L pomocí bodu M, přičemž polohu bodu M určíme stejným postupem, jakým jsme určili polohu bodu M již v prvé konstrukci tohoto článku (konstrukce jedné šestnáctiny).

Opakujeme-li výše uvedený postup, pak:

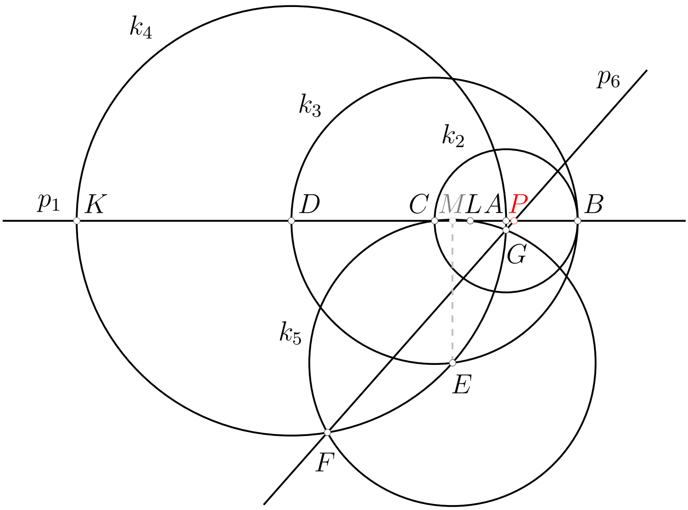
Protože $|CE| = 2$ a $|DE| = 3$, dostáváme

$$|DE|^2 - |DM|^2 = |EM|^2 = |CE|^2 - |CM|^2,$$

kde $|DM| = |CM| + |CD|$, tedy

$$9 - (2 + |CM|)^2 = 4 - |CM|^2,$$

odkud $|CM| = \frac{1}{4}$, a tedy $|CL| = \frac{1}{2} = |AL|$.



Obr. 7 Důkaz správnosti konstrukce jedné devítiny. Bod M je střed tětivy CL kružnice k_5, je to tedy bod přímky p_1

Nyní již snadno vyjádříme délku úsečky AP ze vztahu $(M2)$:

$$|PK| \cdot |PA| = |PL| \cdot |PC|.$$

Označíme-li $|AP| = d$, pak $(6 + d) \cdot d = (\frac{1}{2} + d) \cdot (1 + d)$, odkud $d = \frac{1}{9}$.

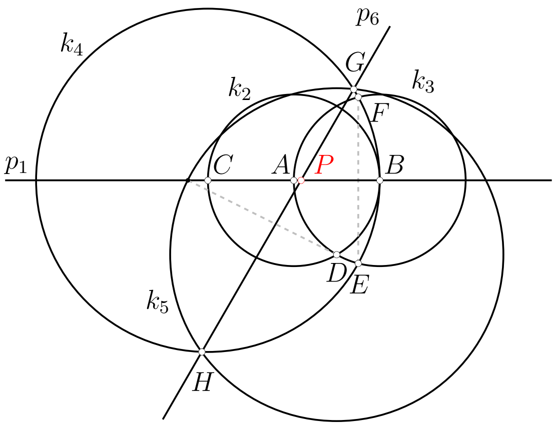
Jedna dvanáctina

Jako snadné cvičení nyní dokážeme správnost konstrukce na obr. 8, kterou sestrojíme bod P v jedné dvanáctině úsečky AB. Kružnice k_5 má střed D a poloměr $|EF|$.

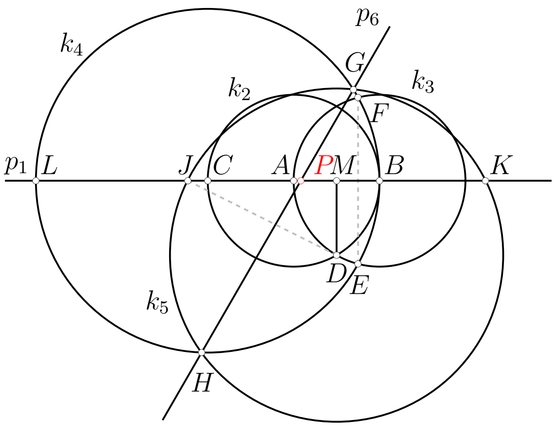
Bod P leží na chordále HG kružnic k_4, k_5 (uvnitř kružnic). Pro výpočet délek na přímce AB, která obě kružnice protíná a prochází bodem P, proto opět využijeme vztah $(M2)$.

Označme J, K průsečíky kružnice $k_5(D, |EF|)$ s přímkou AB (obr. 9). Délku úsečky EF jsme již spočetli v prvním příkladu, $|EF| = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Bod D je průsečík kružnic k_2, k_3, proto pata M kolmice na přímku AB z bodu D je střed úsečky AB, tedy $|AM| = \frac{1}{2}$ a v pravoúhlém trojúhelníku JMD platí $|MD| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|JD| = |EF| = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Odtud

$$|JM| = \sqrt{\frac{15}{4} - \frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$$



Obr. 8 Konstrukce jedné dvanáctiny



Obr. 9 Důkaz správnosti konstrukce jedné dvanáctiny

Bod P má ke kružnicím k_4, k_5 stejnou mocnost, proto délku $|AP| = d$ vypočteme za vztahu $|PL| \cdot |PB| = |PJ| \cdot |PK|$, tedy

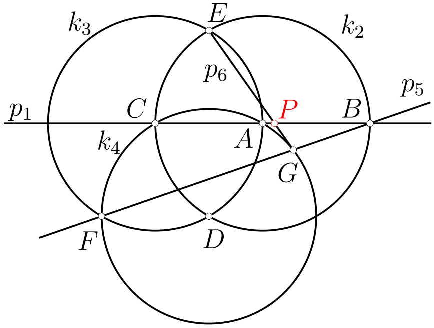
$$(3+d)\cdot(1-d) = \left(\sqrt{3} - \left(\frac{1}{2} - d\right)\right) \cdot \left(\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2} - d\right)\right).$$

Odtud $d = |AP| = \frac{1}{12}$.

Ve zdůvodnění správnosti následující konstrukce využijeme *mocnost bodu ke kružnici* k pomocnému výpočtu.

Jedna devítina podruhé

Týž bod na úsečce AB můžeme často sestrojit různými postupy. Na obr. 10 je další konstrukce bodu v jedné devítině úsečky AB.



Obr. 10 Jiná konstrukce jedné devítiny

Vztah mocnosti nyní nemůžeme využít přímo k určení polohy bodu P na přímce AB, protože bod P neleží na chordále žádné dvojice sestrojených kružnic. Mocnost nám ale pomůže určit poměr, v němž dělí bod G úsečku FB.

Středy shodných kružnic k_2, k_3, k_4 o poloměru 1 leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku. Proto je EF průměr kružnice k_3 (trojúhelník EFH na obr. 11 je rovnostranný o straně délky 2). Proto $|CL| = \frac{1}{2}$, $|LF| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|BL| = \frac{5}{2}$, a tedy

$$|BF| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{7}.$$

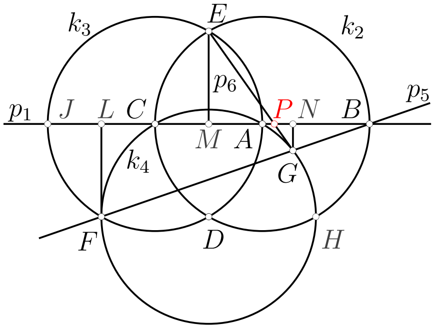
Mocnost bodu B ke kružnici k_4 je rovna $|BC| \cdot |BA| = 2 = |BF| \cdot |BG|$. Protože $|BF| = \sqrt{7}$, je $|BG| = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{7} \cdot \sqrt{7}$. Tudíž $|BG| = \frac{2}{7} \cdot |BF|$. Jestliže označíme po řadě L, M, N paty kolmic na přímku AB z bodů F, E, G, pak z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků BFL, BGN také $|NG| = \frac{2}{7} \cdot |LF|$ a $|BN| = \frac{2}{7} \cdot |BL|$, kde $|BL| = \frac{5}{2}$. Proto

$$|LN| = \frac{5}{7} \cdot |BL| = \frac{25}{14}, \qquad |MN| = |LN| - |LM| = \frac{25}{14} - 1 = \frac{11}{14}.$$

Odtud již vypočteme všechny potřebné dělicí poměry. Bod P dělí úsečku MN v poměru $|ME| : |NG| = |LF| : |NG| = 7 : 2$. Tudíž

$$|MP| = \frac{7}{9} \cdot |MN| = \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{14} = \frac{11}{18}.$$

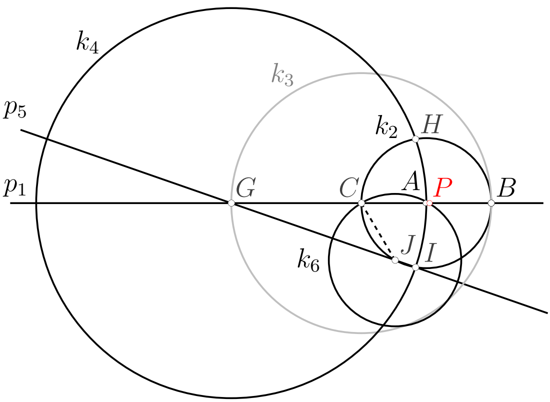
Odtud $|AP| = \frac{11}{18} - \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$.



Obr. 11 Důkaz správnosti konstrukce jedné devítiny

Cvičení – jedna sedmadvacetina

Uměli byste dokázat, že konstrukcí na obr. 12 sestrojíme bod v jedné sedmadvacetině úsečky AB?



Obr. 12 Konstrukce jedné sedmadvacetiny

Kružnice $k_3(C, |CB|)$ slouží k sestrojení bodu G, který je středem kružnice $k_4(G, |GA|)$, bod I je jedním z průsečíků kružnic k_2, k_4, bod J je druhým průsečíkem přímky $p_5 = GI$ s kružnicí k_2 a kružnice k_6 má střed v bodě J a prochází bodem C. Výsledný bod P je průsečíkem kružnice k_6 s přímkou AB.

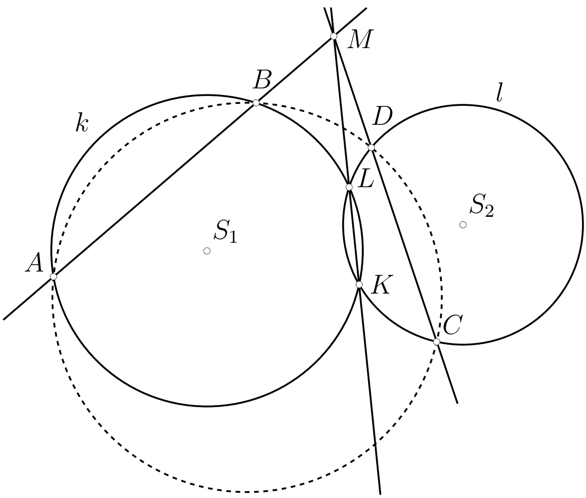
Poradíme vám, že stačí dvakrát využít mocnost bodu ke kružnici, jednou pro průsečík přímky IH s přímkou AB, podruhé pro bod G (pro určení polohy bodu J na úsečce GI).

Úlohy bez výpočtu

Mocnost bodu ke kružnici jsme zatím využili k výpočtům délek, hodí se však i k důkazům geometrických vztahů, v nichž se o délkách nemluví. Viz např. [1], [2]. Zkuste si sami dokázat následující dvě (snadná) tvrzení.

Body na kružnici

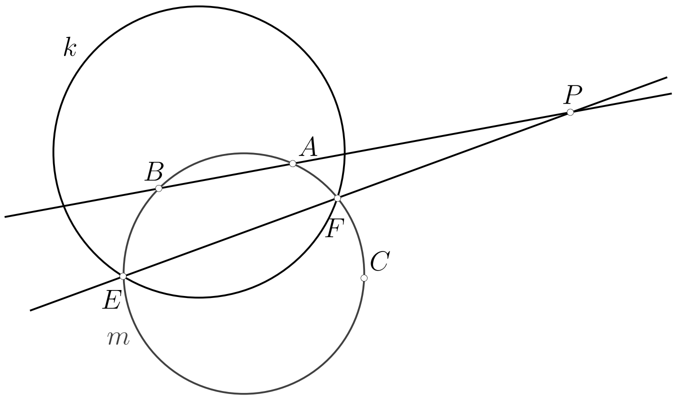
Vedeme-li z libovolného bodu M na chordále nesoustředných kružnic k, l (kde M není průsečíkem kružnic) dvě různé přímky, z nichž jedna protíná kružnici k v bodech A, B a druhá protíná kružnici l v bodech C, D, leží body A, B, C, D na jedné kružnici (návodný obr. 13 ilustruje zadání pro bod M vně kružnic).



Obr. 13 Body na kružnici

Průsečík přímek

Je dána kružnice k a body A, B, které na ní neleží. Zvolme bod C libovolně tak, aby neležel na přímce AB a aby se kružnice k a kružnice m opsaná trojúhelníku ABC protínaly. Označme průsečíky těchto kružnic E, F a sestrojme přímky AB, EF. Dokažte, že poloha průsečíku P přímek (pokud existuje) nezávisí na volbě bodu C (obr. 14).



Obr. 14 Průsečík přímek

V tomto článku jsme ukázali, že *mocnost bodu ke kružnici* není jen pojem, jehož definici si žáci ve škole mají zapamatovat, ale je to užitečný geometrický vztah, který má také konstruktivní charakter. Mocnost jsme využili při důkazech tvrzení o délkách v geometrických konstrukcích. Naznačili jsme také, že tento vztah může usnadnit důkazy mnoha dalších geometrických tvrzení. Možná vás uvedené důkazy inspirují k hledání konstrukcí dalších dělicích bodů na úsečce AB, k němuž jsme vás vyzvali již v článku [3].

Literatura

[1] *Prasolov, V. V.*: Zadači po geometrii I. Moskva, 1986 (rusky). Anglický překlad: Leites, D.: Problems in Plane and Solid Geometry, v.1 Plane Geometry. 2006, s. 57–59.

[2] *Horák, S.*: Kružnice. Škola mladých matematiků, svazek 16, Praha, 1966.

[3] *Gergelitsová, Š. – Holan, T.*: Dělení úsečky. MFI, 24 (2015), č. 2, s. 95–104.

[4] Teorie – Mocnost bodu ke kružnici, chordála a potenční střed. Dostupné z: http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/teorie/mocnost.html.