Co nového víme o prvočíslech

IVAN CHAJDA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Problémy související s prvočísly zajímaly matematiky již v antice. Je znám velmi elementární a přitom elegantní důkaz Eukleida (cca 325–260 př. n. l.) o nekonečnosti množiny prvočísel. V ostrém kontrastu k tomuto tvrzení je problém tzv. *prvočíselných dvojčat*.

Připomeňme, že dvě prvočísla p, q se nazývají *prvočíselná dvojčata*, je-li $q = p + 2$. Již ve starém Řecku před více než 2000 lety byl zformulován tento problém: „Existuje nekonečně mnoho prvočíselných dvojčat?“ Přes velmi elementární formulaci se dosud nepodařilo tuto hypotézu ani potvrdit, avšak ani vyvrátit. Přes zdánlivou jednoduchost není známa ani žádná metoda nebo zdůvodnitelný postup, o kterém by šlo předpokládat, že vede k cíli. Použitím počítačů se sice daří generovat stále další a další prvočíselná dvojčata, ovšem to není matematický důkaz tvrzení, že je jich nekonečně mnoho.

Ačkoli zatím tento problém řešit neumíme, objevil se první přelomový krůček v r. 2014, který zformuloval *Yitang Zhang*, viz [4]. Ve skutečnosti byl tento výsledek dosažen již v r. 2013, kdy byl zaslán do redakce Annales of Mathematics, vyšel o rok později. Yitang Zhang je 57letý matematik z Univerzity of New Hapshire. Až dosud publikoval pouze jeden článek a jeden preprint na arXiv, který však obsahoval chybu. Jeho zcela přelomový výsledek by tak asi unikl pozornosti matematické komunity, kdyby o něm nenapsal *A. Granville* článek v Bulletin of the American Mathematical Society, viz [1].

O jaký výsledek se tedy jedná? Zhang dokázal následující tvrzení.

Věta 1

Existuje přirozené číslo $b \geq 2$ tak, že existuje nekonečně mnoho dvojic prvočísel p a q splňujících rovnost $q = p + b$.

Důkaz této věty je velmi obtížný a má asi 50 stran, proto ho zde nebudeme prezentovat. Zmíníme ale několik podstatných poznámek. Čtenáře jistě napadne, že kdyby $b = 2$, pak by tím byl problém prvočíselných dvojčat vyřešen. Zásadní otázkou tedy je velikost čísla b z věty 1. Bohužel, Zhang dokázal pouze, že toto číslo b není větší než 70 miliard! To jistě není příliš uspokojivý výsledek, podnítil však další výzkum v této oblasti. Zhang dokázal následující tvrzení.

Věta 2

Existuje přirozené číslo k takové, že pokud $x + a_1, \ldots, x + a_k$ je tzv. přípustná k-tice, pak existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n, pro které aspoň dvě z čísel $n + a_1, \ldots, n + a_k$ jsou prvočísla.

Připomeňme pojem přípustné k-tice. Nechť $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ jsou přirozená čísla (vzájemně různá). Řekneme, že prvočíslo p je *obstrukce* této k-tice $a_1, \ldots, a_k$ pokud p dělí aspoň jedno z čísel $n + a_1, \ldots, n + a_k$ pro každé přirozené číslo n. Pokud neexistuje žádná obstrukce pro k-tici $a_1, \ldots, a_k$, nazývá se tato k-tice *přípustná*.

Zhang dokázal, že pro k z věty 2 lze položit $k = 3\,500\,000$, což je ale pořád příliš velké číslo. Jeho postup důkazu byl však následně analyzován několika specialisty v teorii čísel se snahou najít podstatně menší hodnotu čísla k. *J. Maynard* dokázal v dosud nepublikované práci, že lze k redukovat na hodnotu 105, a následně zlepšil odhad na $k = 50$, viz [3]. Samozřejmě, že pro $k = 2$ bychom dostali řešení problému prvočíselných dvojčat, ale toto očekávání se nejeví příliš optimisticky. Očekává se pouze, že by se asi dalo dokázat hodnotu $k = 3$. Nicméně z věty 2 plyne zajímavý důsledek, který dokázali J. Maynard a T. Tao.

Věta 3

Pro každé přirozené číslo $m \geq 2$ existuje přirozené číslo k tak, že je-li $x + a_1, \ldots, x + a_k$ přípustná k-tice pro některé x, pak existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n tak, že aspoň m z čísel $n + a_1, \ldots, n + a_k$ jsou prvočísla.

Čtenáře, kterého tento problém zajímá hlouběji, odkazujeme na velmi obsáhlý článek [1], který je na rozdíl od citovaných výsledků snadno dosažitelný, a obsahuje detailní pojednání o těchto problémech.

Literatura

[1] *Granville, A.*: Primes in intervals of bounded length. Bull. Amer. Math. Soc., roč. 52 (2015), č. 2, s. 171–222.

[2] *Maynard, J.*: Large gaps between primes. Preprint.

[3] *Polymath, D. H. J.*: Variants of the Selberg sieve, and bounden intervals containing many primes. Preprint.

[4] *Zhang, Y.*: Bounded gaps between primes. Ann. of Math., roč. 179 (2014), č. 2, s. 1121–1174.