Soutěž o největší fraktál

JANA KOPFOVÁ

Matematický ústav Slezské Univerzity, Opava

Cílem tohoto článku je obeznámit čtenáře s tím, co jsou fraktály a jak tyto fascinující geometrické útvary, kterými se zabývá současná matematika, přiblížit dětem na základní či střední škole. Fraktály jsou skutečně krásné, dají se proto využít k motivaci ke studiu matematiky, zároveň ale také k rozvíjení poznatků z geometrie či vytváření prvních představ o limitě. Rádi bychom vás také vyzvali, abyste se zapojili do naší soutěže „O největší fraktál“.

Fraktál je takový geometrický útvar, který je soběpodobný – znamená to, že pokud daný útvar pozorujeme v jakémkoliv měřítku či rozlišení, pozorujeme stále opakující se určitý charakteristický tvar (motiv); mívá na první pohled velmi složitý tvar, ale je generován opakovaným použitím jednoduchých pravidel. Fraktály jsou na první pohled nejsložitější geometrické objekty, které současná matematika zkoumá, mají však často překvapivě jednoduchou matematickou strukturu.

Asi nejznámějším fraktálem je tzv. Sierpinského trojúhelník, pozoruhodný především tím, že má nekonečně velký obvod a přitom nekonečně malý obsah. Konstrukce Sierpinského trojúhelníka je jednoduchá, vzniká postupným nekonečným odebíráním menších rovnostranných trojúhelníků od základního rovnostranného trojúhelníku.

Vaším úkolem bude složit co největší Sierpinského trojúhelník, který poskládáte z menších Sierpinského trojúhelníků (zvolte jednotnou stranu délky 15 cm). Na fotografii z Opavy vidíte akci, na níž jsme takový trojúhelník poskládali z 81 trojúhelníků. Překonáte náš rekord?

Návrh aktivity ve třídě: výroba Sierpinského trojúhelníku

Každý žák si narýsuje velký rovnostranný trojúhelník se stranou délky 15 cm. Pak narýsuje všechny střední příčky ve velkém trojúhelníku, ty rozdělí velký trojúhelník na čtyři menší. Prostřední rovnostranný trojúhelník žák vybarví. Zůstanou tři nevybarvené trojúhelníky. Zkonstruuje středy jejich stran a opět narýsuje střední příčky. Vybarví tři nově vzniklé prostřední trojúhelníky.

Buďte nápadití v použití barev. Opakujte tento postup tolikrát, kolikrát to jenom půjde. Zkuste trojúhelníky vybarvovat zajímavými, symetrickými vzory.

Každý žák si vytvoří vlastní model Sierpinského trojúhelníka, přitom mladší žáci si mohou procvičovat geometrii – jak sestrojit rovnostranný trojúhelník bez použití kružítka, jak sestrojit střední příčku trojúhelníka. Můžete mluvit o podobných trojúhelnících a procvičovat odhady a logické odvozování. Žáci doplňují své odhady o počtu trojúhelníků a jejich obsahů do tabulky. Obsah se počítá vzhledem k celkovému obsahu prvního velkého trojúhelníka, o kterém předpokládáme, že má obsah 1.

Cílem je najít závislost a dopředu před dalším krokem určit, kolik bude vybarvených trojúhelníků, následně porovnat svůj odhad se skutečností.

Úloha 1

Kolik trojúhelníků bude vybarvených po čtvrtém opakování? Kolik po šestém opakování? [27, 243]

Úloha 2

Obsah nevybarvených trojúhelníků je po prvním kroku 3/4, po druhém 9/16. Jak to bude po třetím kroku? [27/64]

Úloha 3 (Pro šikovnější nebo starší žáky)

Objevte vzorec: po n-tém kroku bude obsah nevybarvené plochy $(3/4)^n$.

Nejšikovnější žáci možná objeví, že se zvyšováním počtu iterací se obsah nevybarvené části bude neustále zmenšovat až do nekonečna.

Úloha 4

Vypočítejte obvod nevybarveného útvaru.

Všimněte si, že roste do nekonečna se zvyšujícím se počtem iterací. (začátky pochopení pojmu limita, u mladších žáků se uspokojíme na intuitivní úrovni)

Sierpinského trojúhelník je tak příkladem útvaru s nekonečně velkým obvodem a přitom s nekonečně malým obsahem. Zajisté učitele nebo žáky napadnou další zajímavé úlohy.

Na konec aktivity vytvořte ve třídě ze skupiny 9, 27, 81, ... trojúhelníků větší Sierpinského trojúhelník (můžete zkusit vytvořit i jiné zajímavé tvary). Ideálně při počtu 27 žáků (z nich se dá sestavit další větší fraktál; při menším počtu žáků mohou šikovnější a rychlejší žáci zhotovit fraktály dva). Závěrečné sestavování, případně doplněné pořízením fotografií, je pěkným vyvrcholením aktivity.

Úloha 5

Kolik trojúhelníků by bylo potřeba na sestavení dalšího většího fraktálu? [81]

Šikovnějším žákům neujde souvislost s počtem nevybarvených trojúhelníků počítaných dříve.

Zapojte do soutěže nejenom vaši třídu ale i další třídy, popřípadě celou školu – udělejte si obrovský fraktál ve vaší tělocvičně nebo na dvoře. Svůj výtvor vyfotografujte a pošlete na email `jana.kopfova@math.slu.cz` do 31. 1. 2016. Pro školu, která nám pošle obrázek svého největšího fraktálu, čeká zajímavá cena, z fotek uspořádáme výstavku.

Podobné aktivity hledající vzorce pro obsah a obvod je možné udělat pro Sierpinskeho čtverec. (Čtverec rozdělíme na 9 menších stejných čtverců a prostřední čtverec vybarvíme. Tento postup následně zopakujeme pro každý ze zbylých 8 nevybarvených menších čtverců, atd.).

Úloha 6

Kolik čtverců vybarvíme po šestém kroku. $\left[8^5\right]$

A kolik po n-tém? $\left[8^{(n-1)}\right]$

Úloha 7

Zkuste spočítat obsah nevybarvených částí po šestém kroku, po n-tém kroku, po nekonečně mnoha krocích.

[Obsah vede na součet geometrické řady, který je roven 1.]

O něco složitější je Sierpinského trojrozměrný fraktál – čtyřstěn. Další pěknou aktivitou je jeho vyrábění ve třídě, které vede také k rozvíjení prostorové představivosti (možné materiály, papírové čtyřstěny, případně složené pomocí origami, nebo konstrukce pomocí špejlí a kuliček z maršmelounů nebo kuliček vyrobených z mouky a vody).

Úloha 8

V prvním kroku potřebujeme 4 čtyřstěny. Kolik jich bude potřeba v pátém kroku? Kolik v n-tém kroku? Kolik hran a kolik vrcholů?

Úloha 9

Jaký bude povrch takto zkonstruovaného útvaru? Jaký bude povrch po třetím kroku? A po n-tém? A po nekonečně mnoha krocích?

[Toto číslo se s počtem kroků nijak nemění.]

Úloha 10

Jaký bude objem tohoto útvaru? Po prvním kroku, po pátém kroku, po n-tém kroku? Po nekonečně mnoha krocích?

[Tento objem se bude zmenšovat až k nule.]

Alternativní možností je pyramida s čtvercovou základnou – zde potřebujeme 5 čtyřstěnů v prvním kroku. Kolik jich bude potřeba v sedmém kroku? Stejné úkoly opakujeme i pro tento útvar, studenti si sami kladou otázky.

Zároveň bychom vám rádi nabídli DVD „Matematika a její tajemství“, kde se o světě fraktálů i jiných zajímavých tématech z matematiky můžete dozvědět více. Nabízíme českou, anglickou i německou verzi. DVD obsahují sedm filmů o matematice namluvené rodilými mluvčími na témata:

1. Tajemství fraktálů.

   Může existovat útvar s nekonečným obvodem a s konečným obsahem? Pojď se s námi podívat do světa fraktálů! Co jsou to fraktály, kdo a jak je poprvé objevil a kde se používají.

2. Příběh čísla π.

   Číslo π je jedno z nejslavnějších čísel v matematice. Kde se ale vzalo, jaké má vlastnosti a jak a proč se objevuje ve vzorcích pro obsah kruhu, nebo objem koule?

3. Tajemství topologie.

   Topolog prý nerozezná pneumatiku od hrnku na kávu. Co je to topologie a jaká další tajemství skrývá? Od Platónských těles, Eulerovy věty až po Möbiův pásek a Kleinovu láhev.

4. Tajemství ukryté ve spirálách.

   Co mají spirály společné s králíky? A matematika s botanikou? Archimédovy, logaritmické a Fibonacciovy spirály, jejich vlastnosti a souvislosti s výskytem v přírodě.

5. Tajemství pravoúhlých trojúhelníků.

   Co má společné Pythagoras s pravoúhlým trojúhelníkem? Historie a další netušené zajímavosti kolem Pythagorovy věty.

6. Tajemství počítání s nekonečnem.

   Může mít nekonečná řada čísel konečný součet? Řady geometrické, harmonické a jak je to s jejich součty. Jak se s nekonečnem počítá? Sčítání nekonečen a Zenónovy paradoxy.

7. Tajemství Pascalova trojúhelníku.

   Co všechno skrývá Pascalův trojúhelník? Historie a souvislosti, trojúhelníková a čtvercová čísla, fraktálové vzory a jiné pozoruhodné vlastnosti ukryté v Pascalově trojúhelníku.

Filmy je možné využít k doplnění či rozšíření učiva na základních i středních školách. Na mnohé otázky uvedené ve filmech lze navázat ve vyučování matematiky a zamýšlet se tak nad dalšími problémy v širších souvislostech.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 11. 2015 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz.*