3. Tajemství topologie.

   Topolog prý nerozezná pneumatiku od hrnku na kávu. Co je to topologie a jaká další tajemství skrývá? Od Platónských těles, Eulerovy věty až po Möbiův pásek a Kleinovu láhev.

4. Tajemství ukryté ve spirálách.

   Co mají spirály společné s králíky? A matematika s botanikou? Archimédovy, logaritmické a Fibonacciovy spirály, jejich vlastnosti a souvislosti s výskytem v přírodě.

5. Tajemství pravoúhlých trojúhelníků.

   Co má společné Pythagoras s pravoúhlým trojúhelníkem? Historie a další netušené zajímavosti kolem Pythagorovy věty.

6. Tajemství počítání s nekonečnem.

   Může mít nekonečná řada čísel konečný součet? Řady geometrické, harmonické a jak je to s jejich součty. Jak se s nekonečnem počítá? Sčítání nekonečen a Zenónovy paradoxy.

7. Tajemství Pascalova trojúhelníku.

   Co všechno skrývá Pascalův trojúhelník? Historie a souvislosti, trojúhelníková a čtvercová čísla, fraktálové vzory a jiné pozoruhodné vlastnosti ukryté v Pascalově trojúhelníku.

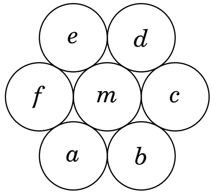
Filmy je možné využít k doplnění či rozšíření učiva na základních i středních školách. Na mnohé otázky uvedené ve filmech lze navázat ve vyučování matematiky a zamýšlet se tak nad dalšími problémy v širších souvislostech.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 11. 2015 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz.*

Úloha 217

Kruh na obrázku je obklopen šesti dotýkajícími se shodnými kruhy. V těchto kruzích jsou zapsána reálná čísla a, b, c, d, e, f a m. Přitom číslo v každém kruhu je součinem všech čísel v kruzích, které se jej dotýkají. Určete všechny možné hodnoty čísla m.



Robert Geretschläger (Graz)

Úloha 218

Najděte všechny dvojice (x, y) celých čísel vyhovujících rovnici

$$x^2 - 3x - 4xy - 2y + 4y^2 + 4 = 0.$$

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 213 a 214, jejichž zadání byla zveřejněna ve druhém čísle letošního (24.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 213

Najděte největšího lichého dělitele čísla

$$\left(\binom{2017}{2} + \binom{2017}{5} + \binom{2017}{8} + \cdots + \binom{2017}{2015}\right) - \\ - \left(\binom{2015}{1} + \binom{2015}{4} + \binom{2015}{7} + \cdots + \binom{2015}{2014}\right).$$

Radek Horenský

Řešení. Označme

$$A = \binom{2017}{2} + \binom{2017}{5} + \binom{2017}{8} + \cdots + \binom{2017}{2015}$$

a

$$B = \binom{2015}{1} + \binom{2015}{4} + \binom{2015}{7} + \cdots + \binom{2015}{2014}.$$

Opakovaným užitím kombinatorické identity $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, kde n,

k jsou celá čísla, $0 \leq k < n$, dostaneme

$$\begin{aligned}
A - B &= \left(\binom{2017}{2} + \binom{2017}{5} + \cdots + \binom{2017}{2015}\right) - B = \\
&= \left(\binom{2016}{1} + \binom{2016}{2}\right) + \left(\binom{2016}{4} + \binom{2016}{5}\right) + \cdots + \\
&\qquad + \left(\binom{2016}{2014} + \binom{2016}{2015}\right) - B = \\
&= \left(\binom{2015}{0} + \binom{2015}{1} + \binom{2015}{1} + \binom{2015}{2}\right) + \\
&\qquad + \left(\binom{2015}{3} + \binom{2015}{4} + \binom{2015}{4} + \binom{2015}{5}\right) + \\
&\qquad + \cdots + \left(\binom{2015}{2013} + \binom{2015}{2014} + \binom{2015}{2014} + \binom{2015}{2015}\right) - \\
&\qquad - \left(\binom{2015}{1} + \binom{2015}{4} + \cdots + \binom{2015}{2014}\right) = \\
&= \binom{2015}{0} + \binom{2015}{1} + \binom{2015}{2} + \binom{2015}{3} + \cdots + \binom{2015}{2015} = 2^{2015}.
\end{aligned}$$

Při poslední úpravě jsme využili známou identitu, která je důsledkem binomické věty po umocnění výrazu $(1+1)^{2015}$. Odtud již plyne, že největší lichý dělitel daného čísla je 1.

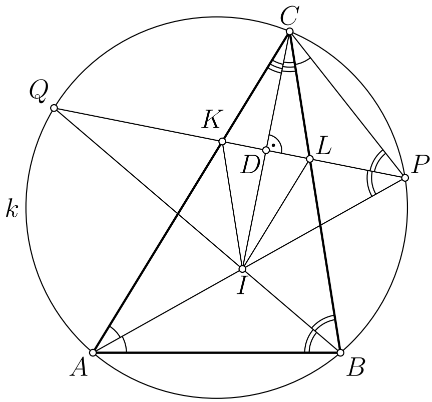
Správná řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Úloha 214

Nechť k je kružnice opsaná ostroúhlému trojúhelníku ABC. Označme I střed kružnice jemu vepsané. Dále nechť P je střed oblouku BC kružnice k, který neobsahuje bod A, a Q je střed oblouku AC kružnice k, který neobsahuje bod B. Přímka PQ protíná strany AC a BC po řadě v bodech K a L. Dokažte, že $CKIL$ je kosočtverec.

Jozef Mészáros

Řešení. Označme standardně α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC při vrcholech A, B a C a dále D průsečík přímek PQ a CI. Protože P je středem oblouku BC kružnice k, jsou úhly BAP a CAP shodné, mají tedy velikost $\frac{\alpha}{2}$ a bod I leží na přímce AP. Podobně ukážeme, že bod I leží na přímce BQ a platí $|\sphericalangle ABQ| = |\sphericalangle CBQ| = \beta/2$. Podle věty o obvodovém úhlu jsou shodné také dvojice úhlů BAP, BCP, dále CBQ, CPQ a ABQ, APQ, platí tedy $|\sphericalangle BCP| = \frac{\alpha}{2}$ a $|\sphericalangle CPQ| = |\sphericalangle APQ| = \frac{\beta}{2}$. Střed kružnice vepsané leží na osách vnitřních úhlů, proto $|\sphericalangle ACI| = |\sphericalangle BCI| = \frac{\gamma}{2}$.



Pro součet vnitřních úhlů při vrcholech C a P v trojúhelníku CDP platí

$$|\sphericalangle DCP| + |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle DCL| + |\sphericalangle LCP| + |\sphericalangle CPD| = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ,$$

tedy přímky PQ a CI jsou navzájem kolmé. Přímka CD je osou úhlu KCL a je kolmá k přímce KL, body K a L jsou tak souměrně sdružené podle přímky CD, proto bod D je středem úsečky KL. Podobně přímka PD je osou úhlu CPI a je kolmá k přímce CI, tedy body C a I jsou souměrně sdružené podle přímky PD, a bod D je tak i středem úsečky CI. Zjistili jsme, že úhlopříčky čtyřúhelníku $CKIL$ se půlí a jsou navzájem kolmé, proto čtyřúhelník $CKIL$ je nutně kosočtverec nebo čtverec. Velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu C je γ, protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, platí $\gamma < 90^\circ$, tedy čtyřúhelník $CKIL$ je kosočtverec, což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Pavel Calábek