O záludnosti jedné úlohy z MO

HANA ŠTĚPÁNKOVÁ

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Před časem jsem posuzovala řešení jedné úlohy z Matematické olympiády (MO), která byla zadána žákům 1. ročníků středních škol a odpovídajících ročníků gymnázií v krajském kole (v Jihočeském kraji) kategorie C této soutěže.

Zadání úlohy bylo jednoduché a srozumitelné. Kromě čtyř řešitelů z celkového počtu 42 se všichni ostatní pokusili nalézt řešení této úlohy. Osmnáct z nich nepřišlo na myšlenku, jak danou úlohu vyřešit, ostatní dospěli ke správnému výsledku. Každý, kdo opravuje úlohy MO, kontroluje nejen správný výsledek, ale sleduje také správný postup řešení. Při této činnosti jsem byla nemile překvapena zjištěním, že pouze 6 řešitelů uvedlo naprosto korektní řešení. Většinu z těch, kteří dospěli ke správnému výsledku, avšak s chybným postupem, zavedl do slepé uličky nezjednodušený poměr 63 : 36 uvedený v zadání úlohy.

Je již tradicí zařazovat do zadání úloh číslo ročníku, v kterém se soutěž konala, nebo letopočet příslušného roku. Z tohoto důvodu byl v textu úlohy uveden zápis poměru 63 : 36 místo jednoduššího 7 : 4. Uvažovala jsem proto o možnosti změny formulace zadané úlohy tak, aby chybný postup, kterým se ubírala většina řešitelů, nevedl ke správnému výsledku. Jak by zvolal Archimédes „Heuréka“, našla jsem. Pojďme se nyní detailněji podívat na tuto úlohu, její správné řešení a porovnejme je s úvahou většiny řešitelů a dále s pozměněnou úlohou.

Úloha (63-MO-C-II-1)

Najděte všechny trojice (ne nutně různých) číslic a, b, c, pro něž pětimístná čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ jsou v poměru 63 : 36.

Řešení. Dvě zadaná čísla můžeme rozepsat jako

$$\overline{6abc3} = 60000 + 1000a + 100b + 10c + 3,$$
$$\overline{3abc6} = 30000 + 1000a + 100b + 10c + 6,$$

kde $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Zavedením substituce

$$x = 100a + 10b + 1c, \tag{1}$$

zjednodušíme zápisy čísel na tvar

$$\overline{6abc3} = 60000 + 10x + 3, \tag{2}$$
$$\overline{3abc6} = 30000 + 10x + 6. \tag{3}$$

Má-li být splněna podmínka, že daná čísla jsou v poměru 63 : 36, musí platit

$$\frac{\overline{6abc3}}{\overline{3abc6}} = \frac{63}{36} = \frac{7}{4}. \tag{4}$$

Dosadíme-li do vztahu (4) tvary čísel (2) a (3), získáme následující rovnici

$$\frac{60000 + 10x + 3}{30000 + 10x + 6} = \frac{7}{4}.$$

Odtud $x = 999$. Tomu odpovídá trojice číslic $a = b = c = 9$. Úloha má tedy jediné řešení, a to čísla 69 993 a 39 996.

Uvedený postup vznikl rozvedením vzorového řešení dostupného na internetovém zdroji [3], kde je i návod na bodové ohodnocení této úlohy. Následující možnost chybného řešení zdroj neuvádí.

Nesprávná úvaha některých řešitelů

Jak bylo v úvodu článku zmíněno, někteří účastníci krajského kola MO se při řešení zadané úlohy nevyvarovali chybné úvahy. Nejčastější přístup ke zjištění dvou neznámých čísel totiž spočíval v tom, že řešitelé hledali tato čísla ve tvaru násobků čísel 63 a 36 tak, aby přitom splňovala daný poměr. Protože hledaná čísla jsou opravdu takovými násobky, dospěli tito řešitelé ke správnému výsledku.

Popišme nyní postup jejich řešení: Aby hledaná pětimístná čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ byla v poměru 63 : 36, musí být nějakým přirozeným násobkem čísel 63 a 36. Označme tedy

$$\overline{6abc3} = 63 \cdot k, \quad \overline{3abc6} = 36 \cdot k, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}.$$

Snadno zjistíme, že číslo $63 \cdot k$ bude pětimístné s první číslicí 6, jestliže $k \in \{953, 954, \ldots, 1111\}$. Analogicky vidíme, že číslo $63 \cdot k$ bude pětimístné s první číslicí 3, když $k \in \{834, 835, \ldots, 1111\}$. Obě skutečnosti jsou splněny současně, právě když $k \in \{952, 953, \ldots, 1111\}$. Navíc, k-násobek čísla 63 je ukončen číslicí 3 (a k-násobek čísla 36 je ukončen číslicí 6), má-li číslo k na místě jednotek číslici 1, tedy $k \in \{961, 971, \ldots, 1111\}$. Vyzkoušením všech 16 možností zjistíme, že vyhovuje jen $k = 1111$, pro něž platí $a = b = c = 9$, a hledaná čísla jsou 69 993 a 39 996.

Tento postup vypadá na první pohled zcela správně, ale není tomu tak. Řešitelé úlohy opomněli jednu důležitou věc. Zadaný poměr 63 : 36 bychom totiž mohli také napsat například jako 42 : 24. Stále jde o poměr, jehož základní tvar je 7 : 4. V zadané úloze je rozšířen devíti a podruhé jsme jej rozšířili osmi.

Podívejme se, jak by celá situace vypadala, kdyby zadaný poměr byl 42 : 24, a porovnejme řešení oběma výše uvedenými přístupy.

Řešení pozměněné úlohy

Máme najít všechny trojice (ne nutně různých) číslic a, b, c, pro něž pětimístná čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ jsou v poměru 42 : 24.

První způsob řešení. Dvě zadaná čísla opět můžeme rozepsat jako

$$\overline{6abc3} = 60000 + 1000a + 100b + 10c + 3,$$
$$\overline{3abc6} = 30000 + 1000a + 100b + 10c + 6,$$

kde $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Využitím substituce (1) dostaneme čísla ve tvaru (2) a (3) a sestavíme rovnici

$$\frac{60000 + 10x + 3}{30000 + 10x + 6} = \frac{42}{24} = \frac{7}{4}.$$

Ať už k výpočtu na pravé straně rovnice použijeme zlomek $\frac{42}{24}$ nebo $\frac{7}{4}$, výsledek bude vždy $x = 999$. Nacházíme jediné řešení, kterým jsou čísla 69 993 a 39 996.

Druhý způsob řešení. Hledejme neznámá čísla jako násobky čísel 42, resp. 24. Můžeme je tedy zapsat ve tvaru

$$\overline{6abc3} = 42 \cdot k, \quad \overline{3abc6} = 24 \cdot k, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}.$$

Je zřejmé, že pro žádné přirozené číslo k nebude číslo $\overline{6abc3}$ násobkem čísla 42. Číslo $\overline{6abc3}$ je totiž číslo liché a každý přirozený násobek čísla 42 je vždy číslo sudé.

Odpověď většiny řešitelů by v tomto případě asi byla, že hledaná čísla neexistují. Pokud by jim ovšem na mysl nepřišlo podezření, že úloha by nejspíš nějaké řešení mít měla a oni by ve svém výpočtu chybnou úvahu odhalili a opravili ji.

Bystrý čtenář už určitě nahlédl, že základním problémem při druhém přístupu k řešení dané úlohy je nutnost uvedení poměru na základní tvar. Tím bude zaručeno, že vezmeme v úvahu každá dvě čísla, která jsou v poměru 7 : 4 a nalezneme už několikrát uvedené řešení; to se přes násobky čísla 42 nestalo.

Jistě bychom našli i jiné příklady, kdy řešitelé uvádějí zdánlivě korektní postupy vedoucí ke správnému výsledku, v nichž však při důkladnějším prozkoumání objevíme hrubé chyby. Tito řešitelé si tyto nedostatky neuvědomují. Pokud posuzovatel takové chyby nepřehlédne, je vystaven tlaku řešitelů, dotazujících se s pocitem křivdy na bodovou penalizaci, když vědí, že jejich výsledek je správný. Smutnější ale je, pokud méně zkušený opravující nezjistí, že postup řešení je chybný.

V tomto příspěvku jsme chtěli upozornit především na důležitou skutečnost, že správný výsledek a postup řešení úlohy jsou dvě části, které neoddělitelně patří k sobě.

Literatura

[1] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 7. ročník ZŠ, 2. díl. Prometheus, Praha, 1998.

[2] *Tlustý, P.*: Obecná algebra pro učitele. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2006.

[3] 63. MO, dostupné na: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/1024174/c63ii.pdf.

Čtyři body na kružnici

JAROSLAV ŠVRČEK – VOJTĚCH ZLÁMAL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem tohoto příspěvku je poskytnout čtenáři stručný a přehledný návod, jak řešit planimetrické důkazové úlohy, jejichž úkolem (nebo součástí řešení) je dokázat, že dané čtyři (popř. více než čtyři) body leží na téže kružnici.