MATEMATIKA

Diofantovské rovnice 2. stupně

LADISLAVA FRANCOVÁ – JITKA KÜHNOVÁ

Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové

V tomto článku se budeme zabývat některými případy diofantovských rovnic 2. stupně o dvou neznámých a dále otázkou, zda se s nimi mohou nebo v minulosti mohli seznámit studenti středních škol, především gymnázií. Diofantovská rovnice 2. stupně o dvou neznámých x, y má obecný tvar

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

kde a, b, c, d, e, f jsou daná celá čísla. Budeme se zde věnovat zejména případům, kdy $a = 0$ nebo $c = 0$. Tyto rovnice byly uvedeny v učebnicích matematiky pro gymnázia a reálky, podle kterých se vyučovalo ve druhé polovině 19. století a na počátku 20. století. Po reformě školství, která proběhla v letech 1908 až 1910, v učebnicích matematiky pro tyto školy zůstaly už jen diofantovské (původně neurčité) rovnice lineární. Ve druhé polovině 20. století se z učebnic matematiky pro střední školy i z výuky matematiky na nich takřka vytratily i lineární diofantovské rovnice.

Diofantovské rovnice 2. stupně ve starých učebnicích

Nejprve ukážeme, jakým způsobem se diofantovské rovnice 2. stupně o dvou neznámých řešily v některých učebnicích matematiky pro gymnázia a reálky ve druhé polovině 19. století. Například v učebnici [1] je uvedena následující úloha.

Úloha 1

Nalezněte celočíselná řešení x, y rovnice

$$mx + ny + pxy = k, \quad \text{kde} \quad (m, n, p, k) = 1\,,$$

kde m, n, p, k jsou daná celá čísla a symbol (m, n, p, k) označuje jejich největší společný dělitel.

Řešení. Autor postupuje tak, že z dané rovnice vyjádří

$$y = \frac{k - mx}{n + px}$$

a obě strany této rovnice vynásobí číslem p. Tím dostane

$$py = \frac{pk - pmx}{n + px} = -m + \frac{nm + pk}{n + px}\,.$$

Má-li být y celé číslo, musí $n + px$ dělit čitatele $nm + pk$. Položíme-li

$$mn + pk = AB$$

tak, aby $A = px + n$, tj. $x = \frac{A-n}{p}$ bylo celé číslo. Dostaneme tak

$$py = -m + \frac{AB}{px + n}\,, \quad \text{tj.} \quad y = \frac{B - m}{p}\,.$$

Jestliže p dělí $B - m$, je i y celé číslo.

Tento postup se v [1] používá při řešení následující úlohy.

Úloha 2

V množině všech přirozených čísel řešte rovnici

$$2x + 3y + 5xy = 42\,.$$

Řešení. Protože $(2, 3, 5, 42) = 1$, je rovnice řešitelná. Z dané rovnice máme

$$y = \frac{42 - 2x}{3 + 5x}\,.$$

Po vynásobení obou stran rovnice číslem 5 dostaneme

$$5y = \frac{210 - 10x}{3 + 5x} = -2 + \frac{216}{3 + 5x}\,.$$

Aby x, y byla celá čísla, musíme čitatele 216 vyjádřit jako součin $A \cdot B$ tak, že $5 \mid (A - 3)$ a zároveň $5 \mid (B - 2)$. Ačkoliv je číslo 216 dělitelné čísly $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216$, pouze pro dělitele $8, 12, 18, 27$ platí, že $216 = 8 \cdot 27 = 12 \cdot 18$ a že

$$(5 \mid (8 - 3)) \wedge (5 \mid (27 - 2)) \wedge (5 \mid (18 - 3)) \wedge (5 \mid (12 - 2))\,.$$

- Nechť $A = 8,\ B = 27$. Pak

  $$\frac{216}{3 + 5x} = \frac{8 \cdot 27}{3 + 5x} = 27 \cdot \frac{8}{3 + 5x}.$$

  Položíme-li $8 = 3 + 5x$, máme $x = 1$ a protože $5y = -2 + 27 = 25$, je $y = 5$.

- Nechť $A = 18,\ B = 12$. Pak

  $$\frac{216}{3 + 5x} = 12 \cdot \frac{18}{3 + 5x}.$$

  Položíme-li $18 = 3 + 5x$, je $x = 3$. Z rovnice $5y = -2 + 12 = 10$ máme $y = 2$.

Víc než dvě uvedená přirozená řešení v tomto případě neexistují.

V současné době je obvyklejší následující způsob řešení dané rovnice. Nejprve ji vynásobíme číslem 5 a dostaneme tak rovnici

$$25xy + 10x + 15y = 210\,,$$

kterou potom postupným vytýkáním upravíme na tvar

$$(5x + 3)(5y + 2) = 216\,.$$

Nyní musí být čísla $5x + 3$ a $5y + 2$ sdruženými děliteli čísla 216. Všechny možnosti vypíšeme do následující tabulky, z níž vidíme, že rovnice má jen dvě přirozená řešení.

$5x+3$	1	2	3	4	6	8	9	12	18	24	27	36	54	72	108	216
$5y+2$	216	108	72	54	36	27	24	18	12	9	8	6	4	3	2	1
x	–	–	0	–	–	1	–	–	3	–	–	–	–	–	21	–
y	–	–	14	–	–	5	–	–	2	–	–	–	–	–	0	–

Podobně jako v učebnici [1] se tyto rovnice řeší také v učebnici [2], v níž se navíc můžeme setkat s rovnicí

$$ky = a + bx + cx^2\,,$$

kterou autor řeší pomocí kvadratických zbytků. Zkoumáme-li zbytky, kte-break ré dostaneme po dělení druhých mocnin libovolných celých čísel celým číslem m, zjistíme, že pouze některá čísla z těch, která jsou menší než m, se nacházejí mezi těmito zbytky. Dělíme-li např. číslem $m = 8$ kteroukoli druhou mocninu celého čísla, zjistíme, že zbytkem budou pouze čísla $0, 1$ nebo 4. Takové zbytky pak nazýváme *kvadratické zbytky.*

Označíme-li kvadratický zbytek pro číslo m písmenem a, pak musí existovat celé číslo x tak, že $m \mid (x^2 - a)$. Můžeme sestrojit tabulku kvadratických zbytků pro čísla $m = 3, 4, \ldots, 13$

číslo m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
kvadr. zbytek	1	0;1	1;4	1;3;4	1;2;4	0;1;4	0;1;4;7	1;4;5;6;9	1;3;4;5;9	0;1;4;9	1;3;4;9;10;12

Chceme-li např. vyřešit rovnici $y^2 = 7x + 3$ tak, aby x, y byla celá čísla, vyjádříme x ve tvaru

$$x = \frac{y^2 - 3}{7}\,.$$

Protože se ovšem číslo 3 nevyskytuje mezi kvadratickými zbytky pro číslo 7 (viz tabulka), neexistuje žádné takové celé číslo x pro jakoukoli celočíselnou hodnotu y.

Úloha 3

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$ky = a + bx + cx^2.$$

Řešení. Vynásobíme-li obě strany dané rovnice číslem $4c$, dostaneme

$$4cky = 4ac + 4bcx + 4c^2x^2\,.$$

Jestliže k pravé straně poslední rovnice přičteme b^2 a zároveň b^2 odečteme, máme

$$4cky = 4c^2x^2 + 4bcx + b^2 + 4ac - b^2\,, \quad \text{tj.} \quad 4cky = (2cx + b)^2 - (b^2 - 4ac)\,.$$

Položíme-li $m = 4ck$, $z = 2cx + b$, $w = b^2 - 4ac$, je $my = z^2 - w$, tedy

$$y = \frac{z^2 - w}{m}. \tag{1}$$

Má-li být $y \in \mathbb{Z}$, je nutné, aby $m \mid (z^2 - w)$, neboli jinak řečeno, aby w byl kvadratický zbytek pro číslo m. V kladném případě pak z čísel menších než m vyhledáme právě taková, pro která po dosazení za z do (1) dostaneme číslo dělitelné číslem m.
Pro tuto hodnotu z pak ze vztahu $z = 2cx + b$ určíme x tak, aby podíl $(x - b)/2c$ byl celé číslo.

Tento postup si ukážeme v úloze:

Úloha 4

V oboru celých čísel nalezněte řešení rovnice

$$2y = 3 - 5x + 2x^2.$$

Řešení. Obě strany rovnice vynásobíme číslem 8 a dostaneme rovnici

$$16y = 24 - 40x + 16x^2\,,$$

kterou ještě upravíme na tvar

$$16y = 16x^2 - 40x + 25 + 24 - 25\,, \quad \text{tj.} \quad 16y = (4x - 5)^2 - 1\,.$$

Položíme-li

$$4x - 5 = z\,, \tag{2}$$

máme

$$y = \frac{z^2 - 1}{16}\,. \tag{3}$$

Protože pro čísla $z = 7, 9, 15$ opravdu $16 \mid (z^2 - 1)$, je číslo 1 kvadratickým zbytkem pro číslo 16. Ze vztahu (2) pak pro $x = (z + 5)/4$ dostaneme celé číslo pouze pro $z = 7$ a $z = 15$, a to $x = 3$ a $x = 5$. Ze vztahu (3) pak je $y = 3$ a $y = 14$.

Je ovšem zřejmé, že i jiná čísla větší než 16 mají tu vlastnost, že dosadíme-li je za z, v (2), (3) dostaneme celočíselné hodnoty x, y. Položíme-li totiž v (2), (3)

$$z = 7 + 16\,k, \quad \text{resp.} \quad z = 15 + 16\,l\,,$$

dostaneme $x = 3 + 4\,k$, resp. $x = 5 + 4\,l$ a $y = 3 + 14\,k + 16\,k^2$, resp. $y = 14 + 30\,l + 16\,l^2$, kde $k, l \in \mathbb{Z}$. Tedy např. pro $z = 23$, resp. $z = 31$ (tj. $k = l = 1$) máme

$$(x, y) \in \{(7; 33), (9; 60)\}$$

Všimneme si ještě, jak se v učebnici [3] řeší diofantovské rovnice 2. stupně obecnějšího tvaru.

Úloha 5

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$ax^2 + bxy + cx + dy + e = 0,\ (a, b, c, d) = 1\,.$$

Řešení. Z dané rovnice vyjádříme

$$y = \frac{-ax^2 - cx - e}{bx + d} = mx + n + \frac{p}{bx + d}.$$

Jsou-li m, n, p zlomky, vynásobíme celý výraz nejmenším společným násobkem jejich jmenovatelů. Nová rovnice pak bude mít tvar

$$Ay = Bx + C + \frac{D}{bx + d}\,.$$

Mají-li být x, y celá čísla, musí $(bx + d) \mid D$. Nalezneme tedy všechny dělitele čísla D a za x vezmeme taková celá čísla, pro která $(bx + d) \mid D$. Z nich pak vybereme ta, pro která je $y \in Z$.

Ukážeme to při řešení úlohy.

Úloha 6

V kladných celých číslech řešte rovnici

$$2x^2 + 3xy - 4x - 2y - 20 = 0\,.$$

Řešení. Vyjádříme-li z dané rovnice y, máme

$$y = \frac{-2x^2 + 4x + 20}{3x - 2} = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{9} + \frac{196}{9(3x - 2)}\,,\ \text{ tj. }\ 9y = -6x + 8 + \frac{196}{3x - 2}\,.$$

Položíme-li postupně

$$3x - 2 = 1;\ 2;\ 4;\ 7;\ 14;\ 28;\ 49;\ 98;\ 196\,,$$

máme

$$x = 1;\ \frac{3}{4};\ 2;\ 3;\ \frac{16}{3};\ 10;\ 17;\ \frac{100}{3};\ 66\,.$$

Ve výrazu

$$\frac{-2x^2 + 4x + 20}{3x - 2}$$

je pro každé kladné celé číslo x jmenovatel kladný. Má-li proto být kladný čitatel, můžeme za x dosadit pouze taková čísla, která jsou nejvýše rovna číslu 5. Řešeními dané rovnice jsou $(x, y, z) \in \{(1; 2; 3), (22; 5; 2)\}$.

Podobně se tyto rovnice řeší také v učebnici [2].

Diofantovské rovnice 2. stupně v Matematické olympiádě (MO)

Jak již bylo výše uvedeno, ve druhé polovině 20. století se diofantovské rovnice 2. stupně v učebnicích matematiky pro střední školy neobjevují, ale i v této době se s nimi můžeme setkat mezi úlohami MO pro střední školy, a dokonce i pro základní školy. Uvedeme některé z těchto úloh a jejich řešení navržená autory úloh.

V 17. ročníku MO se objevila úloha C–I–3.

Úloha 7

Určete délky stran všech pravoúhlých trojúhelníků, které mají současně tyto vlastnosti:

a) *délky stran v centimetrech jsou celá čísla;*

b) *obvod trojúhelníku v cm je roven obsahu trojúhelníku v cm^2.*

Řešení. Označíme-li délky odvěsen a, b a délku přepony c, dostaneme podle zadání úlohy rovnici

$$\frac{1}{2}ab = a + b + c\,, \quad \text{zároveň platí} \quad a^2 + b^2 = c^2\,.$$

Vyloučením c ze soustavy těchto dvou rovnic dostaneme rovnici

$$ab(ab - 4a - 4b + 8) = 0,$$

protože $a > 0$, $b > 0$, musí platit

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0.$$

Tím dostaneme diofantovskou rovnici 2. stupně, kterou upravíme na tvar

$$(a-4)(b-4)=8.$$

Čísla $a-4$ a $b-4$ jsou sdružení dělitelé čísla 8. Všechny možnosti sestavíme do tabulky.

$a-4$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$b-4$	8	4	2	1	-8	-4	-2	-1
a	5	6	8	12	3	2	0	-4
b	12	8	6	5	-4	0	2	3
c	13	10	10	13	–	–	–	–

Závěr. Úloha má dvě řešení, a to $(a, b, c) \equiv (5; 12; 13)$ a $(a, b, c) = (6; 8; 10)$ v centimetrech.

Podobný charakter má i úloha C–I–2 ze 34. ročníku MO.

Úloha 8

Určete rozměry pravidelných čtyřbokých hranolů těchto vlastností:

1) *délky jeho hran jsou vyjádřeny celými čísly,*

2) *velikost objemu hranolu a velikost povrchu hranolu jsou vyjádřeny týmž číslem.*

Řešení. Označíme-li velikost strany čtvercové podstavy hranolu a a výšku hranolu b, dostaneme rovnici

$$a^2b = 2a^2 + 4ab\,, \quad \text{kterou upravíme do tvaru} \quad (a-4)(b-2) = 8\,.$$

Z této rovnice stejným způsobem jako u předchozí úlohy dostaneme čtyři řešení $(a, b) = (5; 10)$, $(6; 6)$, $(8; 4)$ i $(12; 3)$.

V 51. ročníku MO se objevila úloha C–I–4.

Úloha 9

Josef se vracel z výletu. Nejdříve jel vlakem a pak pokračoval ze zastávky na kole. Celá cesta mu trvala přesně 1 hodinu 30 minut a urazil při ní vzdálenost 60 km. Vlak jel průměrnou rychlostí 50 km/h. Určete, *jak dlouho jel Josef na kole, když jeho rychlost v km/h je vyjádřena přirozeným číslem stejně jako vzdálenost měřená v km, kterou na kole ujel.*

Řešení. Označme v vzdálenost v kilometrech, kterou Josef ujel na kole, a r jeho rychlost v km/h. Ze zadání úlohy pak dostaneme rovnici

$$\frac{60-v}{50}+\frac{v}{r}=\frac{3}{2}, \quad \text{kterou upravíme do tvaru} \quad (50-r)(v+15)=750\,.$$

Jelikož vzdálenost v je kladné celé číslo menší než 60, tak pro číslo $v+15$ platí $15 < v+15 < 75$. Zároveň je číslo $v+15$ dělitelem čísla 750. Tudíž máme pro číslo $v+15$ jen tři možnosti, a to 25, 30 a 50. Tedy vzdálenost v může být 10, 15 nebo 35 km. Tomu odpovídají pro rychlost r možnosti 20, 25 nebo 35 km/h.

Josef jel na kole $\frac{v}{r}$ hodin.

Závěr. Úloha má tři řešení, Josef jel na kole buď 30, 36, nebo 60 minut.

Úlohy stejného typu se objevují i v matematické olympiádě pro základní školy. Např. v 39. ročníku MO můžeme nalézt následující úlohy Z8–I–6 a Z8–II–1.

Úloha 10

Najděte všechna kladná celá čísla a, b, pro něž platí

$$ab+a+b=1989\,.$$

Řešení. Při řešení se doporučuje upravit rovnici do tvaru

$$(a+1)(b+1)=1990$$

a číslo 1 990 rozložit na součin dvou činitelů větších než 1. Všechny možnosti zapíšeme do tabulky:

$a+1$	2	5	10	199	398	995
$b+1$	995	398	199	10	5	2
a	1	4	9	198	397	994
b	994	397	198	9	4	1

Tím v posledních dvou řádcích tabulky dostáváme všechna řešení úlohy.

Druhou možností, jak tuto úlohu řešit, je převést danou rovnici do tvaru

$$a = \frac{1989 - b}{b + 1}$$

a pravou stranu dále upravit takto

$$a = \frac{1990}{b + 1} - 1.$$

Nyní musí být $b + 1$ dělitelem čísla 1 990 větším než 1. Další postup je potom stejný jako u předchozího řešení.

Úloha 11

Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Zvětšíme-li jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.

Řešení. Jestliže délky stran daného obdélníku označíme a, b, dostaneme neurčitou rovnici

$$(a + 4)(b - 5) = 2ab.$$

Tuto rovnici můžeme upravit do tvaru

$$(a - 4)(b + 5) = -40$$

a číslo -40 rozložit na součin dvou činitelů. Nemusíme ovšem uvažovat všechny rozklady čísla -40, protože z podmínky $a > 0$ a $b > 0$ plyne $a - 4 > -4$ a $b + 5 > 5$. Tomu vyhovují jen dvě možnosti $a - 4 = -2$ a $b + 5 = 20$ nebo $a - 4 = -1$ a $b + 5 = 40$. Tudíž má úloha dvě řešení, strany daného obdélníku mají délky 2 a 15 nebo 3 a 35.

Druhou možností je upravit rovnici

$$(a + 4)(b - 5) = 2ab \quad \text{do tvaru} \qquad a = 4 - \frac{40}{b + 5}\,.$$

Proto musí $b + 5$ dělit číslo 40 a zároveň $b + 5 > 5$. Tudíž $b + 5 = 8,\ 10,\ 20,\ 40$ a $b = 3,\ 5,\ 15,\ 35$. Jelikož $a > 0$, tak z těchto čtyř možností vyhovuje jen $b = 15$ nebo $b = 35$.

Při studiu starých učebnic matematiky pro gymnázia a reálky nás velice překvapilo, jak obsáhle se v nich vykládají některé části elementární teorie čísel. V našem článku jsme proto chtěly čtenáře seznámit alespoň s některými typy diofantovských rovnic, které se v nich vyskytují. Kromě zde uvedených diofantovských rovnic se ve zmiňovaných učebnicích objevují i další typy diofantovských rovnic a dále také například teorie řetězových zlomků a teorie kongruencí užívaná hlavně k řešení lineárních diofantovských rovnic. S těmito tématy se v současných učebnicích matematiky pro střední školy vůbec nesetkáváme. Uvědomili jsme si ovšem, že i v posledních desetiletích se s úlohami z této části matematiky může seznámit alespoň úzká skupina středoškolských studentů, kteří patří mezi řešitele matematické olympiády. Po celá desetiletí se mezi úlohami matematické olympiády tradičně objevují úlohy z elementární teorie čísel a mezi nimi také diofantovské rovnice nebo slovní úlohy, které vedou k řešení těchto rovnic.

L i t e r a t u r a

[1] *Fischer, J.*: Matematika pro vyšší realní školy a gymnasia, Brno, 1862.

[2] *Machovec, F.*: Algebra pro vyšší třídy škol středních, Praha, 1886.

[3] *Močník, F.*: Arithmetika i algebra pro vyšší třídy škol středních, Praha, 1875 (přeložené podle 14. vydání F. A. Horou).

[4] *Vyšín, J.*: Neurčité rovnice, Edice „Brána k vědění", svazek 3, JČMF, Prometheus, Praha, 1949.

Několik myšlenek z Eukleidových Základů

EVA PATÁKOVÁ

Pedagogická fakulta UK, Praha

Knihy VII – IX Eukleidových Základů jsou vzhledem k dalším knihám Základů poměrně netypické. Ve většině knih základů totiž Eukleides řeší geometrickými prostředky čistě geometrickou tematiku, zatímco v knihách