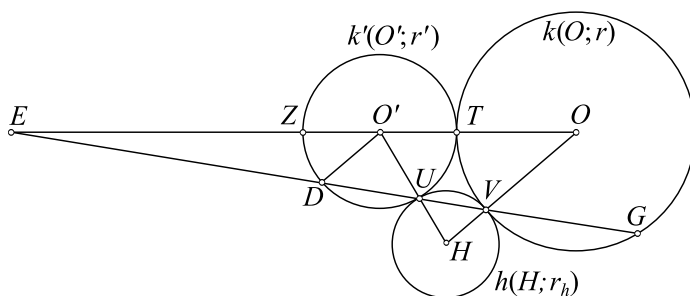


Polibky kružnic: Pappos z Alexandrie

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Pappos (4. stol) byl posledním významným alexandrijským učencem. Jeho osmidílná *Sbírka* (řecky *Synagoge*) nás seznamuje s dílem starověkých matematiků doplněným o Pappovy vlastní objevy. Uvádí se, že mezi ně patří důkaz starší hypotézy, věty o řetězci kružnic vepsaných do arbelu.¹ Ve skutečnosti nevíme, co z toho je Pappova vlastní práce a co pochází od jiných autorů. Může to být jen volný přepis neznámé Archimedovy práce. Většina zdrojů též nezmiňuje, že motivace důkazu věty o arbelu obsahuje analýzu rovinných konfigurací navzájem se dotýkajících kružnic. Odvozená lemmata mají obecnější platnost. Věta o arbelu je jen jedním z jejich důsledků. Stručně se nyní s obsahem Pappova čtyřdílného pojednání seznámíme.



Obr. 1 První okruh úvah – tři kružnice s vnějšími dotyky

¹Větu jsme uvedli v druhém dílu seriálu [1]. Setkáme se s ní i na konci tohoto článku.

První část se zabývá situací z obr. 1. Kružnice $k(O; r)$ a $k'(O'; r')$ mají vnější dotyk T a vně se dotýkají i kružnice $h(H; r_h)$ v bodech V a U . Přímký UV a OO' jsou různoběžné. Označíme E jejich průsečík a D druhý průsečík přímky UV s kružnicí k' . Pappos nejprve z podobnosti trojúhelníků $O'DU$ a HVU odvodil, že $OH \parallel O'D$. Pak pomocí dalších podobností dokázal vztahy

$$\frac{|EV|}{|ED|} = \frac{|ET|}{|EZ|} = \frac{|EO|}{|EO'|} = \frac{|OV|}{|O'D|} = \frac{r}{r'}, \quad (1)$$

kteří dnes snadno ověříme pomocí stejnoolehlosti kružnic k' a k (obr. 1). Dále konstatoval, že z první z rovností (1) plyne

$$\frac{|EV| \cdot |EU|}{|ED| \cdot |EU|} = \frac{|ET| \cdot |ET|}{|EZ| \cdot |ET|}$$

a odtud

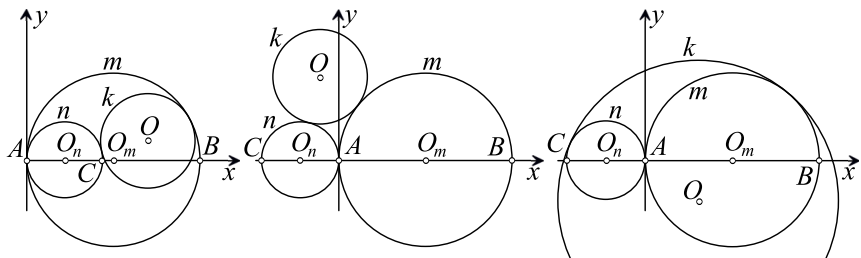
$$|EV| \cdot |EU| = |ET|^2, \quad (2)$$

neboť $|ED| \cdot |EU| = |EZ| \cdot |ET|$ (mocnost bodu E ke kružnici k').

Základem všech dalších úvah jsou kružnice $m(O_m; r_m)$ a $n(O_n; r_n)$, kde $r_m \geq r_n$, s dotykem v bodě A . Zbývající průsečíky kružnic m a n s přímkou O_mO_n budeme (v daném pořadí) značit B a C . Zvolme ještě libovolnou kružnici $k(O; r)$, která se jich dotýká. Při daném poloměru r není těžké sestrojít její střed O . Za účelem číselného určení středu O lze zvolit kartézskou soustavu souřadnic s kladnou poloosou x totožnou s polopřímkou AB (obr. 2). Výpočtem i konstrukcí vychází dva středy, jejichž poloha se liší jen znaménkem y -ové souřadnice. Starověcí učenci neznali záporná čísla ani kartézské souřadnice. Z praktických důvodů nahrazovali kružnice m a n půlkružnicemi ohraničenými přímkou AB a umístěnými na téže straně od ní, základem tzv. arbelu.

Z dnešního pohledu hledal Pappos ve druhém okruhu úvah souvislost mezi poloměrem r a x -ovou souřadnicí středu O . Zjistil překvapivou věc, sice že je podíl těchto dvou veličin konstantní (vztahy (8) a (9)).

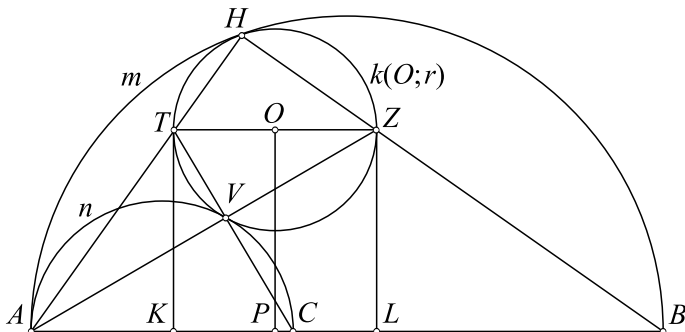
Nejprve definoval tři možné konfigurace navzájem se dotýkajících polokružnic m , n (v dalších úvahách budou někdy nahrazeny kružnicemi) a kružnice k . *První konfigurace* nastane při vnitřním dotyku kružnic m a n (obr. 2 vlevo). V dalších konfiguracích mají kružnice m a n v bodě A vnější dotyk. Přitom *druhá konfigurace* vznikne, když s nimi má kružnice k vnější dotyky (obr. 2 uprostřed) a ve *třetí konfiguraci* má s nimi dotyky vnitřní (obr. 2 vpravo).



Obr. 2 První, druhá a třetí konfigurace kružnic

Odvození provedl pro první konfiguraci: V souladu s obr. 3 označme H a V body dotyku kružnice k s kružnicemi m a n , a TZ její průměr rovnoběžný s přímkou AB takový, že $T \in AH$ a $Z \in BH$. Kolineárnost trojic (A, T, H) , (B, Z, H) , (A, V, Z) a (C, V, T) zaručovala věta L1 z Archimedovy Knihy lemmat (viz [1]). Paty kolmic z bodů T , O a Z na přímkou AB jsou po řadě K , P a L . Z podobnosti trojúhelníků AHB a AKT lze zjistit $|AB|/|AH| = |AT|/|AK|$ a odtud

$$|AB| \cdot |AK| = |AT| \cdot |AH| \quad (3)$$



Obr. 3 Druhý okruh úvah – kružnice vepsaná mezi kružnice m a n

Podobně z trojúhelníků AZL a ACV plyne $|AZ|/|AL| = |AC|/|AV|$, neboli

$$|AZ| \cdot |AV| = |AC| \cdot |AL|. \quad (4)$$

Do třetice, tentokrát z mocnosti bodu A ke kružnici k , dostáváme

$$|AT| \cdot |AH| = |AZ| \cdot |AV|. \quad (5)$$

Ze všech tří vztahů pak

$$|AB| \cdot |AK| = |AC| \cdot |AL|, \quad (6)$$

resp.

$$\frac{|AL|}{|AK|} = \frac{|AB|}{|AC|}. \quad (7)$$

To znamená, že podíl $|AL|/|AK|$ nezávisí na velikosti (a tedy ani na poloze) vepsané kružnice k . Odtud Pappos usoudil, že též

$$\frac{|AB| + |AC|}{|AB| - |AC|} = \frac{|AL| + |AK|}{|AL| - |AK|}.$$

(Není-li tento krok zřejmý, vyřešte si úlohu 2 na konci článku.) Nakonec položil $|AL| - |AK| = 2r$ a $|AL| + |AK| = 2|AP|$, neboť P je střed úsečky KL . Tím získal vztah pro libovolnou kružnici vepsanou mezi kružnice m a n :

$$\frac{|AP|}{r} = \frac{|AB| + |AC|}{|AB| - |AC|}. \quad (8)$$

Analogicky můžeme pro druhou a třetí konfiguraci určit

$$\frac{|AP|}{r} = \frac{|AB| - |AC|}{|AB| + |AC|}. \quad (9)$$

Poznamenejme, že dnes lze při volbě kartézské soustavy souřadnic podle obr. 2 nahradit oba vztahy rovností pro x -ové souřadnice bodů O , B a C :

$$\frac{x_O}{r} = (-1)^{s+1} \frac{x_B + x_C}{x_B - x_C}, \quad \text{kde } s \text{ je číslo konfigurace.} \quad (10)$$

Pappos navíc uvedl, že ze vztahu $|AK|/|TK| = |ZL|/|BL|$ pro podobné trojúhelníky ATK , ZBL a z faktu $|TK| = |ZL| = |PO|$ plyne, že

$$|AK| \cdot |BL| = |PO|^2. \quad (11)$$

Ve třetí části do obrázku přidal kružnici $k'(O'; r')$ vepsanou útvaru ohraničeného oblouky AV , VH a HA (obr. 4). Označme U a T body jejího dotyku s kružnicemi n a k , dále pak E a $D (\neq U)$ průsečíky přímky UV s přímkou $O'O$ a kružnicí k' . Ukážeme, jak Pappos odvodil pro kružnice k , k' vztah (15) mezi jejich průměry d , d' a vzdálenostmi h , h' středů obou kružnic od přímky AB .

Nejprve upozornil, že (8) platí pro každou z vepsaných kružnic, a tak

$$\frac{|AP|}{r} = \frac{|AB| + |AC|}{|AB| - |AC|} = \frac{|AQ|}{r'}.$$

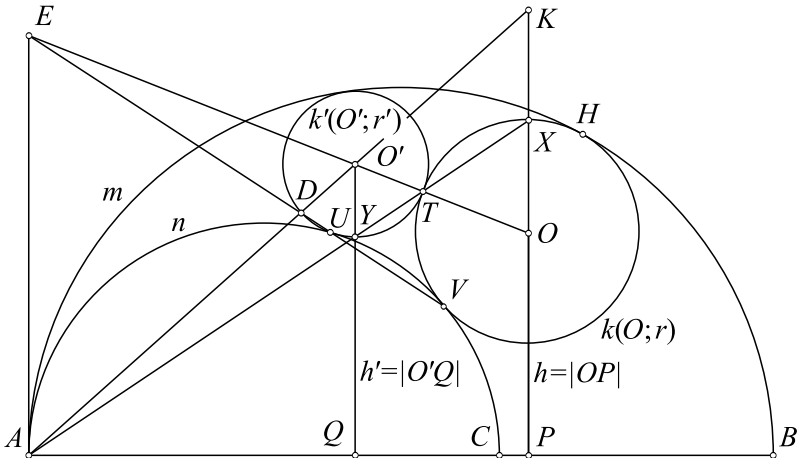
Odtud a z (1) dostaneme

$$\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{r}{r'} = \frac{|EO|}{|EO'|} = \frac{|EV|}{|ED|}. \quad (12)$$

Z mocnosti bodu E ke kružnici n a vztahu (2) plyne

$$|EA|^2 = |EU| \cdot |EV| = |ET|^2.$$

Odtud $|EA| = |ET|$.



Obr. 4 Třetí okruh úvah – odvození rekurentního vztahu

Označme po řadě X a Y průsečíky přímky AT s přímkami PO a QO' . Pappos konstatoval, že $X \in k$ a $Y \in k'$, neboť z podobnosti trojúhelníků ATE , YTO' a XTO plyne

$$1 = \frac{|ET|}{|EA|} = \frac{|O'T|}{|O'Y|} = \frac{|OT|}{|OX|}.$$

Nechť je dále K průsečík přímk AO' a PO . Trojúhelníky APK a AQO' jsou podobné, stejně tak i trojúhelníky AKX a $AO'Y$. Platí tedy

$$\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|AK|}{|AO'|} = \frac{|KX|}{|O'Y|}. \quad (13)$$

Tentýž poměr lze vyjádřit i jinak:

$$\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|EO|}{|EO'|} = \frac{r}{r'} = \frac{|OX|}{|O'Y|}. \quad (14)$$

Z rovnosti levých stran vztahů (13) a (14) plyne rovnost jejich pravých stran. Proto též platí $|KX| = |OX| = r$ a odtud

$$|KO| = 2r = d.$$

Z podobných útvarů $APXK$ a $AQYO'$ dále plyne

$$\frac{|PK|}{|KX|} = \frac{|QO'|}{|O'Y'|},$$

neboli

$$\frac{|PO| + d}{r} = \frac{|QO'|}{r'}.$$

Navíc je $r = d/2$, $|PO| = h$, $r' = d'/2$ a $|QO'| = h'$, a tak nakonec dostaneme

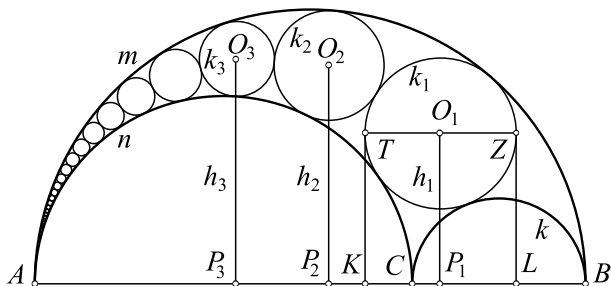
$$h' = \frac{h + 2r}{r} r', \quad \text{resp.} \quad h' = \frac{h + d}{d} d'. \quad (15)$$

Vztahy (15) splňuje i druhá konfigurace. Ve třetí konfiguraci je jiný typ dotyku kružnic k a k' a navíc může být střed kružnice k na různých stranách od přímky AB . Zavedení arbelu tuto komplikaci ve starověku řešilo na úkor obecnosti. Dnes lze konstatovat, že při náhradě veličin h a h' y -ovými souřadnicemi středů kružnic k a k' v kartézské soustavě souřadnic podle obr. 2, a přiřazení znaménka „-“ poloměru r v situaci, kdy má kružnice k s (celými) kružnicemi m a n vnitřní dotyk, platí pro všechny konfigurace vztah

$$\frac{y_{O'}}{r'} = \frac{y_O}{r} + 2. \quad (16)$$

Přístupme nyní k závěrečné části. Má-li v první konfiguraci kružnice k průměr BC , pak útvar ohraničený půlkružnicemi m , n a k ve zvolené polorovině s hraniční přímkou AB se nazývá *arbelos*. Uvažujme řetězec kružnic k_0, k_1, k_2, \dots vepsaných mezi kružnicemi m a n takový, že $k_0 = k$ a pro $j = 1, 2, \dots$ má kružnice $k_j(O_j; r_j)$ vnější dotyk s kružnicemi k_{j-1} a k_{j+1} . *Věta o řetězci kružnic vepsaných do arbelu* říká, že při označení podle obr. 5 platí:

$$h_1 = 2r_1 = d_1, \quad h_2 = 4r_2 = 2d_2, \quad h_3 = 6r_3 = 3d_3, \quad \dots \quad (17)$$



Obr. 5 Závěr – odvození věty o kružnicích vepsaných arbelu

Pappos ji dokázal následovně. Aplikací vztahu (7) na kružnice m, n, k_1 a na kružnice m, k, k_1 dostáváme

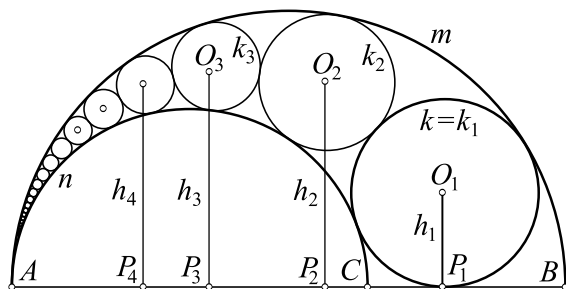
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AL|}{|AK|} \quad \text{a} \quad \frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|BK|}{|BL|}.$$

Jestliže v těchto vztazích nahradíme v každém zlomku čitatelem rozdílem původního čitatele a jmenovatele, obdržíme rovněž platné rovnosti

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|KL|}{|AK|} \quad \text{a} \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|KL|}{|BL|},$$

z nichž zjistíme $|AK| \cdot |BL| = |KL|^2$. Odtud a ze vztahu (11) plyne $|P_1O_1| = |KL|$, jinými slovy $h_1 = d_1$. Po tomto zjištění již Pappos důkaz snadno dokončil opakovaným užitím vztahu (15):

$$h_1 = d_1, \quad h_2 = \frac{d_1 + d_1}{d_1} d_2 = 2d_2, \quad h_3 = \frac{2d_2 + d_2}{d_2} d_3 = 3d_3, \quad \dots$$

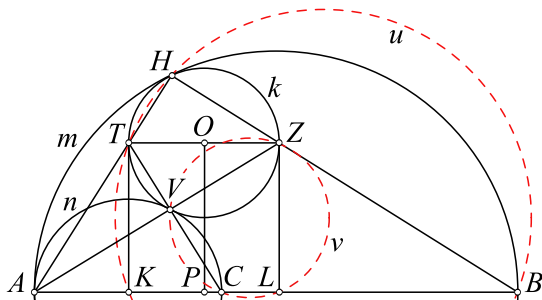


Obr. 6 Řetězec kružnic v Pappově závěrečném dodatku

Ještě uvedl dodatek dodatek, sice že pro situaci na obr. 6 platí

$$h_1 = r_1, h_2 = 3r_2, h_3 = 5r_3, \dots \quad (18)$$

I po mnoha stoletích oceňujeme brilantní využití tehdejší geometrické algebry a důvtipný postup starověkého autora. Shrnutím jeho hlavních výsledků jsme získali vztahy (10) a (16), které usnadňují určení poloměru a souřadnic středu kterékoliv kružnice řetězce (viz úlohu 4).



Obr. 7 Bod A je potenčním středem kružnic u , k a v

Některá místa Pappova pojednání vybízejí k dalším úvahám. Například vztah (6) je důsledkem tří tvarově stejných rovností (3), (4), a (5) mezi součiny délek úseček, jež všechny vycházejí z bodu A . Jakou zvláštní polohu má bod A na obr. 3?

Vše se objasní, když tam dokreslíme Thaletovy kružnice u a v nad průměry BT a CZ (obr. 7): Bod A má stejnou mocnost ke kružnicím u , k a v . Tento fakt pravděpodobně inspiroval Jakoba Steinerja (1796–1863) k zavedení *potenčního středu* kružnic a vyšetřování různých množin bodů a kružnic se stejnou mocností. Zamyšlení nad vztahem (2) a situací z obr. 1 jej mohlo vést k zavedení tzv. *společné mocnosti* bodu E ke kružnicím k , k' a popisu zobrazení, jež se dnes nazývá *kruhová inverze*. S jeho výsledky se seznámíme v dalším pokračování seriálu.

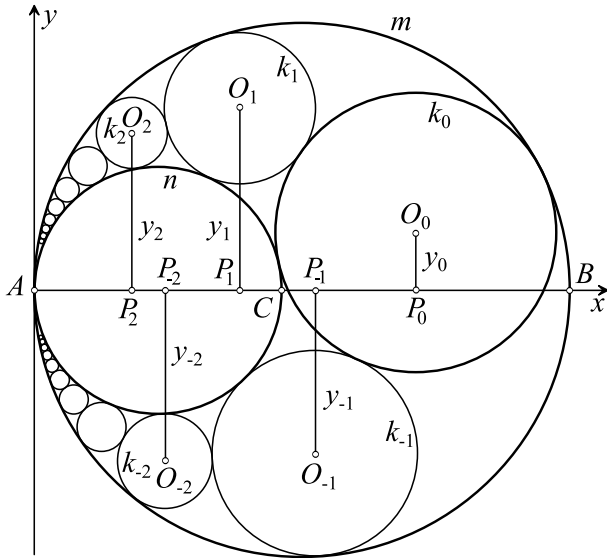
Úlohy

1. Dokažte, že při označení podle obr. 1 platí

$$|ED| \cdot |EG| = |ET|^2.$$

2. Necht' a' , a , b' , b jsou nenulové délky a $a'/a = b'/b = k$. Dokažte, že pak pro každá reálná čísla r , s , t , u , pro něž $ra + sb \neq 0$, resp. $ta' + ua \neq 0$, platí

$$\frac{ra' + sb'}{ra + sb} = k, \quad \text{resp.} \quad \frac{ra' + sa}{ta' + ua} = \frac{rb' + sb}{tb' + ub} = \frac{kr + s}{kt + u}.$$



Obr. 8 Obecný řetězec kružnic na bázi první konfigurace

3. Dokažte, že platí: Je-li první konfiguraci kružnic m , n a $k_0(O_0; r_0)$ vepsán řetězec $\dots k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \dots$ kružnic $k_j(O_j; r_j)$ podle obr. 8, pak v kartézské soustavě souřadnic zvolené na obrázku platí pro všechna celá čísla j rekurentní vztah

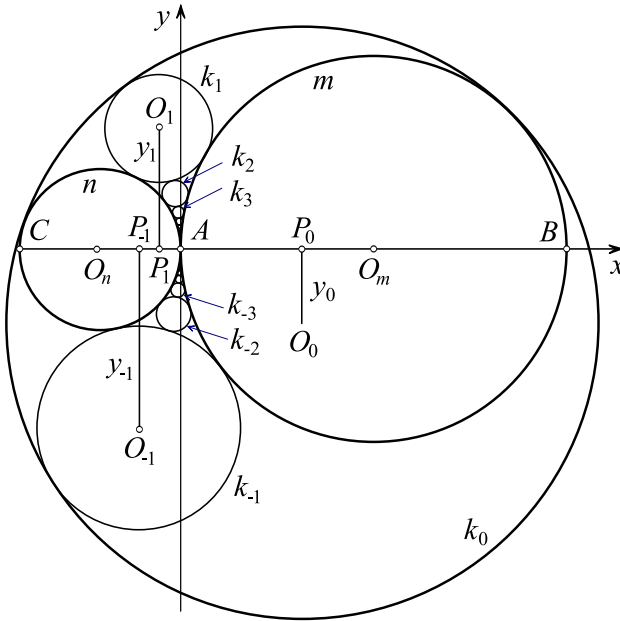
$$\frac{y_{j+1}}{r_{j+1}} = \frac{y_j}{r_j} + 2, \quad (19)$$

kde y_j je y -ová souřadnice středu O_j .

4. Necht' kružnice m , n a k_0 z obr. 8 mají po řadě poloměry 40 cm, 24 cm a 12 cm. Pomocí vztahů (10), (16) a Pythagorovy věty pro

vhodně zvolené trojúhelníky dokažte, že pro j -tou kružnici řetězce platí

$$O_j = [4r_j; (\sqrt{5} + 2j)r_j] \quad \text{a} \quad r_j = \frac{60}{5 + j(j + \sqrt{5})} \text{ cm.}$$



Obr. 9 Řetězec kružnic na bázi třetí konfigurace

5. Pokuste se pro druhou a třetí konfiguraci nakreslit obrázky analogické k obr. 4 a odvodit analogii vztahů (15).
6. Třetí konfiguraci kružnic $m(O_m; 38)$, $n(O_n; 16)$ a $k_0(O_0; r_0)$ je vepsán řetězec kružnic $\dots k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \dots$ podle obr. 9. V kartézské soustavě souřadnic na obr. 9 je $O_0 = [24, y_0]$. Dokažte, že $r_0 = 58,9$, $y_0 = -15,5$ a pro všechna celá čísla j platí

$$\frac{y_j}{r_j} = 0,26 + 2j.$$

(Hodnoty jsou zaokrouhlené a do (16) dosazujeme $-r_0$.)

Literatura

- [1] *Leischner, P.*: Polibky kružnic: Archimedes. MFI, roč. 24, č. 1 (2015), s. 87–94.
- [2] *Pappus of Alexandria*: Book 4 of the Collection, edited with translation and commentary by Heike Sefrin-Weis, Springer, London, 2010.

Využití znalostí matematiky při práci s kreditní kartou

VLADIMÍRA PETRÁŠKOVÁ

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

„Je těžké, když musíte bankéřům sdělit, že nemůžete splatit úrok. Taková slova nemají rádi.“

(D. Trump, Zbohatněte jako já. Pragma, Praha, 2004)

S kreditní kartou je spojováno mnoho negativního. Tato negativa souvisí jednak s nedisciplinovaností majitelů kreditních karet, jednak se základní neznalostí tohoto produktu. V tomto článku na příkladech ukážeme, jak nám matematika může pomoci blíže se seznámit s úskalími, která jsou spojena s využíváním kreditní karty. Zároveň nám pomůže odhalit i její výhody. Příklady jsou určeny žákům středních škol.

Abychom mohli řešit uvedené příklady, musíme znát pojmy jako např. úroková sazba, frekvence připisování úroků, jednoduché a složené úrokování, bezúročné období kreditní karty, úvěrový rámec kreditní karty. . . Je zřejmé, že dochází k překryvu dvou vzdělávacích oblastí vymezených v Rámcových vzdělávacích programech pro gymnázia, a to *Člověk a svět práce* a *Matematika a její aplikace* (VÚP, 2007). Žák potřebuje pro řešení jednak znalosti z oblasti společenskovední (finanční trh, bankovní a nebankovní služby, úvěrové produkty, . . .), jednak z oblasti matematiky (jednoduché úrokování a jeho základní standardy, složené úrokování, . . .).