Kombinatorické důkazy identit s Fibonacciho čísly

TEREZA KOVÁŘOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Příspěvek je věnován známé Fibonacciově posloupnosti $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, jejíž první dva členy jsou $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ a další členy (pro $n \geq 2$) lze získat pomocí rekurentního vztahu $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. V tab. 1 je uvedeno prvních 11 Fibonacciho čísel.

Tabulka 1 Prvních 11 Fibonacciho čísel

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Fibonacciho čísla se vyskytují v mnoha zajímavých identitách (vzorcích). Budeme se věnovat zejména tomu, jak dokázat platnost vybraných identit. Obvykle se v literatuře uvádějí důkazy pomocí matematické indukce. Ukážeme jinou možnost, kterou je kombinatorický důkaz. Princip takového důkazu spočívá v nalezení vhodné kombinatorické interpretace levé i pravé strany rovnosti a následné diskuzi, v níž je nutné vysvětlit, že obě strany rovnosti popisují tutéž situaci.

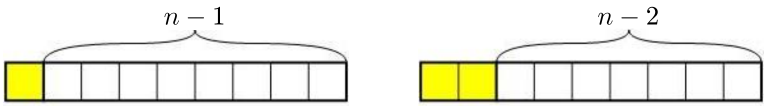
V celém článku budeme využívat vztahu mezi Fibonacciho čísly a pokrýváním obdélníku pomocí dlaždic dvou druhů. Prvním druhem jsou tzv. monomina (čtverce o délce strany 1) a druhým jsou domina (obdélníky o velikosti 1×2). Délka pokrývaného obdélníku bude vždy celé číslo a jeho šířka bude vždy 1. Zamysleme se nad tím, kolika způsoby lze pokrýt obdélník o velikosti $1 \times n$ pomocí monomin a domin. Počet všech těchto pokrytí označíme P_n.

Nejprve určíme počet pokrytí některých malých pravoúhelníků. Čtverec 1×1 můžeme pokrýt jediným způsobem (pomocí jednoho monomina). Platí tedy $P_1 = 1$. Obdélník 1×2 lze pokrýt dvěma způsoby, a to buď pomocí dvou monomin, nebo jednoho domina, tudíž $P_2 = 2$. Čtenář si může samostatně ověřit, že u obdélníku 1×3 snadno zjistíme, že počet různých způsobů pokrytí je 3, tedy $P_3 = 3$.

Obdélník $1 \times n$ (dále obdélník o délce n) budeme pokrývat postupně zleva doprava. První políčko lze pokrýt dvěma způsoby: buď pomocí monomina anebo pomocí domina. V prvním případě zbude k pokrytí obdélník o délce $n-1$ a ve druhém případě zbude nepokrytý obdélník o délce $n-2$ (obr. 1). Počet všech různých pokrytí obdélníku o délce n získáme tedy tak, že sečteme počty všech možných pokrytí obdélníků o délkách $n-1$ a $n-2$. Platí tedy $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$.

Již víme, že pro $n \in \{1, 2\}$ je P_n shodné s F_n. Navíc rekurentní vztah pro výpočet dalších členů obou posloupností je stejný, proto i pro všechna vyšší n se musí čísla P_n a F_n rovnat. Zjistili jsme tedy, že až na nultý člen se jedná o dvě shodné posloupnosti. Definujeme-li navíc $P_0 = 1$, můžeme tento vztah interpretovat též kombinatoricky (obdélník 0×1 nelze pokrýt žádnou dlaždici, tj. „existuje“ jedna možnost).

Zjistili jsme tedy, že počet všech způsobů pokrytí obdélníku o délce n pomocí monomin a domin je roven F_n. Tuto skutečnost budeme využívat při dokazování následujících čtyř identit.



Obr. 1 Dvě možnosti pokrytí levého políčka obdélníku o délce n

Úloha 1

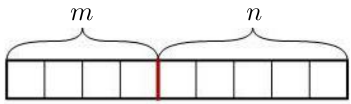
Dokažte, že pro libovolná m, n přirozená platí

$$F_{m+n} = F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1}.$$

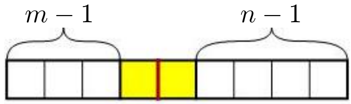
Řešení. Víme, že levá strana rovnosti odpovídá počtu všech různých pokrytí obdélníku o délce $m+n$ pomocí monomin a domin. Ukážeme-li, že počet těchto pokrytí popisuje i pravá strana zadané rovnosti, bude důkaz hotov.

Uvažujme tedy obdélník o délce $m+n$. Rozdělme ho na dva menší obdélníky o délkách m a n. První lze pomocí monomin a domin pokrýt F_m způsoby a druhý F_n způsoby (obr. 2). To nám dává $F_m \cdot F_n$ způsobů pokrytí původního obdélníku. Ještě jsme však nezapočítali ta pokrytí, kde jsou políčka m a $m+1$ pokryta dominem (obr. 3). V takovém případě zbývá pokrýt dva obdélníky o délkách $m-1$ a $n-1$, čímž získáme dalších $F_{m-1} \cdot F_{n-1}$ způsobů pokrytí původního obdélníku.

Žádný jiný způsob pokrytí neexistuje, a proto obdélník o délce $m + n$ lze pokrýt $F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1}$ způsoby, čímž jsme dokázali platnost zadané rovnosti.



Obr. 2 Obdélník o délce $m + n$ rozdělený na 2 menší obdélníky o délkách m, n



Obr. 3 Obdélník, ve kterém domino pokrývá políčka m a $m + 1$

Úloha 2

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \begin{cases} \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}, & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}}, & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Řešení. Rozdělíme všechna možná pokrytí obdélníku délky n do skupin podle toho, kolik se v daném pokrytí nachází domin – nemusí být žádné a nejvýše jich může být $\lfloor n/2 \rfloor$. (Symbol $\lfloor n/2 \rfloor$ značí dolní celou část čísla $n/2$, tj. jeho zaokrouhlení na celé jednotky vždy směrem dolů.)

Nyní je třeba určit, kolik různých pokrytí obdélníku se nachází v každé z těchto skupin. Vezměme skupinu, kde každý obdélník obsahuje k domin. Pokrytí se potom skládá z k domin a z $n - 2k$ monomin, tj. dohromady $n - k$ dlaždic, které skládáme vedle sebe v různém pořadí. Počet různých uspořádání těchto dlaždic je stejný jako počet uspořádaných $(n - k)$-tic sestavených z k prvků jednoho druhu a $n - 2k$ prvků druhého druhu. Jedná se tedy o permutace s opakováním, kterých je

$$\frac{(n-k)!}{k! \cdot (n-2k)!}.$$

Tento výraz lze zapsat kombinačním číslem $\binom{n-k}{k}$. Sečteme-li počty obdélníků ve všech skupinách, dostaneme počet všech různých pokrytí obdélníku o délce n. To je ale totéž, jako sečíst kombinační čísla $\binom{n-k}{k}$ pro všechna možná k (tj. $k = 0, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$).

Úloha 3

Dokažte, že pro každé n přirozené platí $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 2$.

Řešení. Stačí dokázat ekvivalentní vztah $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$. Pravou stranu této rovnosti lze chápat jako počet všech pokrytí obdélníku o délce $n + 2$ s alespoň jedním dominem (tj. počet všech různých pokrytí tohoto obdélníku bez jednoho pokrytí sestaveného ze samých monomin). Ukážeme, že na levé straně rovnosti je totéž číslo.

Chceme, aby pokrytí obdélníku obsahovalo alespoň jedno domino. Všechna taková pokrytí můžeme opět rozdělit do skupin, tentokrát podle polohy posledního domina (tj. domina nejvíce vpravo). Nyní potřebujeme zjistit, kolik obdélníků se nachází v každé skupině. Pokud poslední domino je na pozicích $k + 1$ a $k + 2$, potom prvních k políček obdélníku může být pokryto libovolně a zbylých $n - k$ políček musí být vždy vyplněno monominy. Počet takových pokrytí je F_k. Sečteme-li počty pokrytí v každé skupině, dostaneme počet všech různých pokrytí obdélníku o délce $n+2$ s alespoň jedním dominem. To je ale totéž jako sečíst F_k pro všechna možná k (tj. $k = 0, \ldots, n$).

Úloha 4

Dokažte, že pro každé n přirozené platí $F_n^2 = F_{n+1} \cdot F_{n-1} + (-1)^n$.

Řešení. Při důkazu této identity nevystačíme s pokrýváním jednoho obdélníku o délce n, ale budeme potřebovat dvojici takových obdélníků. Počet pokrytí těchto dvou obdélníků pomocí monomin a domin odpovídá levé straně rovnosti. Na pravé straně rovnosti si můžeme všimnout výrazu $F_{n+1} \cdot F_{n-1}$, který odpovídá počtu různých pokrytí dvojice obdélníků o délkách $n + 1$ a $n - 1$.

Identita říká, že počet pokrytí dvou obdélníků délky n se od počtu pokrytí dvou obdélníků o délkách $n+1$ a $n-1$ liší o 1, nebo -1 v závislosti na paritě čísla n.

Předpokládejme nejprve, že n je liché. Ukážeme, že z každého pokrytí dvojice obdélníků délky n lze vyrobit pokrytí dvojice obdélníků o délkách $n + 1$ a $n - 1$.

Vezměme tedy libovolné pokrytí dvojice obdélníků délky n a umístěme obdélníky pod sebe tak, že dolní obdélník je oproti hornímu posunut o jedno políčko vpravo (obr. 4 a 5. vlevo). Sloupce očíslujeme 1 až $n + 1$.

Horní obdélník se tedy nachází ve sloupcích 1 až n a dolní ve sloupcích 2 až $n+1$.

Protože je n liché, v každém pokrytém obdélníku se musí nacházet alespoň jedno monomino. Najdeme to monomino, které leží nejvíce vpravo. Řekněme, že leží v i-tém sloupci. Nové pokrytí obdélníků o délkách $n+1$ a $n-1$ vyrobíme tak, že původním obdélníkům vyměníme políčka ve sloupcích i až $n+1$. Na obr. 4 je znázorněna výměna pro situaci, kdy dané monomino leželo původně v dolním obdélníku, a na obr. 5 je výměna znázorněna pro situaci, kdy poslední monomino leželo původně v horním obdélníku.

Obr. 4 Výměna políček, kdy poslední monomino leželo původně v dolním obdélníku

Obr. 5 Výměna políček, kdy poslední monomino leželo původně v horním obdélníku

Všimněme si, že ze dvou různých pokrytí dvojice obdélníků délky n vzniknou dvě různá pokrytí dvojice obdélníků o délkách $n+1$ a $n-1$. Dále potřebujeme zjistit, jestli je možné tímto způsobem vyrobit libovolné pokrytí dvojice obdélníků o délkách $n+1$ a $n-1$. To je pravda až na jednu výjimku. Jelikož každý obdélník o délce n musí obsahovat alespoň jedno monomino, musí i všechna výše popsaná pokrytí obdélníků o délkách $n+1$ a $n-1$ obsahovat dohromady alespoň dvě monomina. Nesmíme ale zapomenout, že tyto dva obdélníky lze také pokrýt pouze pomocí samých domin. Proto je všech možných pokrytí dvojice obdélníků o délkách $n+1$ a $n-1$ o jedno více než pokrytí dvojice obdélníků o délce n. Pro n liché tedy platí $F_n^2 = F_{n+1} \cdot F_{n-1} - 1$.

Pro n sudé budeme naopak ze dvojice pokrytých obdélníků o délkách $n+1$ a $n-1$ tvořit dvojici pokrytých obdélníků o délce n. Obrácením výše uvedeného postupu zjistíme, že pro n sudé platí $F_n^2 = F_{n+1} \cdot F_{n-1} + 1$.

Tím je identita dokázána.

Závěr

V článku jsme uvedli kombinatorické důkazy čtyř zajímavých identit s Fibonacciho čísly. V závěrečných cvičeních je pak uvedeno dalších pět identit, jejichž důkazy přenecháváme čtenářům. Stojí za zamyšlení, zda by všechny uvedené identity bylo možno dokázat také jiným způsobem, např. přímým důkazem pomocí vzorce pro n-tý člen Fibonacciovy posloupnosti nebo matematickou indukcí. Většinou bychom však zjistili, že takové důkazy jsou zdlouhavé a komplikované. Kombinatorické důkazy jsou pro vybrané identity naopak velmi nápadité a elegantní.

V uvedených důkazech jsme využívali pokrývání obdélníku o délce n pomocí monomin a domin. Mohli bychom však využít i jiných vlastností Fibonacciho čísel, například skutečnosti, že F_n udává počet všech různých pokrytí obdélníku $2 \times n$ výhradně pomocí domin. Hodnota F_n udává mj. počet způsobů, jak vystoupat po schodišti o n schodech, je-li povoleno při každém kroku nejvýše jeden schod překročit. Obě tyto kombinatorické situace jsou popsány v [1]. Čtenářům doporučujeme promyslet si, proč uvedená tvrzení platí, a pokusit se pomocí nich dokázat identity uvedené v tomto článku.

Tvorba článku byla inspirována publikací [2], v níž lze najít důkazy mnoha dalších identit, a to nejen s Fibonacciho čísly, ale také s kombinačními čísly, Lucasovými nebo tzv. Gibonacciho čísly. Důkazy řady identit s Fibonacciho čísly jsou uvedeny rovněž v [3].

Cvičení

Dokažte, že pro libovolné n přirozené platí

a) $F_{2n} = F_n^2 + F_{n-1}^2$,
b) $F_{2n-1} = F_n^2 - F_{n-2}^2$,
c) $F_0 + F_2 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1}$,
d) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$,
e) $F_n^4 = F_{n+2} \cdot F_{n+1} \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} + 1$.

Literatura

[1] *Calda, E.*: Kombinatorika pro učitelské studium. Matfyzpress, Praha, 1996.

[2] *Benjamin, A. T. – Quinn, J. J.*: Proofs That Really Count: the art of combinatorial proof. Mathematical Association of America, Washington, D.C., 2003.

[3] *Grimaldi, R. P.*: Fibonacci and Catalan Numbers. An Introduction. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2012.